CULEGERE DE PROBLEME

PENTRU ADMITEREA ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

Matematică·Fizică·Chimie

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Ion CUCULESCU
Octavian STĂNĂŞILĂ
Vasile BRÎNZĂNESCU
Constantin IONESCU-BUCUR

Ion M. POPESCU
Dan IORDACHE
Constantin CRISTESCU

Felicia CORNEA
Ion BACIU
Cornel PODINĂ

CULEGERE DE PROBLEME REZOLVATE

pentru admiterea în învăţământul superior

Matematică — Fizică — Chimie

— Probleme date la concursurile de admitere în învăţământul superior, 1980—1983

— Probleme propuse

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ
Bucureşti — 1984

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Culegerea de probleme rezolvate de matematică, fizică și chimie cuprinde seturi selectate de probleme și întrebări teoretice date la concursurile de admitere din perioada 1980—1983, la disciplinele matematică, fizică și chimie, precum și probleme propuse de autori. Pentru fiecare disciplină s-a întocmit un breviar care cuprinde principalele relații și legi care intervin în rezolvarea problemelor tipice, corespunzînd programei analitice pentru admiterea în învățămîntul superior.

Reprezentînd experiența a șase concursuri organizate pe plan central, cu subiecte unice, la nivelul întregii țări, lucrarea de față este o continuare a lucrării „Probleme de matematică, fizică și chimie date la concursurile de admitere în învățămîntul superior în anii 1978—1979".

Organizarea materialului respectă structura probelor pe specializări, profiluri ori grupe de profiluri de învățămînt, precum și pe anii respectivi de concurs. O astfel de structurare dă posibilitatea unei autoverificări a cunoștințelor candidaților la concursul de admitere și a unei autotestări a viitorilor candidați la studenție, ținînd seama de faptul că timpul afectat pentru elaborarea unei lucrări scrise este de trei ore.

Problemele date la concursurile de admitere, prezentate în volumul de față, trebuie înțelese prin prisma programelor analitice care au fost valabile pentru concursurile din perioada 1980—1983.

Lucrarea reprezintă un ghid de rezolvare a problemelor, de tratare a „pachetului" de subiecte date la un concurs de admitere. După modul în care a fost întocmită, avem convingerea că această lucrare va constitui un sprijin important pentru candidații care se pregătesc în vederea participării la concursul de admitere în învățămîntul superior.

Menționăm că problemele date la concursurile de admitere au la bază propunerile unui larg activ de specialiști din învățămîntul superior. Soluțiile problemelor și breviarele constituie rodul muncii autorilor lucrării de față.

Prof. dr. ing. VASILE CĂTUNEANU

Scanned with OKEN Scanner

MATEMATICA

Scanned with OKEN Scanner

A. BREVIAR

1. ALGEBRĂ

1. *Variația funcției de gradul doi cu coeficienți reali*

Este vorba de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Funcția este monotonă pe fiecare din intervalele

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right).$$

Dacă $a > 0$ ea este descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. În acest caz valoarea ei minimă este $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Dacă $a < 0$ ea este crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. În acest caz valoarea ei maximă este $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. *Semnul funcției de gradul doi cu coeficienți reali*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Cazul 1. $b^2 - 4ac < 0$. În acest caz $f(x)$ are semnul lui a pentru orice x; Ecuația $f(x) = 0$ n-are rădăcini reale.

Cazul 2. $b^2 - 4ac = 0$. În acest caz $f(x)$ este nul pentru o singură valoare a lui x, și anume pentru $x = -\frac{b}{2a}$. Pentru toate celelalte valori ale lui x, $f(x)$ are semnul lui a.

Cazul 3. $b^2 - 4ac > 0$. În acest caz $f(x)$ ia valoarea 0 pentru două valori ale lui x, $x_1 \neq x_2$, date prin formulele $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $f(x)$ are semnul lui a pentru valori ale lui x în afara intervalului dintre rădăcini etc.

3. *Rezolvarea câtorva sisteme de ecuații de grad > 1*

a) $ax + by + c = 0$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c_0 = 0.$

Se rezolvă prima ecuație în raport cu y de exemplu, se introduce rezultatul în a 2-a și vom obține o ecuație de gradul doi în x, care are în general două

Scanned with OKEN Scanner

rădăcini x_1, x_2. Cu ajutorul primei ecuații obținem valorile y_1, y_2 corespunzătoare. Soluțiile vor fi: (x_1, y_1) și (x_2, y_2).

b) Sistem omogen

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_3$$
$$b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 = b_3.$$

Se face substituția de exemplu $y = tx$. Ecuațiile vor deveni $x^2P(t) = a_3$, $x^2Q(t) = b_3$, unde P, Q sînt polinoame de grad cel mult doi. Rezultă $a_3Q(t) = b_3P(t)$, ecuație de grad cel mult doi ce va avea în general două soluții t_1 și t_2.

Din ecuația $x^2P(t) = a_3$ de exemplu scoatem 4 valori pentru x: x_1, $-x_1$, x_2, $-x_2$, primele două corespunzînd lui t_1, celelalte două lui t_2. Soluțiile vor fi (x_1, t_1x_1), $(-x_1, -t_1x_1)$, (x_2, t_2x_2), $(-x_2, -t_2x_2)$ (pot fi mai puține). Atenție însă, căci pe această cale se poate pierde rădăcina $x = 0$ etc.

c) Sistem simetric

$$P(x, y) = 0$$
$$Q(x, y) = 0$$

în care $P(x, y) = P(y, x)$, $Q(x, y) = Q(y, x)$.

Metoda constă în a nota: $x + y = u$, $xy = v$, și a exprima pe P și Q în funcție de u și v: $P(x, y) = P_1(x + y, xy) = P_1(u, v)$, $Q(x, y) = Q_1(x + y, xy) = Q_1(u, v)$; apoi se va rezolva sistemul obținut $P_1(u, v) = 0$, $Q_1(u, v) = 0$.

Ecuațiile acestui sistem au grade mai mici decît P și Q. Pentru fiecare soluție (u_0, v_0) obținută pentru acest sistem formăm ecuația de gradul doi $z^2 - u_0z + v_0 = 0$ și dacă z_1, z_2 sînt soluțiile ei, obținem soluțiile (z_1, z_2), (z_2, z_1) pentru sistemul inițial.

Să dăm cîteva exemple de exprimare a unor polinoame simetrice în x, y ca funcții de $x + y$, xy

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$$
$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = uv$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = u(u^2 - 3v)$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2.$$

4. *Numere complexe*

Orice număr complex se scrie sub forma $a + bi$ cu a, b reali

$$a + bi = a' + b'i \text{ dacă și numai dacă } a = a', b = b'.$$

Adunarea și înmulțirea numerelor complexe se face după regulile obișnuite, la care se adaugă regula $i^2 = -1$.

Împărțirea $\dfrac{a' + b'i}{a + bi}$ se realizează prin „amplificare cu conjugata numitorului", deci $\dfrac{(a' + b'i)(a - bi)}{a^2 + b^2}$ etc.

Pentru numărul complex $z = a + bi$ se definește $\bar{z} = a - bi$ (conjugatul complex al lui z).

Avem $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$. În plus, dacă $z = \bar{z}$ atunci z este număr real. Dacă un polinom $P(x)$ cu coeficienți reali este nul pentru $x = z$, atunci el este nul și pentru $x = \bar{z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice număr complex $z=a+bi$ definim modulul său $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. În cazul $|z| \neq 0$ definim și argumentul său, cel mai simplu pe cale grafică deci $a = |z| \cos \theta$, $b = |z| \sin \theta$, θ fiind definit „abstracție făcînd de un multiplu întreg de 2π", adică el poate fi înlocuit cu $\theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ valabilitatea celor 2 formule păstrîndu-se.

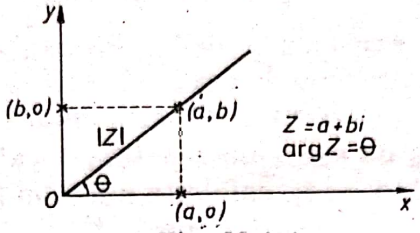


Fig. M.A.1

Deci $z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z)$.

Avem $|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ cu k număr întreg.

Un rezultat important îl constituie formula lui Moivre: $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.

Determinarea tuturor numerelor complexe u pentru care $u^n = z$, $n \geqslant 1$ număr întreg și z număr complex fiind dați, se face conform formulelor:

$u_k = |z|^{1/n} (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, unde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și $\theta_k = \frac{1}{n} (\arg z + 2k\pi)$.

Deci sînt n astfel de numere distincte dacă $z \neq 0$.

5. *Puteri și radicali. Funcția putere și funcția exponențială*

Pentru x număr real și n număr întreg $n \geqslant 1$ se definește $x^n = \underbrace{x \ldots x}_{n \text{ factori}}$.

Punem $x^0 = 1$ și, pentru $x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Pentru m, n numere întregi, $n > 0$ și $x > 0$ număr real, definim $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} > 0$.

Aceasta are sens, dacă m este par, și pentru $x < 0$. De asemenea, dacă m și n sînt ambii impari, $x^{m/n}$ are sens, fiind < 0, și pentru $x < 0$. Pentru $m > 0$ are sens și $0^{m/n} = 0$.

Pentru $x > 0$ și y irațional se definește $x^y > 0$ aproximînd y prin numere raționale etc.

Au loc proprietățile:

a) $(x_1 x_2)^y = x_1^y \cdot x_2^y$.

b) $(x^y)^z = x^{yz}$.

c) $1^y = 1$ pentru orice $y \in \mathbf{R}$.

d) Pentru orice $y > 0$ funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^y$ este strict crescă toare iar pentru orice $y < 0$ ea este strict descrescătoare.

e) Pentru orice $y > 1$ funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = y^x$ este strict crescătoare; cînd x parcurge mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$, $g(x)$ parcurge $(0, \infty)$.

Pentru orice $0 < y < 1$ funcția $g(x) = y^x$ este strict descrescătoare; cînd x parcurge mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$, $g(x)$ parcurge $(0, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiție. $y \neq 1$, $y > 0$ fiind dat, funcția inversă funcției g de la punctul e) se notează $h(x) = \log_y x$ (logaritm în baza y de x). $\log_y x$ este definită pentru $x \in (0, \infty)$ și valorile ei, pentru orice y fixat, acoperă $\mathbf{R}$.

Proprietățile logaritmilor.

a') $y^{\log_y x} = x$.

b') $\log_y (x_1 x_2) = \log_y x_1 + \log_y x_2$.

c') $\log_y (x^z) = z \log_y x$.

d') $\log_{y_1} x = (\log_{y_2} x)(\log_{y_2} y_1)^{-1} = (\log_{y_2} x)(\log_{y_1} y_2)$.

6. *Cîteva definiții privind funcțiile*

Definiție. Fie f: $M \to N$ o funcție.

a) f se numește injectivă, dacă $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in M$ implică $f(m_1) \neq f(m_2)$; altfel spus dacă $m_1, m_2 \in M$, $f(m_1) = f(m_2)$ implică $m_1 = m_2$.

b) f se numește surjectivă, dacă oricare ar fi $n \in N$ există $m \in M$ așa încît $f(m) = n$.

c) f se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

Dacă $f : M \to N$ este bijectivă atunci există o funcție unică $g : N \to M$ așa încît $g(x) = y$ să fie echivalent cu $f(y) = x$. Funcția g se notează f^{-1}.

Definiție. Fie $f : M \to N$, $g : N \to P$ două funcții, unde domeniul valorilor lui f coincide cu domeniul de definiție al lui g. Definim compunerea lor $g \circ f$ drept o funcție de la M la P prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Dacă $M = N = P$ atunci putem forma și $f \circ g$, dar în general $g \circ f \neq f \circ g$.

7. *Elemente de analiză combinatorie*

Definiții. a) Prin card M vom nota numărul de elemente ale mulțimii finite M.

b) Dacă $0 < n \leqslant m$ sînt întregi, definim numărul A_m^n (aranjamente de m cîte n) astfel. Alegem o mulțime B cu m elemente, una D cu n elemente, formăm $M = \{f \mid f: D \to B, f \text{ injectivă}\}$ și definim $A_m^n = \text{card } M$.

c) P_n (permutări de n) se definește drept A_n^n.

d) Dacă $0 \leqslant n \leqslant m$ sînt întregi, definim C_m^n (combinări de m cîte n) alegînd o mulțime D cu m elemente formînd $N = \{B \mid B \subset D, \text{ card } B = n\}$ și punînd $C_m^n = \text{card } N$.

Formule: $A_m^n = m(m-1) \ldots (m-n+1)$; $P_n = 1 \cdot 2 \ldots n$ se notează $n!$, deci $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$; $C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$; pentru $n > 0$, $C_m^0 = 1$ sau $C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$ considerînd $0! = 1$.

Există și alte formule utile, din care menționăm $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$ care permite calculul succesiv, după m, al lui C_m^n, schemă materializată în „triunghiul lui Pascal".

$$C_{m-1}^0,\ C_{m-1}^1, \ldots, C_{m-1}^{n-1},\ C_{m-1}^n, \ldots\ldots,$$
$$C_m^0, \ldots\ldots\ldots\ldots, C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}, \ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

8. *Formula binomului lui Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \; ; \; x, y \in \mathbf{C}, \; n \in \mathbf{N}$$

sau, desfăşurat:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

9. *Progresii*

Definiţii. Un şir $a_1, \ldots, a_n$ se numeşte:

a) progresie aritmetică dacă $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$ (valoarea comună r a tuturor $a_k - a_{k-1}$ se numeşte raţia progresiei).

b) progresie geometrică dacă există un q real (raţia progresiei) aşa încît $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, ..., $a_n = a_{n-1} q$.

Formule

a') Pentru progresii aritmetice

$$a_n = a_1 + r(n-1)$$

$$a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot r.$$

b') Pentru progresii geometrice

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_1 + \ldots + a_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1} \text{ pentru } q \neq 1$$

(pentru $q = 1$ avem $a_1 = \ldots = a_n$ deci $a_1 + \ldots + a_n = n a_1$).

10. *Matrice şi determinanţi*

Mulţimea matricelor de tip (m, n), $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ cu coeficienţi reali se notează $M_{m,n}(\mathbf{R})$. Aşadar, orice $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \qquad\quad a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Dacă $m = n$ se obţin matrice pătratice de ordin n.

Două matrice $A \subset M_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ se consideră *egale* dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$; aşadar egalitatea de matrice $A = B$ este echivalentă cu $m \cdot n$ egalităţi de numere reale.

Pentru orice întregi $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ şi pentru orice $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ şi $\lambda \in \mathbf{R}$ se definesc $A + B$, $A - B$, λA. Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ şi $B \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, atunci se poate defini produsul $A \cdot B$ care este o matrice de tip (m, p); anume dacă

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}, \quad B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}, \quad \text{atunci} \quad AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \quad \text{unde} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, b_{jk}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțirea matricelor este asociativă (nu și comutativă) și este distributivă în raport cu adunarea.

Mulțimea $M_n(\mathbf{R})$ a matricelor pătratice de ordin n cu coeficienți reali are o structură de inel, în care matricea $0 = diag\ (0, \ldots, 0)$ este elementul neutru pentru adunare iar $I_n = diag\ (1, \ldots, 1)$ este elementul neutru pentru înmulțire [se notează $diag\ (d_1, \ldots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$].

Exemple. 1) Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad -2 \quad 4)$.

Să se determine matricea X astfel încît $X \cdot A = B$. [Dacă X este de tip (m, n), atunci produsul $X \cdot A$ are sens numai dacă $n = 2$ iar egalitatea $X \cdot A = B$ are loc numai dacă $m = 1$. Așadar X este o matrice de tip $(1, 2)$, $X = (x \ y)$. Atunci $X \cdot A = (x \quad x - y \quad y)$ și din egalitatea $X \cdot A = B$ rezultă $x = 2$, $y = 4$ deci $X = (2 \ \ 4)$].

2) Presupunem că $A \in M_n(\mathbf{R})$ și că $A^k = 0\ (k \geqslant 1)$. Să se arate că există o matrice $X \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $(I_n - A)X = I_n$ și $X \cdot (I_n - A) = I_n$. [Este suficient să luăm $X = I_n + A + \ldots + A^{k-1}$].

Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ este o matrice pătratică de ordin n cu coeficienți în $\mathbf{R}$, atunci se poate defini determinantul

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, \ldots, i_n)} (-1)^I a_{1i_1} \ldots a_{ni_n},$$

unde suma conține $n!$ termeni, făcîndu-se după toate permutările $(i_1, \ldots, i_n)$ ale numerelor $(1, \ldots, n)$, avînd I inversiuni; fiecare termen este un produs de n factori. Reținem că $A \in M_n(\mathbf{R})$ și $\det A \in \mathbf{R}$.

Se cunosc proprietățile determinanților, inclusiv modul de calcul efectiv (prin dezvoltare după o linie); pentru $n = 3$ se poate aplica regula lui Sarrus.

Dacă $A \subset M_{m,n}(\mathbf{R})$, $A \neq 0$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, se numește *rangul* matricei A acel unic număr întreg $p \geqslant 1$ astfel încît A admite un minor nenul de ordin p și toți minorii de ordin $p + 1$ sînt nuli.

O matrice pătratică $A \in M_n(\mathbf{R})$ se numește *nesingulară* dacă $\det A \neq 0$; în acest caz există și este unică o matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ nesingulară astfel ca $A \cdot B = I_n$ și $B \cdot A = I_n$. Matricea B se numește *inversa* lui A și se notează $B = A^{-1}$. Se știe că $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix}$, cu $A_{ij} = (-1)^{j+i} M_{ij}$ unde M_{ij} este minorul asociat elementului de pe linia i și coloana j din matricea A.

Exemple. 1) Determinăm rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $m \in \mathbf{R}$ este un parametru. Rangul maxim posibil este 3. Minorul de ordin 3 extras din A, are valoarea $5 - m$. Dacă $m \neq 5$, atunci rang $A = 3$, iar dacă $m = 5$, rang $A = 2$.

2) Să se arate că dacă A, $B \in M_n(\mathbf{R})$ sînt inversabile, atunci $A \cdot B$ este inversabilă și $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. [Într-adevăr este suficient să observăm că $AB \cdot (B^{-1} A^{-1}) = I_n$ și $(B^{-1} A^{-1})A \cdot B = I_n$].

Scanned with OKEN Scanner

3) Să se calculeze A^{-1} pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

În primul caz $\det A = 3$ și $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; în cazul secund, $\det A = -4$, $A_{11} = 4$, $A_{12} = -7$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 3$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 0$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -1$, deci $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. *Sisteme de ecuații liniare*

Forma generală a unui astfel de sistem având m ecuații și n necunoscute este

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Notînd

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sistemul se scrie în mod echivalent matricial $A \cdot X = B$.

Dacă $m = n$ și dacă $\det A \neq 0$, atunci matricea A admite inversă, iar sistemul $A \cdot X = B$ admite o soluție unică, anume $X = A^{-1}B$, ceea ce este practic echivalent cu *regula lui Cramer*.

În cazul general al unui sistem liniar cu m ecuații și n necunoscute, se notează cu p rangul matricei A și se fixează un determinant principal Δ_p. Se calculează cei $m - p$ determinanți caracteristici (prin bordarea lui Δ_p cu termeni liberi). Dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli sau dacă nu există (adică $m = p$), atunci sistemul este compatibil în care $n - p$ necunoscute rămîn nedeterminate (dacă $n = p$ sistemul este compatibil determinat; dacă $n - p = 1$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat, iar dacă $n - p = 2$ compatibil dublu nedeterminat etc.). În fine, dacă cel puțin unul din determinanții caracteristici este nenul, atunci sistemul este imposibil.

Acesta este conținutul (și algoritmul de aplicare) al teoremei lui Rouché.

Un sistem liniar de forma $A \cdot X = 0$ (cu $A \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ și $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$) se numește *omogen*. Un astfel de sistem are totdeauna soluția nulă, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, cu n linii. Problema care se pune este de a decide dacă sistemul admite sau nu soluții nenule. Dacă $m = n$, sistemul are soluții nenule dacă și numai dacă $\det A = 0$. În cazul general, dacă $\operatorname{rang} A = n$, atunci sistemul are numai soluția nulă, iar dacă $\operatorname{rang} A < n$, sistemul are și soluții nenule.

Scanned with OKEN Scanner

12. *Legi de compoziţie*

Dacă M este o mulţime nevidă, se spune că este definită o *lege de compoziţie* pe M (sau o *operaţie algebrică*) dacă oricărei perechi (x, y) de elemente din M îi corespunde un element bine determinat din M; cu alte cuvinte este definită o aplicaţie

$$\varphi: M \times M \to M.$$

Uneori se notează $x * y = \varphi(x, y)$ şi se spune că operaţia este notată cu eticheta $*$.

Exemple. Adunarea şi înmulţirea sînt legi de compoziţie pe $\mathbf{R}$. În mod similar, adunarea şi înmulţirea matricelor din $M_n(\mathbf{R})$.

O operaţie $*$ pe o mulţime M se numeşte: *comutativă* dacă pentru orice $x, y \in M$, $x * y = y * x$; *asociativă* dacă pentru orice $x, y, z \in M$, $x * (y * z) = (x * y) * z$; cu *element neutru* dacă există $e \in M$ astfel încît $x * e = x$ şi $e * x = x$, pentru orice $x \in M$. O submulţime $S \subset M$ se numeşte *stabilă* relativ la $*$ dacă pentru orice $u, v \in S$, rezultă $u * v \in S$.

13. *Monoizi, grupuri*

Fie $(M, *)$ o mulţime M împreună cu o operaţie algebrică pe M; se spune că avem un *monoid* dacă operaţia este asociativă şi admite element neutru $e \in M$. Un monoid $(M, *, e)$ se numeşte *grup* dacă pentru orice $x \in M$ există $y \in M$ (numit *inversul* lui x şi notat x^{-1}) astfel că $x * y = e$ şi $y * x = e$; dacă $*$ este în plus comutativă, se spune că grupul este *comutativ* (sau *abelian*).

Dacă $(G, *, e)$ şi $(G', \circ, e')$ sînt două grupuri, atunci o aplicaţie $f: G \to G'$ se numeşte *morfism* de grupuri dacă $\forall\, x, y \in G$, $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ şi $f(e) = e'$; dacă în plus f este bijectivă se spune că f este un *izomorfism*. Două grupuri se zic *izomorfe* dacă între ele poate fi stabilit un izomorfism.

Exemple. 1) $(\mathbf{Z}, +, 0)$, $(\mathbf{R}, +, 0)$ sînt grupuri abeliene; $(M_2(\mathbf{R}), \cdot, I_2)$ este un monoid care nu este grup.

2) $(\mathbf{R}, +, 0)$ şi $((0, \infty), \cdot, 1)$ sînt grupuri izomorfe, deoarece există izomorfismul f: $\mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$.

14. *Inele şi corpuri*

Presupunem că pe o mulţime A sînt fixate două operaţii algebrice, notate $+$ şi $\cdot$ (numite adunare şi înmulţire). Presupunem că $(A, +, 0)$ este un grup abelian şi $(A, \cdot, 1)$ este un monoid; dacă în plus, înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea, atunci se spune că A admite o structură de *inel*. Dacă în plus orice element nenul $x \in A$ admite invers relativ la înmulţire, atunci A se numeşte un *corp*; dacă înmulţirea este comutativă se spune că inelul (sau corpul) este *comutativ*.

Exemple. 1) $\mathbf{Z}$ şi inelul polinoamelor cu coeficienţi reali şi nedeterminata X, $\mathbf{R}[X]$ sînt inele comutative; $M_2(\mathbf{R})$ este un inel necomutativ.

2) $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ sînt corpuri (comutative).

Dacă A, B sînt inele, atunci orice aplicaţie $f: A \to B$ astfel încît $\forall\, x, y \in A$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$ se numeşte *morfism de inele*.

Scanned with OKEN Scanner

15. *Polinoame și ecuații algebrice*

Orice polinom de grad n, $(n \geqslant 1)$ cu coeficienți reali este de forma $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ unde $a_k \in \mathbf{R}$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$ și $a_0 \neq 0$; polinoame de grad 0 sînt constantele. Orice polinom de grad n este determinat prin cei $n+1$ coeficienți ai lui. Mulțimea (inelul) tuturor polinoamelor cu coeficienți reali (de diverse grade) se notează $\mathbf{R}[X]$; în mod similar se definesc inelele $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$, $\mathbf{C}[X]$ și se obțin domenii de integritate ($P \neq 0, Q \neq 0 \Rightarrow P \cdot Q \neq 0$).

Pentru polinoamele cu coeficienți într-un corp comutativ au loc: teorema împărțirii cu rest, teorema lui Bézout („Restul împărțirii unui polinom $P(X)$ prin $X - a$, este $P(a)$“, deci dacă $P(a) = 0$ atunci $P(X)$ este divizibil cu $X - a$) și schema lui Horner.

Un polinom de grad $n \geqslant 1$ cu coeficienți într-un corp comutativ se numește *ireductibil* peste acel corp dacă el nu se descompune în produs de polinoame de grad strict mai mic decît n. Teorema fundamentală a algebrei afirmă că orice polinom de grad $n \geqslant 1$ din $\mathbf{C}[X]$ admite cel puțin o rădăcină complexă. Așadar, polinoamele ireductibile din $\mathbf{C}[X]$ sînt exact cele de gradul 1. Polinoamele ireductibile din $\mathbf{R}[X]$ sînt cele de gradul 1 și cele de gradul doi care au rădăcini complexe nereale.

O rădăcină α a unui polinom $P(X)$ se numește rădăcină *simplă* dacă P este divizibil cu $X - \alpha$, dar nu și cu $(X - \alpha)^2$; α se numește rădăcină *dublă* dacă P este divizibil cu $(X - \alpha)^2$, dar nu și cu $(X - \alpha)^3$ etc. Pentru un polinom cu coeficienți reali $P \in \mathbf{R}[X]$, un număr $\alpha \in \mathbf{R}$ este rădăcină de ordin $k (k \geqslant 1)$ dacă și numai dacă $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0, \ldots, P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, unde $P^{(k)}$ este derivata de ordin k a polinomului $P(X)$.

Sînt binecunoscute relațiile lui Viète, între rădăcinile $x_1, \ldots, x_n$ și coeficienții unui polinom $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n (a_0 \neq 0)$; anume

$$S_1 = x_1 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$S_2 = x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = x_1 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Pentru $n = 2$, $P(X) = a_0X^2 + a_1X + a_2$ avem $S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$, $S_2 = x_1x_2 = \frac{a_2}{a_0}$ deci $x_1^2 + x_2^2 = S_1^2 - 2S_2$, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S_1^3 - 3S_1S_2$, $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{S_1^2 - 4S_2}$ etc.

Pentru $n = 3$, $P(X) = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{a_2}{a_0}$, $S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$. Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{S_2}{S_3}$, $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = S_2^2 - 2S_1S_3$; scriind că x_1, x_2, x_3 sînt efectiv rădăcinile lui P și adunînd relațiile obținute, rezultă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -\frac{a_1}{a_0}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{a_2}{a_0}(x_1 + x_2 + x_3) - \frac{3a_3}{a_0}$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un polinom are coeficienți *reali* și admite rădăcina $\alpha + \beta i$ de ordin k, atunci el admite și rădăcina $\alpha - \beta i$ tot de ordin k. Dacă coeficienții sînt *raționali* și polinomul are rădăcina $\alpha + \sqrt{\beta}$ (cu α, β raționali și $\sqrt{\beta}$ irațional), atunci el are și rădăcina $\alpha - \sqrt{\beta}$.

Dacă $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ și toți coeficienții sînt *întregi*, atunci rădăcinile întregi ale lui P sînt printre divizorii lui a_n.

Exemple. 1) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ dacă $x^4 + 4$ este dvizibil cu $x^2 + mx + n$. [Așadar restul împărțirii lor este nul; rezultă $2mn - m^3 = 0$, $4 - m^2n + n^2 = 0$ deci $(n = 2, m = 2)$ și $(n = 2, m = -2)$].

2) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $P(X) = x^3 + x + 1$. Să se indice un polinom de gradul trei avînd rădăcinile $x_1 - 1$, $x_2 - 1$, $x_3 - 1$ și să se calculeze suma $S = x_1^9 + x_2^9 + x_3^9$.

[Un polinom satisfăcînd condiția cerută este $Q(X) = P(X + 1)$, deoarece $Q(x_k - 1) = P(x_k - 1 + 1) = P(x_k) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant 3$; deci $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 4X + 3$. Deoarece $P(x_1) = 0$ rezultă $x_1^3 + x_1 - 1 = 0$ deci $x_1^9 = (1 - x_1)^3$ și similar pentru x_2, x_3 atunci $S = (1 - x_1)^3 + (1 - x_2)^3 + (1 - x_3)^3 = 3 - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$ și se folosesc relațiile lui Viète].

3) Să se afle $\alpha \in \mathbf{C}$ dacă polinomul $X^3 + X + \alpha$ admite rădăcina $x_1 = 2 + i$ și să se afle celelalte rădăcini ale polinomului.

[Este greșită deducția că $2 - i$ ar fi de asemenea rădăcină, deoarece coeficienții polinomului nu sînt reali. Corect se pune condiția $(2 + i)^3 + 2 + i + \alpha = 0$ de unde se află α iar celelalte rădăcini se află împărțind polinomul cu $X - 2 - i$].

2. GEOMETRIE

GEOMETRIE PLANĂ

1. *Cazurile de congruență ale triunghiurilor.*

Definiție. Două triunghiuri se numesc congruente (I) dacă între vîrfurile lor se poate stabili o corespondență bijectivă, care conduce la a le nota $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, A corespunzînd lui A', B lui B', C lui C', așa încît (II) laturile corespunzătoare și unghiurile corespunzătoare să fie congruente, adică $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. Scriem $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Fiecare din următoarele ipoteze implică faptul că $\triangle ABC$ este congruent cu $\triangle A'B'C'$ (cu corespondența indicată mai sus).

1. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $AB \equiv A'B'$ (cazul 1).
2. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $AB \equiv A'B'$, $CA \equiv C'A'$ (cazul 2).
3. $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$ (cazul 3).

Atenție. În notațiile prezentate, fiecare din cazurile 1 și 2 au încă două variante. De exemplu, cazul 1 are varianta $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$, $BC \equiv B'C'$. Putem imagina și ipotezele:

4. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $BC \equiv B'C'$.

Aceasta implică faptul că $\triangle ABC$ este congruent cu $\triangle A'B'C'$ pe baza teoremei asupra sumei unghiurilor într-un triunghi (vezi punctul 3) cu ajutorul căreia deducem $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ etc.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în plus $\sphericalangle A(\equiv \sphericalangle A') = 90°$ aceasta reprezintă cazul 1 de congruență al triunghiurilor dreptunghice.

5. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $AB \equiv A'B'$; $BC \equiv B'C'$.

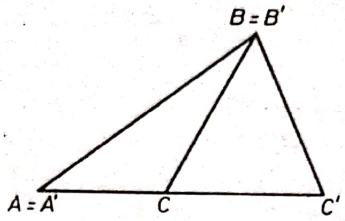


Fig. M.A.2

Aceasta nu implică $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Dar dacă în plus $\sphericalangle A(\equiv \sphericalangle A') \geqslant 90°$ atunci aceasta implică $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Cînd $\sphericalangle A = 90°$ aceasta reprezintă cazul 2 de congruență al triunghiurilor dreptunghice. (4 și 5 au și ele „variante").

6. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$.

În acest caz triunghiurile nu rezultă congruente ci numai asemenea (v. mai jos).

2. *Două drepte paralele d, d' tăiate de o secantă a*

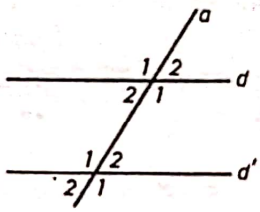


Fig. M.A.3

Se formează 8 unghiuri. Cele 4 unghiuri notate cu *1* sînt congruente. La fel cele 4 unghiuri notate cu *2*. Reciproc, dacă două din unghiurile notate cu *1* sînt congruente, dreptele *d* și *d'* sînt paralele. La fel, dacă două din unghiurile notate cu *2* sînt congruente, avem $d \parallel d'$.

3. *Suma unghiurilor unui poligon*

Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi (evident, $n \geqslant 3$) este $180(n-2)$ grade. Deci într-un triunghi ea este $180°$, într-un patrulater ea este $360°$ etc.

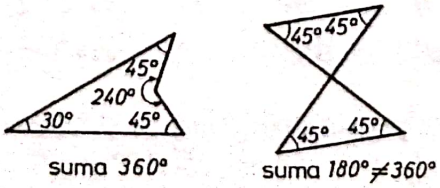


Fig. M.A.4

Afirmația rămîne adevărată și într-un poligon nu neapărat convex, dar fără „autointersecție" (figura M.A.4).

Scanned with OKEN Scanner

4. *Paralelograme*

Într-un patrulater $ABCD$, M fiind intersecția lui AC cu ED, următoarele afirmații sînt echivalente.

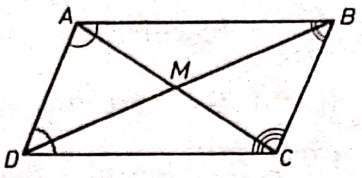


Fig. M.A.5

1. $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$ (definiția paralelogramului).
2. $AB \parallel CD$, $AB \equiv CD$.
3. $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$.
4. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ (este vorba de unghiurile marcate pe figură).
5. $AM \equiv MC$, $BM \equiv MD$.

5. *Dreptunghi*

Într-un *paralelogram* $ABCD$ următoarele afirmații sînt echivalente.
1. $AC \equiv BD$.
2. $\sphericalangle A = 90°$.

În acest caz el se numește dreptunghi.

6. *Romb.*

Într-un paralelogram $ABCD$ următoarele afirmații sînt echivalente.
1. $AC \perp BD$.
2. $AB \equiv BC$.

În acest caz el se numește romb.

7. *Trapez isoscel*

Definiție: Un trapez este un patrulater cu două laturi opuse paralele și celelalte două laturi opuse neparalele.

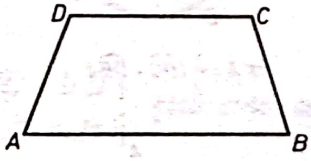


Fig. M.A.6

În trapezul $ABCD$, (cu $AB \parallel CD$), următoarele afirmații sînt echivalente.
1. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$.
2. $AD \equiv BC$.
3. $AC \equiv BD$.

În acest caz trapezul se numește isoscel.

8. *Triunghiuri asemenea. Cazurile de asemănare*

Definiție. Două triunghiuri se numesc asemenea (I) dacă între vîrfurile lor se poate stabili o corespondență bijectivă care conduce la a le nota $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, A corespunzînd lui A', B lui B', C lui C' astfel încît (II) laturile corespunzătoare să fie proporționale și unghiurile corespunzătoare să fie congruente.

Scanned with OKEN Scanner

adică $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$. Scriem $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Fiecare din următoarele ipoteze implică $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

1. $\sphericalangle A \equiv A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ (deci și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$) (cazul 1 de asemănare).
2. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'A'}{CA}$ (cazul 2).
3. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ (cazul 3), precum și
4. $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 90°$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ (cazul 2 pentru triunghiuri dreptunghice).

9. *Cerc*

Definiție. Cercul de centrul O și rază R este mulțimea punctelor M pentru care $MO = R$.

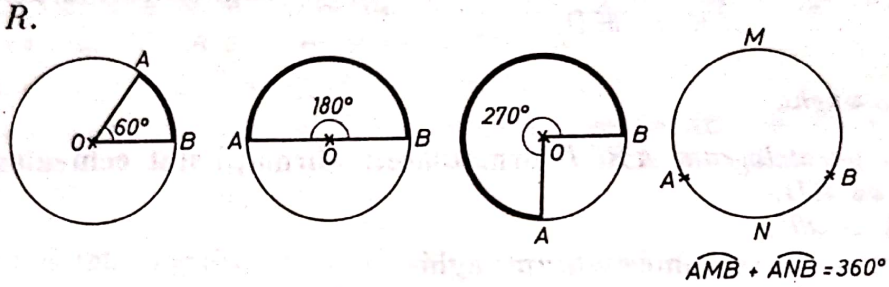


Fig. M.A.7

Măsura unui arc de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător, care poate fi și $> 180°$.

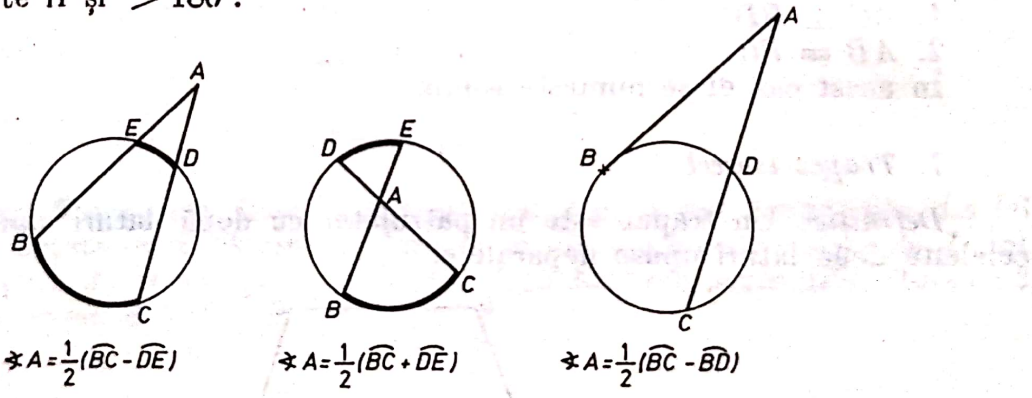


Fig. M.A.8

Măsura unui unghi ale cărei laturi intersectează un cerc dat sau sînt tangente la el este indicată în figura M.A.8.

Scanned with OKEN Scanner

10. *Patrulater inscriptibil*

Într-un patrulater convex $ABCD$ următoarele afirmații sînt echivalente.

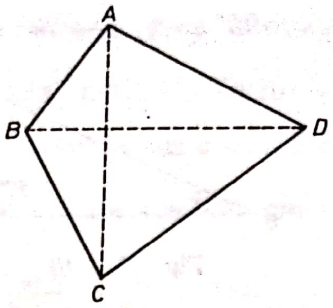


Fig. M.A.9

1. Există un cerc ce trece prin cele 4 puncte A, B, C, D.
2. $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$
3. $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$

(2 și 3 au variante).

În acest caz patrulaterul se numește inscriptibil.

Un paralelogram este inscriptibil atunci și numai atunci cînd este dreptunghi.

11. *Relații între elementele unui triunghi dreptunghic.*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \textit{(teorema lui Pitagora)}$$

$$AB \perp AC$$

$$AD \perp BC$$

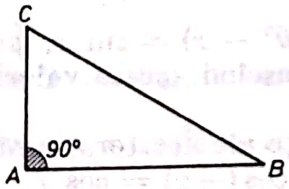


Fig. M.A.10

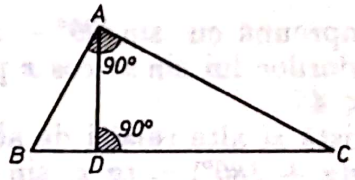


Fig. M.A.11

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &= BC \cdot BD \\ AC^2 &= BC \cdot CD \end{aligned}\right\} \textit{(teorema catetei)}$$

$$AD^2 = BD \cdot DC \quad \textit{(teorema înălțimii)}.$$

$AD \cdot BC = AB \cdot AC$ (de ex.: *exprimarea ariei*). La ele se adaugă, evident, teorema lui Pitagora în $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ADC$. Ele permit, cunoscînd două din cele șase segmente AB, AC, AD, BD, BC, CD din figură, determinarea celor-lalte patru.

12. *Funcțiile trigonometrice pentru unghiuri cuprinse între 0° și 90°*

$$\sin x = \frac{AC}{BC}, \quad \cos x = \frac{AB}{BC}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{AC}{AB}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{AB}{AC},$$

$$\sec x = \frac{BC}{AB}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{BC}{AC}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ și $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1$$
$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0.$$

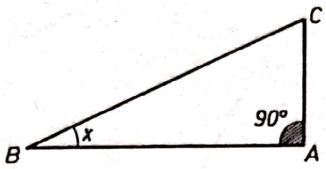


Fig. M.A.12

13. *Aducerea funcțiilor trigonometrice la primul cadran*

$\sin x$ și $\cos x$ sînt definite pentru orice valoare a lui x. Dar $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$, $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$ (altfel spus, sin și cos sînt *funcții periodice* avînd ca perioadă 360°. Aceasta permite determinarea valorilor $\sin x$ și $\cos x$ cunoscîndu-le numai pentru $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$).

Relațiile $\sin(x + 180^\circ) = -\sin x$, $\cos(x + 180^\circ) = -\cos x$, permit apoi același lucru cunoscînd valorile numai pentru $0^\circ \leqslant x \leqslant 180^\circ$.

Relațiile $\sin(180^\circ - x) = \sin x$; $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$; $180^\circ - x = \sphericalangle AOC$, etc. permit apoi aceasta cunoscîndu-le pentru $0^\circ \leqslant x \leqslant 90^\circ$ și în fine toate relațiile

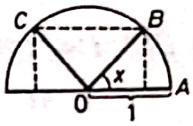


Fig. M.A.13

scrise, împreună cu $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, $\cos(90^\circ - x) = \sin x$, permit determinarea valorilor lui $\sin x$, $\cos x$ pentru orice x cunoscînd aceste valori numai pentru $0^\circ \leqslant x \leqslant 45^\circ$.

Există și alte relații de acest tip, consecințe ale acestora, dintre care menționăm $\operatorname{tg}(x + 180^\circ) = \operatorname{tg} x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.

14. *Relații între valorile funcțiilor trigonometrice ale aceluiași unghi*

Relațiilor de la punctul 12 li se adaugă $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ deci de exemplu, $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

Dacă formulele din punctul 12 permit calculul lui sec x, cosec x, ctg x, tg x cunoscînd $\sin x$ și $\cos x$, formula de aici nu permite aceasta, din cauza lui $\pm$ etc. De exemplu, $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tabel de valori

	sin	cos
0°	0	1
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$

care se completează pe baza formulelor de la punctele 12 și 13.

15. *Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței a două unghiuri*

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Făcînd $b \mapsto -b$ se deduc (vezi ultimele formule de la punctul 13).

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Prin împărțire $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, etc.

Adunînd $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$$

sau, pentru $x = a+b$, $y = a-b$ etc.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

Sînt utile și

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos 3x - 3 \cos x.$$

16. *Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare*

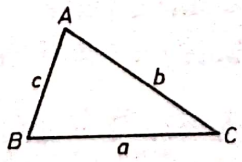


Fig. M.A.14

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ și alte două analoage *(teorema cosinusului)*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ *(teorema sinusurilor)*

$a = b \cos C + c \cos B$ și alte două analoage.

Scanned with OKEN Scanner

17. *Arii*

$$\text{aria } ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$$

și altele patru analoage (figura M.A.15).

$$\text{aria } ABCD = AB \cdot MN \text{ (figura M.A.16).}$$

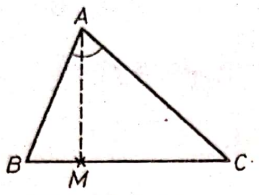


Fig. M.A.15

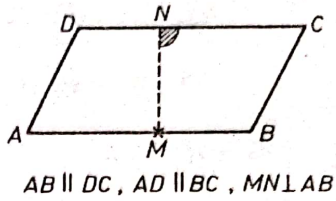


Fig. M.A.16

$$\text{Aria } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \text{ (figura M.A.17).}$$

$$\text{aria } ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot MN \text{ (figura M.A.18).}$$

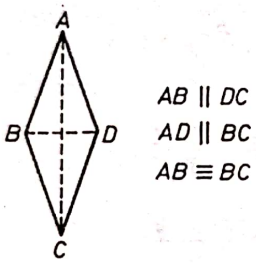


Fig. M.A.17

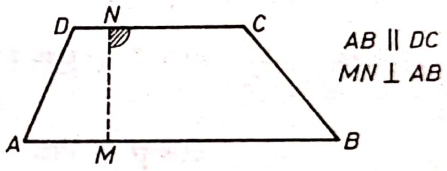


Fig. M.A.18

18. *Grade și radiani*

$$180^\circ \ldots\ldots \pi \text{ radiani}$$

$$1^\circ \ldots\ldots \frac{\pi}{180^\circ} \text{ radiani etc.}$$

Cînd scriem sin x, cos x, tg x etc. obișnuim să considerăm x exprimat în radiani, afară de cazul cînd scriem de exemplu, 30° etc. Deci formulele de la punctul 13 se scriu, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ etc. La fel tabela de valori de la punctul 14:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{etc.}$$

19. *Cele mai simple ecuații trigonometrice*

Cînd x parcurge intervalul închis $[0, 2\pi]$, sin x ia toate valorile din intervalul închis $[-1, 1]$. Valorile -1 și 1 sînt luate o singură dată, iar toate celelalte, deci cele din intervalul deschis $(-1, 1)$, sînt luate fiecare de cîte 2 ori. În plus $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci ecuația $\sin x = a$ se rezolvă astfel:

a) Nu are soluție pentru $|a| > 1$

b) Are soluțiile $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ dacă $a = 1$.

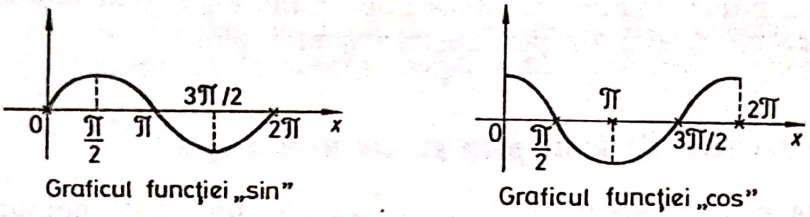
c) Are soluțiile $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ dacă $a = -1$ $\left(\text{sau, totuna } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ldots\right)$.

d) Dacă $|a| < 1$ are ca soluții

$$x = x_0 + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$x = \pi - x_0 + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

unde x_0 este una din soluții.

Aceleași lucruri se pot spune despre $\cos x$.



Graficul funcției „sin" Graficul funcției „cos"

Fig. M.A.19

Deci ecuația $\cos x = a$ se rezolvă astfel:

a) Nu are soluție pentru $|a| > 1$.

b) Are soluțiile $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ pentru $a = 1$.

c) Are soluțiile $x = (2k + 1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ pentru $a = -1$.

d) Dacă $|a| < 1$ are ca soluții

$$x = x_0 + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$x = -x_0 + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

unde x_0 este una din soluții.

Lucrurile sînt deosebite dacă este vorba de $\operatorname{tg} x$. Aici $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, iar $\operatorname{tg} x$, cînd x parcurge $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ia toate valorile reale, fiecare o singură dată. Deci, oricare ar fi a, ecuația $\operatorname{tg} x = a$ are ca soluții $x = x_0 + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, unde x_0 este una din soluții.

20. *Ecuația $a \cos x + b \sin x = c$*

Presupunem $a \neq 0$ și $b \neq 0$, altfel sîntem în cazurile de la punctul 19.

Fie θ astfel ca $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$.

Ecuația devine

$$\cos x + \operatorname{tg} \theta \sin x = \frac{c}{a}$$

$$\cos(x - \theta) = \frac{c}{a} \cos \theta$$

și se reduce la una din ecuațiile de la punctul 19.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția ca ea să aibă soluții este $\left|\frac{c}{a}\cos\theta\right| \leqslant 1$, deci $c^2\cos^2\theta \leqslant a^2$ și, cum $\frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$, $\cos^2\theta = \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1}$, această condiție revine la $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. *Poziții relative a două plane (distincte)*

a) Paralele (n-au nici un punct comun).
b) Secante (au o dreaptă comună).

Ca urmare a axiomelor: „dacă două plane au un punct comun, ele mai au încă cel puțin un punct comun" și „dacă două puncte ale unei drepte aparțin unui plan, toate punctele acelei drepte aparțin acelui plan".

2. *Poziții relative ale unui plan și ale unei drepte*

a) Dreapta este paralelă cu planul (n-au nici un punct comun).
b) Dreapta are exact un punct comun cu planul (secantă la plan).
c) Dreapta este conținută în plan.

3. *Poziții relative a două drepte în spațiu*

a) Necoplanare (în particular n-au puncte comune).
b) Coplanare dar fără puncte comune (caz în care *se numesc* paralele).
c) Concurente (au exact un punct comun și rezultă coplanare).

4. *Poziții relative a trei plane în spațiu (distincte două cîte două)*

a) Paralele între ele (două cîte două).

Este adevărată teorema „două plane paralele cu al treilea sînt paralele între ele".

b) Două dintre ele paralele, al treilea secant cu fiecare din cele două.
c) Două cîte două secante, dar fără a exista un punct comun la cele trei (în acest caz intersecția a oricare două din ele este paralelă cu al treilea plan; există drepte paralele cu toate cele trei plane).

Este adevărată teorema „dacă printr-o dreaptă paralelă cu un plan ducem alt plan secant cu primul, atunci dreapta lor de intersecție este paralelă cu dreapta dată".

d) Au toate trei o dreaptă comună (și aci există drepte paralele cu toate trei).
e) Au exact un punct comun (prin care trec toate cele trei drepte obținute intersectînd aceste plane două cîte două).

5. În legătură cu două plane și o dreaptă are loc teorema „dacă o dreaptă d și un plan α sînt fiecare paralele cu un alt plan β, atunci d este sau conținută în α sau paralelă cu α" (adică d nu poate fi secantă la α).

Scanned with OKEN Scanner

6. În legătură cu un plan și două drepte au loc teoremele:
„un plan secant la o dreaptă este secant la orice paralelă la acea dreaptă“ și
„dacă două drepte concurente sînt fiecare paralele cu un plan, atunci planul determinat de cele două drepte este paralel cu acel plan“.

7. În legătură cu trei drepte are loc teorema:
„două drepte paralele cu a treia sînt paralele sau confundate“.
Relativ la 5, 6, 7 s-ar putea, după modelul 4, enumera pozițiile relative a două plane și o dreaptă, etc. Cele patru teoreme elimină unele posibilități, pe lîngă altele evident imposibile.
(de exemplu, dacă la 5 dreapta este conținută în ambele plane acestea nu pot fi paralele etc.).

8. *Unghiuri între drepte și plane*

Definiție. a) Prin unghiul a două drepte din spațiu se înțelege unghiul ce-l formează cele două paralele la aceste drepte duse printr-un punct oarecare din spațiu.

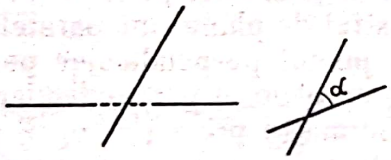


Fig. M.A.20

b) Prin unghiul a două plane secante se înțelege unghiul format de cele două perpendiculare pe dreapta de intersecție a celor două plane duse printr-un punct al acestei drepte, respectiv în cele două plane.

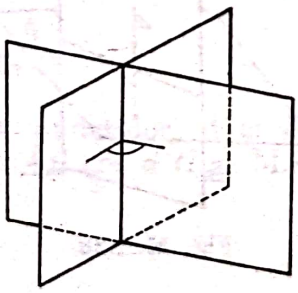


Fig. M.A.21

Unghiul a două plane paralele va fi considerat drept $0°$.
Observație. Două drepte concurente formează patru unghiuri două cîte 2 congruente, unul $\leqslant 90°$ celălalt $\geqslant 90°$ (fig. M.A.22).

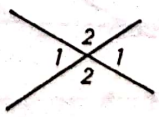


Fig. M.A.22

Deci pentru a fi preciși, în definițiile a) și b) va trebui să considerăm unghiul dintre două drepte, ca și dintre două plane cu valoarea în intervalul închis $[0°, 90°]$.

Dacă vom da definiţii analoage pentru unghiul a 2 semidrepte, respectiv pentru unghiul a 2 semiplane cu frontieră comună (unghiul diedru) atunci el va fi în intervalul închis [0, 180°].

Corectitudinea definiţiei rezultă din teorema „două unghiuri în spaţiu cu laturile respective paralele şi de aceleaşi sensuri sînt congruente".

Definiţie. Prin unghiul dintre o dreaptă şi un plan se înţelege cel mai mic dintre toate unghiurile formate de acea dreaptă cu dreptele conţinute în acel plan.

9. *Dreapta perpendiculară pe plan.*

Teoremă. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe două drepte concurente, atunci ea este perpendiculară pe orice dreaptă conţinută în planul α determinat de cele două drepte (şi deci unghiul dintre d şi α este 90°, adică d şi α sînt perpendiculare).

Teoremă. a) Fiind dat un plan α, prin orice punct P al spaţiului trece exact o dreaptă perpendiculară pe acel plan. Două astfel de drepte sînt paralele.

Intersecţia dintre perpendiculara din P pe α şi planul α se numeşte proiecţia lui P pe α.

b) Fiind dată o dreaptă d, prin orice punct P al spaţiului trece exact un plan perpendicular pe ea. Două astfel de plane sînt paralele.

Intersecţia dintre d şi planul perpendicular pe d ce trece prin P este tot una (dacă P nu se află pe d) cu piciorul perpendicularei din P pe d dusă în planul determinat de P şi d şi se numeşte proiecţia lui P pe d.

c) Dacă un plan α conţine o dreaptă d perpendiculară pe alt plan β atunci cele două plane sînt perpendiculare.

Proiecţia acelei drepte d pe β este în acest caz redusă la punctul lor de intersecţie.

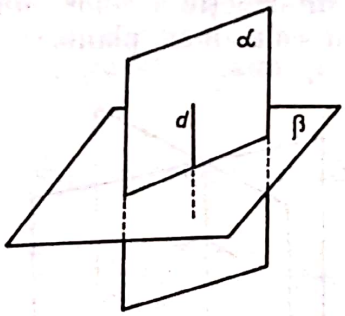


Fig. M.A.23

d) Dacă o dreaptă d nu este perpendiculară pe un plan β atunci există exact un plan α ce conţine d şi este perpendicular pe β.

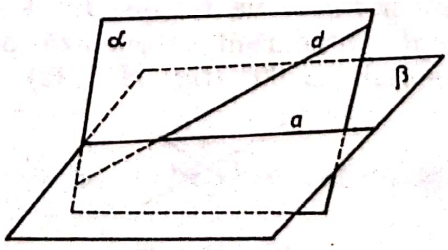


Fig. M.A.24

Dreapta de intersecţie a a lui α cu β este proiecţia lui d pe β.

Unghiul dintre d şi β este egal cu unghiul ascuţit format de d cu a.

Scanned with OKEN Scanner

10. *Teorema celor trei perpendiculare şi reciprocele ei.*

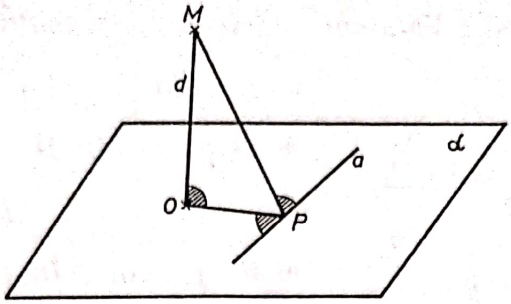


Fig. M.A.25

Ele se referă la situaţia din figura M.A.25.

(O dreaptă d ce intersectează un plan α în O, un punct $M \neq O$ pe d, o dreaptă a conţinută în α ce nu trece prin O, un punct P pe a) şi antrenează următoarele afirmaţii:

1. $OM \perp OP$.
2. $OP \perp a$.
3. $MP \perp a$.
4. $OM \perp a$.

Să observăm că 1 şi 4 împreună afirmă că $d \perp \alpha$, iar 2 şi 3 împreună, la fel 2 şi 4, ca şi 3 şi 4 afirmă că $a \perp$ planul OMP.

Este vorba de următoarele implicaţii:

a) 1, 4, 2 → 3 *(teorema celor 3 perpendiculare)*.

b) 1, 2, 3 → 4 } reciprocele

c) 1, 4, 3 → 2 }

(în schimb implicaţia 2, 3, 4 → 1 este falsă).

11. *Relaţii privind proiecţiile*

a) Fie A', B' proiecţiile punctelor A şi B pe dreapta d şi fie α unghiul dintre AB şi d. Atunci $A'B' = AB \cos \alpha$ (fig. M.A.26).

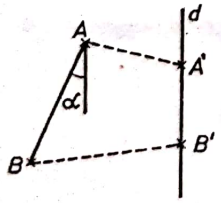


Fig. M.A.26

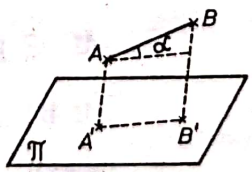


Fig. M.A.27

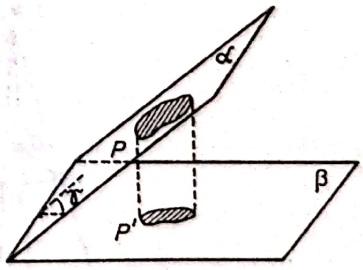


Fig. M.A.28

b) Fie A', B' proiecţiile punctelor A, B pe planul π şi fie α unghiul dintre AB şi π. Atunci $A'B' = AB \cos \alpha$ (fig. M.A.27).

c) Fie P un poligon (sau o figură oarecare) situat în planul α şi P' proiecţia sa pe planul β. Fie γ unghiul dintre planele α şi β. Atunci aria $P' =$ (aria P) $\cos \gamma$ (fig. M.A.28).

Scanned with OKEN Scanner

12. *Volume*

a) Prisma și cilindrul: *Volumul = aria bazei × înălțimea*

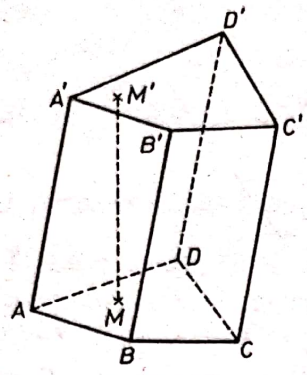


Fig. M.A.29

plan $ABCD \parallel$ plan $A'B'C'D'$.

$M \in$ plan $ABCD$

$M' \in$ plan $A'B'C'D'$

$MM' \perp$ plan $ABCD$

$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$

Înălțimea $= MM'$

Baza $= ABCD$.

Caz particular: paralelipipedul ($ABCD$ = paralelogram)

b) Piramida și conul: *volumul* $= \frac{1}{3} \times$ *aria bazei* $\times$ *înălțimea*

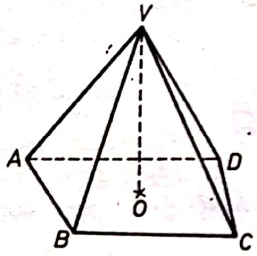


Fig. M.A.30

$VO \perp$ plan $ABCD$

$O \in$ plan $ABCD$

Înălțimea $= VO$

Baza $= ABCD$.

c) Trunchiul de piramidă și trunchiul de con:

$Volumul = \frac{1}{3} \times$ *înălțimea* $\times (S + s + \sqrt{Ss})$

unde S = aria bazei mari

s = aria bazei mici

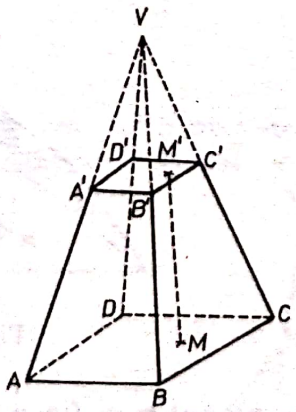


Fig. M.A.31

plan $ABCD \parallel$ plan $A'B'C'D'$

$M \in$ plan $ABCD$

$M' \in$ plan $A'B'C'D'$

$MM' \perp$ plan $ABCD$

$MM' =$ *înălțimea*

$ABCD =$ *baza mare*

$A'B'C'D' =$ *baza mică*.

d) *Sfera* $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, unde R este raza sferei.

Scanned with OKEN Scanner

13. *Arii*

a) Prisma și cilindrul drept
(deci în care $AA' \perp$ plan $ABCD$ — vezi 12.a).

Aria laterală = perimetrul bazei × înălțimea.

b) Piramida regulată și conul circular drept
(deci în care baza este un poligon regulat, iar O este centrul lui — vezi 12.b)

Aria laterală $= \frac{1}{2} \times$ *perimetrul bazei* $\times$ *apotema piramidei*, unde apotema piramidei este (de exemplu) înălțimea din V a triunghiului VAB (vezi 12.b).

c) Trunchiul de piramidă regulată și trunchiul de con circular drept.
(deci în care — vezi 12.c — $VABCD$ este o piramidă regulată).

Aria laterală $= \frac{1}{2} \times$ *(perimetrul bazei mari + perimetrul bazei mici)* $\times$ $\times$ *apotema*, unde apotema este (de exemplu) înălțimea trapezului $BCC'B'$.

d) *Aria sferei* $= 4\pi R^2$, unde R este raza ei.

e) Aria calotei sferice cu înălțimea $I = 2\pi RI$, iar volumul $= \frac{\pi I^2}{3}(3R - I)$.

(Pentru $I = 2R$ se regăsesc formulele pentru sfera întreagă.)

GEOMETRIE ANALITICĂ

1. *Distanța între două puncte*

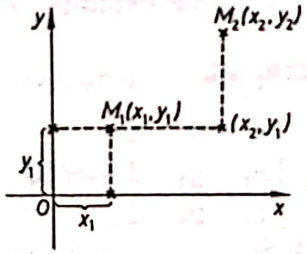


Fig. M.A.32

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. *Semnele coordonatelor în cele 4 cadrane*

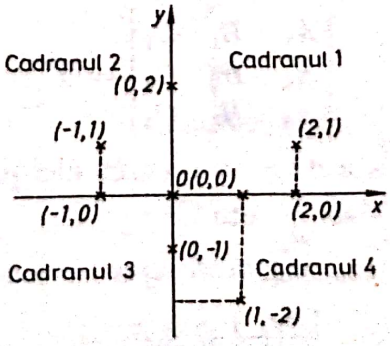


Fig. M.A.33

3. *Ecuații ale dreptei*

a) *Ecuația generală:* $Ax + By + C = 0$ unde se exclude cazul în care

$$A = B = 0.$$

b) *Ecuația dreptei ce trece prin punctul* (x_0, y_0) *și formează unghiul* α *cu direcția* Ox

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha \, (x - x_0)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ se numește *coeficientul unghiular* al dreptei.

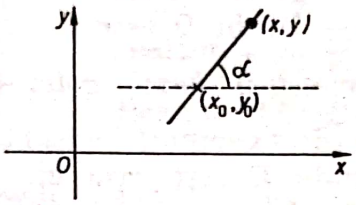


Fig. M.A.34

Dacă $\alpha = 90°$ această ecuație este $x - x_0 = 0$.

c) *Ecuația dreptei ce trece prin două puncte* (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Dacă $x_1 = x_2$ această ecuație este $x - x_1 = 0$, dacă $y_1 = y_2$ ea este $y - y_1 = 0$: cazul $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ se exclude, el conducînd la nedeterminare (punctele coincid).

Sau, sub formă de determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Condiția ca trei drepte*

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

să fie *concurente* este

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

(în ipoteza că printre ele există două ce nu sînt nici paralele, nici confundate, deci cu excepția cazului $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$ etc.).

Distanța de la punctul (x_0, y_0) *la dreapta de ecuație* $Ax + By + C = 0$ este

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. *Ecuația cercului*

a) *Ecuația cercului de centru* (x_0, y_0) *și rază* R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

b). *Ecuația generală* a cercului este

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

în care $A \neq 0$, centrul rezultă de coordonate $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}\right)$ iar pătratul razei este $\frac{1}{4A^2}(B^2 + C^2 - 4AD)$ deci în care $(B^2 + C^2 - 4DA) > 0$ (dacă este $= 0$ ecuația reprezintă un singur punct $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}\right)$, iar dacă este < 0 ecuația reprezintă „mulțimea vidă").

c) *Ecuația cercului ce trece prin punctele* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

în ipoteza că ele sînt necoliniare (v. 3.c etc.).

d) *Ecuația cercului de diametru* $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$.

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

7. *Ecuația tangentei la cerc*

a) *Ecuația tangentei la cercul de ecuație* $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ *în punctul* (x_0, y_0) *de pe cerc*

$$A(xx_0 + yy_0) + \frac{1}{2}B(x + x_0) + \frac{1}{2}C(y + y_0) + D = 0.$$

b) *Ecuația tangentei la cercul de ecuație* $x^2 + y^2 = R^2$, cu *coeficient unghiular* m *dat:* sînt două astfel de tangente

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

8. *Ecuația elipsei raportată la axele sale*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

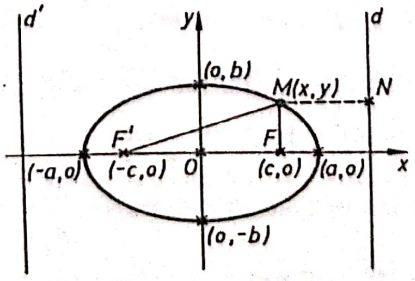


Fig. M.A.35

Focarele $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Avem $MF + MF' = 2a$; *elipsa este locul geometric al punctelor M cu această proprietate.*

Directoarele d, d' sînt de ecuații $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Avem $\frac{MF}{MN} = \frac{c}{a} = \frac{MF'}{MN'}$, unde $MN \perp d$, $MN' \perp d'$ etc.; elipsa este locul geometric al punctelor pentru care are loc una din cele două egalități.

Ecuația tangentei la elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ în punctul (x_0, y_0) *de pe elipsă* este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Ecuațiile tangentelor la elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și cu coeficient unghiular m este

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

9. *Ecuația hiperbolei raportată la axele sale*

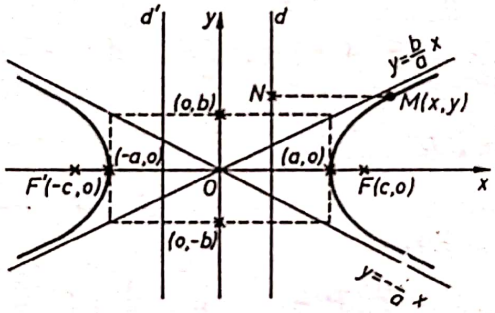


Fig. M.A.36

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cu } a, b > 0.$$

Focarele $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Avem $|MF' - MF| = 2a$; *hiperbola este locul geometric al tuturor punctelor M cu această proprietate.*

Directoarele d, d' sînt de ecuații $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Dacă $MN \perp d$, $MN' \perp d'$ etc., avem $\frac{MF}{MN} = \frac{c}{a} = \frac{MF'}{MN'}$; hiperbola este locul geometric al punctelor pentru care are loc una din cele două egalități.

Asimptotele hiperbolei sînt $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Ecuația tangentei la hiperbola de ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ în punctul (x_0, y_0) *de pe hiperbolă* este $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile de coeficient unghiular m ale tangentelor la hiperbolă, pentru $|m| > \frac{b}{a}$ $\left(\text{pentru } |m| \leqslant \frac{b}{a} \text{ nu există astfel de tangente}\right)$ sînt

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Hiperbola se numește *echilateră* dacă $b = a$, deci $x^2 - y^2 = a^2$. În acest caz *asimptotele* sînt $y = \pm x$ și sînt *perpendiculare*.

Ecuația hiperbolei echilatere raportată la asimptotele sale este

$$xy = k, \quad \text{unde } k = \pm \frac{a^2}{2}.$$

10. *Ecuația parabolei raportată la axă și la tangenta în vîrf*

$$y^2 = 2px$$

(este aceeași curbă ca și cea studiată la algebră).

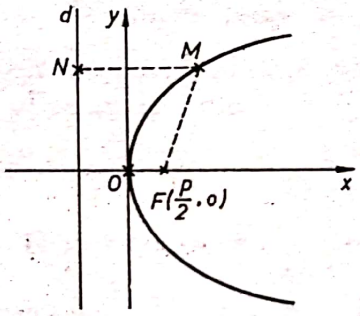


Fig. M.A.37

Punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, se numește *focar*, iar dreapta d de ecuație $x = -\frac{p}{2}$ se zice *directoare*. Dacă $MN \perp d$ avem $MF = MN$; *parabola este locul geometric al punctelor cu această proprietate.*

Ecuația tangentei la parabola de ecuație $y^2 = 2px$ în punctul (x_0, y_0) *de pe parabolă* este $yy_0 = p(x + x_0)$, iar ecuația tangentei de coeficient unghiular m

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

3. ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. *Șiruri de numere reale*

Analiza matematică elementară revine la studiul funcțiilor reale de o variabilă reală $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$. Pentru vizualizarea comportării unor astfel de funcții se consideră graficele lor $(G_f \subset D \times \mathbf{R}, G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\})$. În probleme legate de conceptul de limită sînt utile funcții de un tip particular, anume șirurile de numere reale $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$; notînd $a_n = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, un astfel de șir se notează $(a_n)_{n \geqslant 0}$.

Un șir $(a_n)_{n \geqslant 0}$ se numește *mărginit* dacă există $M > 0$, independent de n, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant 0$, $|a_n| \leqslant M$.

Un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ se numește *monoton* dacă diferența $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$ are un semn constant începînd de la un anumit rang; dacă acest semn este pozitiv (respectiv negativ), atunci șirul este monoton crescător (respectiv descrescător). Șirurile care nu sînt monotone se mai numesc *oscilante*.

Presupunem cunoscută noțiunea de *vecinătate* a unui punct $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Se spune că un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ *are limita* l dacă în orice vecinătate a lui l sînt situați toți termenii șirului începînd de la un anumit rang (rang depinzînd de vecinătate); se scrie atunci $a_n \to l$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Șirurile care au limită și aceasta este finită se mai numesc *convergente*.

Pentru rezolvarea problemelor este esențială cunoașterea cîtorva rezultate teoretice:

1) Orice șir convergent este mărginit;

2) Orice șir mărginit și monoton este convergent;

3) Dacă $|a_n - l| \leqslant b_n$ (începînd de la un anumit rang), $l \in \mathbf{R}$ și $b_n \to 0$, atunci $a_n \to l$.

4) Presupunem $a_n \geqslant b_n$ (începînd de la un anumit rang); dacă $b_n \to +\infty$, atunci $a_n \to +\infty$; iar dacă $a_n \to -\infty$, atunci $b_n \to -\infty$.

5) Dacă $a_n \to \infty$ (sau $a_n \to -\infty$), atunci $\frac{1}{a_n} \to 0$.

6) Dacă șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit și dacă $b_n \to 0$, atunci $a_n \cdot b_n \to 0$.

7) Dacă șirurile (a_n), (b_n) au limită și $a_n < b_n$ (începînd de la un anumit rang), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

8) Operațiile cu limite de șiruri.

9) Dacă $|q| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + q + \ldots + q^n) = \frac{1}{1-q}$.

10) Șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$ (numărul lui Euler; $e \simeq 2{,}718$). De asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

Exemple 1) Să se arate că șirul $a_n = \frac{2n+1}{3n-9}$, $n \geqslant 4$ este monoton, mărginit și că $a_n \to \frac{2}{3}$.

Să observăm că $\Delta_n = a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)-9} - \frac{2n+1}{3n-9} = -\frac{21}{(3n-6)(3n-9)} < 0$, pentru $n \geqslant 4$ deci șirul $(a_n)_{n\geq 4}$ este monoton descrescător; scriind cîțiva termeni, rezultă $a_4 = 3$, $a_5 = \frac{11}{6}$; $a_6 = \frac{13}{9}$, $\ldots$ $a_{100} = \frac{201}{291}$ etc. Ni se sugerează că $a_n > \frac{2}{3}$ pentru orice $n \geqslant 4$, ceea ce se verifică direct. Așadar, șirul este mărginit, deoarece $\frac{2}{3} < a_n \leqslant a_4 = 3$ deci $|a_n| \leqslant 3$ pentru orice $n \geqslant 4$.

Faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$, rezultă observînd că $\left|a_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{7}{3n-9}\right| \leqslant \frac{7}{n}$ pentru orice $n > 4$, iar $\frac{7}{n} \to 0$.

2) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ unde $a_0 = a > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$. Să se arate că $a_n \to +\infty$.

Mai întîi se observă prin inducție că $a_n > 0$ pentru orice $n \geqslant 0$ și că $\Delta_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n^2} > 0$ deci șirul este monoton crescător. Dacă șirul ar fi

Scanned with OKEN Scanner

mărginit, atunci el ar rezulta convergent deci $a_n \to l$, $l \in \mathbf{R}$. Conform relației din enunț rezultă $l = l + \frac{1}{l^2}$, contradicție. Rezultă deci că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton crescător și nemărginit deci $a_n \to +\infty$.

3) Scriem $x_n \sim y_n$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Astfel, $3n + 4 \sim 3n$, $\sqrt{n + 15} \sim \sqrt{n}$, $n \cdot \sin\frac{1}{n} \sim 1$.

Dacă $P(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k$ $(a_0 \neq 0)$, atunci $P(n) \sim a_0 n^k$, iar dacă $x_n = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \ldots + b_l}$, $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$ atunci $x_n \sim \frac{a_0}{b_0} n^{k-l}$; în particular, dacă $l = k$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$.

Astfel, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{5n^2 + 2n + 1984} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n^2 - 9n + 9}{5n^2 + 2n + 1984} = \frac{9}{5}$.

2. *Limite de funcții*

Să considerăm o funcție $f : D \to \mathbf{R}$. Fie $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D (deci în orice vecinătate a lui α se află puncte din D distincte de α) și fie $l \in \overline{\mathbf{R}}$.

În aceste condiții, se scrie că $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încît pentru orice $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$, să avem $f(x) \in V$. Aceasta este echivalent cu faptul că pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, avem $f(x_n) \to l$.

Presupunem cunoscută definiția limitelor laterale; dacă $f(\alpha - 0)$ există, atunci $f(\alpha - 0) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$; similar $f(\alpha + 0) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)$.

Reamintim cîteva rezultate teoretice:

1) Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$, atunci $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0) = l$ și reciproc, dacă $f(\alpha - 0)$ și $f(\alpha + 0)$ există și sînt egale cu l_1, atunci limita $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ există și este egală cu l_1;

2) Dacă D conține intervalele $(-\infty, -n]$ și $[n, \infty)$ pentru orice n natural suficient de mare și dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = l$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$; pe scurt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{z\to\infty} f(-z)$, punînd $x = -z$.

3) *Asimptotele verticale* ale graficului lui f sînt acele drepte $x = \alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ pentru care cel puțin una din limitele laterale $f(\alpha - 0)$, $f(\alpha + 0)$ este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$.

Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$, atunci $y = l$ este *asimptotă orizontală* spre $+\infty$; dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_1$, atunci $y = l_1$ este *asimptotă orizontală* spre $-\infty$ (l și l_1 finite).

Presupunem că există și sînt finite $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$; atunci $y = mx + n$ este *asimptotă oblică* spre $+\infty$; în mod similar se tratează cazul lui $-\infty$. Un grafic nu poate avea asimptotă orizontală și asimptotă oblică de aceeași parte.

4) Operațiile cu limite de funcții.

5) Cîteva limite remarcabile:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ pentru orice funcție elementară f și pentru orice punct α din domeniul ei de definiție;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)=\lim\limits_{x\to\infty}a_0x^n=\begin{cases}\infty & \text{dacă } a_0>0\\ -\infty & \text{dacă } a_0<0\end{cases}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0 & \text{dacă } n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{dacă } n=m\\ \dfrac{a_0}{b_0}\cdot\infty & \text{dacă } n>m\end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim u^v=e^{\lim v(u-1)}$, $(u\to1,\ v\to\infty)$.

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0)$;

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r(r\in\mathbf{R}).$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\overset{x=-z}{=}\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{-2z+1}{\sqrt{z^2-4z+7}}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z\left(-2+\frac{1}{z}\right)}{z\sqrt{1-\frac{4}{z}+\frac{7}{z^2}}}=$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{z}}{\sqrt{1-\frac{4}{z}+\frac{7}{z^2}}}=\frac{\lim\limits_{z\to\infty}\left(-2+\frac{1}{z}\right)}{\lim\limits_{z\to\infty}\sqrt{1-\frac{4}{z}+\frac{7}{z^2}}}=\frac{-2+\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}}{\sqrt{1-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{4}{z}+\lim\limits_{z\to\infty}\frac{7}{z^2}}}=\frac{-2+0}{\sqrt{1-0+0}}=-2.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2x^2}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\cdot2\sin^2\frac{1}{2x}}=$

$$=e^{-4\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\sin^2\frac{1}{2x}}=\frac{1}{e}.$$

3) Să se determine parametrul real m astfel încît funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} & \text{dacă } x<1\\ m+\ln x & \text{dacă } x\geqslant1\end{cases}$$

să admită limită în punctul $x=1$ [$D=\mathbf{R}$, $\alpha=1$ punct de acumulare pentru D; apoi $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$. Sau făcînd substituţia $x-1=z$, $f(1-0)=$

$=\lim\limits_{\substack{z\to0\\z<0}}\dfrac{\sin\pi(z+1)}{z}=\lim\limits_{\substack{z\to0\\z<0}}\dfrac{\sin(\pi z+\pi)}{z}=-\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin\pi z}{\pi z}\cdot\pi=-\pi$; $f(1+0)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(m+\ln x)=m$. Valoarea cerută este $m=-\pi$].

Scanned with OKEN Scanner

4) Determinăm asimptotele graficului lui $f : R \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x-1}$ [$x = 1$ este asimptotă verticală; nu există asimptote orizontale. Apoi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = 1$ deci $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$; în acest caz, aceeași dreaptă este asimptotă oblică și spre $-\infty$. Aceasta nu se întîmplă în general; de exemplu pentru $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ asimptotele oblice spre $+\infty$ și $-\infty$ sînt distincte].

3. *Continuitate*

Fie o funcție $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$ și $a \in D$.

Reamintim că f este *continuă* în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U a lui a astfel încît pentru orice $x \in U \cap D$ să rezulte $f(x) \in V$.

Dacă a este un punct izolat al lui D, atunci f este evident continuă în a. În caz contrar, a este un punct de acumulare pentru D și continuitatea lui f în a este echivalentă cu faptul că limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ există și este egală cu $f(a)$, și de asemenea echivalentă cu faptul că pentru orice șir $x_n \to a (x_n \in D)$, avem $f(x_n) \to f(a)$.

Reamintim cîteva rezultate teoretice.

1) Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $a \in D$ astfel încît să existe $f(a - 0)$, $f(a + 0)$. Atunci f admite limită în a dacă și numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0)$. De asemenea f este continuă în a dacă și numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$.

2) Orice funcție elementară este continuă în orice interval deschis conținut în domeniul ei de definiție.

3) Dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă, atunci f este mărginită și își atinge efectiv marginile.

4) Pentru orice interval I, orice funcție continuă $f : I \to \mathbf{R}$ are *proprietatea lui Darboux* (pentru orice $x_1 < x_2$ din I și pentru orice număr λ situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există ξ între x_1 și x_2 astfel încît $f(\xi) = \lambda$, adică ecuația $f(x) = \lambda$ admite cel puțin o soluție $\xi \in (x_1, x_2)$).

5) Dacă $f : D \to D'$, $g : D' \to \mathbf{R} (D, D' \subset \mathbf{R})$ sînt funcții continue, atunci $g \circ f$ este continuă pe D; în privința inversării funcțiilor continue, are loc următorul rezultat: fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și $J = f(I)$; dacă f este strict monotonă, atunci $f : I \to J$ este bijectivă și inversa $f^{-1} : J \to I$ este continuă și strict monotonă.

6) Pentru a stabili semnul unei funcții continue $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I se procedează astfel: se determină soluțiile ecuației $f(x) = 0$ situate în I; pe intervalul dintre orice două soluții consecutive semnul lui f este constant (și este suficient de aflat semnul în cîte un punct).

Exemple. 1) Să se determine parametrii reali m, n astfel încît funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1 & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ n \cos \pi x & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$. [Pe intervalul $(-\infty, 1)$ avem $f(x) = mx + 1$, f este elementară deci continuă; apoi pe $(1, \infty)$, $f(x) = n \cos \pi x$ este de asemenea continuă. Rămîne de studiat continuitatea în $x = 1$; condiția este $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1)$, ceea ce revine la $m + 1 = -n$. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$ oricare ar fi perechile de numere reale (m, n) astfel încît $m + n + 1 = 0$].

Scanned with OKEN Scanner

2) Să se arate că ecuația $x \sin x = 2$ admite cel puțin o soluție între 2π și 3π. [Considerăm funcția continuă $\varphi : \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x \sin x - 2$. Deoarece $\varphi(2\pi) = -2 < 0$ și $\varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} \cdot \sin\frac{5\pi}{2} - 2 = \frac{5\pi}{2} - 2 > 0$, rezultă că ecuația $\varphi(x) = 0$ adică $x \sin x = 2$ admite cel puțin o soluție între 2π și $\frac{5\pi}{2}$].

3) Să se rezolve inecuația $x(e^x - e) \ln |x| > 0$. [Pe intervalul $I_1 = (0, \infty)$ inecuația devine $x(e^x - e)\ln x > 0$; membrul stîng este o funcție continuă pe I_1 care se anulează în $x = 1$ și este pozitivă pe $(0, 1)$ și $(1, \infty)$. Apoi pe intervalul $I_2 = (-\infty, 0)$ inecuația devine $x(e^x - e)\ln(-x) > 0$ adică $\ln(-x) > 0$ și $x \in (-\infty, -1)$; în concluzie $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$].

4. *Derivate*

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție reală ($D \subset \mathbf{R}$), $x_0 \in D$ și x_0 punct de acumulare pentru D. Se spune că funcția f *are derivată* în punctul x_0 dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (eventual egală cu $+\infty$ sau $-\infty$) numită *derivată* lui f în x_0 și notată $f'(x_0)$ sau $\frac{df}{dx}(x_0)$. Dacă această limită există și este finită, atunci se spune că f este *derivabilă* în x_0.

Derivatele sînt utilizate în mod curent în fizică și tehnică.

Reamintim cîteva rezultate teoretice mai importante:

1) Dacă f este derivabilă într-un punct, atunci f este continuă în acel punct (reciproca fiind falsă).

2) Dacă $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$ există și sînt egale, atunci f are derivată în x_0.

3) Dacă $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ este continuă și $x_0 \in (a, b)$, atunci f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă graficul lui f admite tangentă (neverticală) în punctul $(x_0, f(x_0))$; în acest caz, ecuația tangentei respective este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

4) Derivatele unor funcții importante fără precizări, subînțelese: $c' = 0$, $(u^r)' = ru^{r-1}\,u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(f + g)' = f' + g'$; $(fg)' = f'g + fg'$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$; $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$; $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$; $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$; $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$; $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$; $(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$.

5) Pentru a determina punctele de extrem și intervalele de creștere sau descreștere ale unei funcții reale derivabile, se recomandă completarea tabloului de variație folosind prima derivată; pentru punctele de inflexiune și intervalele de convexitate sau concavitate, se utilizează în mod corespunzător derivata a doua.

6) *Formula creșterilor finite*: pentru orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, derivabilă pe (a, b) există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$.

În particular, dacă $f(a) = f(b)$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = 0$ (teorema lui Rolle).

Fără a mai intra în detalii, reamintim existența regulii lui l'Hôpital pentru calculul limitelor (combinată cu prelucrarea funcțiilor respective), utilitatea șirului lui Rolle pentru a decide numărul de soluții ale unor ecuații, ca și utilizarea reprezentărilor grafice ale funcțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple. 1) Să se arate că dacă $x \in (0, 1)$, atunci $\ln x \leqslant \frac{1}{ex}$. [Notăm $g(x) = \ln x - \frac{1}{ex}$ și completăm tabloul de variație a funcției $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$; deoarece $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{ex^2} > 0$, rezultă că pentru orice $x \in (0, 1)$ avem $g(x) \leqslant g(1) = \ln 1 - \frac{1}{e} < 0$ deci $\ln x \leqslant \frac{1}{ex}$].

2) Fie $P(x) = x(x-1)\ldots(x-n)$, $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că ecuația $P'(x) = 0$ are toate soluțiile reale și distincte. [P este o funcție polinomială de grad $n+1$ deci P' este de grad n; deoarece rădăcinile lui P sînt $0, 1, \ldots, n$, atunci conform teoremei lui Rolle, polinomul P' va avea n rădăcini distincte $u_1 \in (0, 1)$, $u_2 \in (1, 2)$, $\ldots$, $u_n \in (n-1, n)$].

3) Să se determine toate funcțiile derivabile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f'(x) = 3x \mid x \mid$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. [Dacă $x < 0$, atunci $f'(x) = -3x^2$ iar dacă $x \geqslant 0$, $f'(x) = 3x^2$. Deci în mod necesar $f(x) = \begin{cases} -x^3 + C_1 \text{ dacă } x < 0, \\ x^3 + C_2 \text{ dacă } x \geqslant 0, \end{cases}$ cu C_1, C_2 constante; deoarece f este derivabilă, rezultă că este continuă și ca atare $C_1 = C_2 (= C)$; așadar, $f(x) = x^2 \mid x \mid + C$.]

5. *Primitive și integrale nedefinite*

Dacă I este un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție, reamintim că prin *primitivă a lui f pe I* se înțelege o funcție $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă pe I și astfel încît $F' = f$.

De exemplu, pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$, o primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$ este $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \sin x$. Se poate arăta că orice funcție continuă pe un interval admite primitivă pe acel interval. Nu orice funcție $f : I \to \mathbf{R}$ admite primitivă; o condiție necesară este ca f să aibă proprietatea lui Darboux pe I (deoarece dacă f admite primitivă, atunci f este o derivată și ca atare are proprietatea Darboux).

Dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ admite primitiva F pe I atunci mulțimea tuturor primitivelor lui f este $F + C$ (cu C constantă arbitrară, privită ca o funcție constantă pe I) și aceasta se notează $\int f(x)\mathrm{d}x$, fiind numită *integrala nedefinită* a lui f.

Pentru calculul explicit al primitivelor (adică exprimarea prin funcții elementare), posibil doar în unele cazuri, sînt recomandate următoarele metode: folosirea tabloului de primitive (prezentat în manuale), integrarea prin părți și schimbarea de variabilă. Nu intrăm în detalii și reamintim doar că dacă $f, g : I \to \mathbf{R}$ sînt derivabile, cu derivata continuă, atunci

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x$$

(sau cu notația diferențială $\int f\mathrm{d}g = fg - \int g\mathrm{d}f$).

Exemple. 1) Calculăm $\int \left(x^2\sqrt{x} + \sin 3x + \mathrm{e}^{-5x} + \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x$ pe intervalul $I = (0, \infty)$. Aplicînd liniaritatea și folosind direct tabloul, rezultă că integrala nedefinită respectivă este $\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{5} + \ln \mid x+1 \mid + C$, cu C constantă arbitrară.

Scanned with OKEN Scanner

2) Integralele nedefinite de forma $\int P(x)\sin \alpha x\,dx$, $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx$, $\int P(x)\cos \alpha x dx$ (cu P funcție polinomială și $\alpha \in \mathbf{R}$) se calculează prin părți, notînd $f = P$, integrala din membrul doi fiind de aceeași formă dar cu P înlocuit cu un polinom de grad mai mic. De exemplu,

$$\int (x+5)\cdot e^x\,dx = (x+5)e^x - \int e^x\,dx = (x+4)e^x + C,$$

unde s-a considerat $x+5 = f$ și $e^x = g'$

3) Integralele de forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ cu P, Q polinomiale se mai numesc integrale din funcții raționale. Dacă gr $P \geqslant$ gr Q, atunci $P = Q\cdot C + R$ cu gr $R <$ gr Q deci $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ și $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)dx + \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$. Așadar, se poate presupune de la început că gr $P <$ gr Q și atunci se recomandă descompunerea în fracții simple, sugerate de rădăcinile lui Q. De exemplu,

$$\int \frac{x+\alpha}{x+\beta}\,dx = \int \frac{x+\beta+\alpha-\beta}{x+\beta}\,dx = \int\left(1+\frac{\alpha-\beta}{x+\beta}\right)dx = x + (\alpha-\beta)\ln|x+\beta| + C;$$

$$\int \frac{x^3+x^2-7}{x+5}\,dx = \int\left(x^2-4x+20-\frac{107}{x+5}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 20x - 107\ln|x+5| + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{A(t-\alpha)+B}{t^2+\beta^2}\,dt = \int\left(\frac{At}{t^2+\beta^2} + \frac{B-A\alpha}{t^2+\beta^2}\right)dt =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+\beta^2) + \frac{B-A\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta} = \frac{A}{2}\ln[(x+\alpha)^2+\beta^2] + \frac{B-A\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x+\alpha}{\beta} \text{ etc., unde s-a notat } x+\alpha = t$$

6. *Integrale definite*

Dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită, atunci pentru orice diviziune $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a intervalului $[a, b]$ și pentru orice puncte intermediare $\xi_1 \in (a, x_1)$, $\xi_2 \in (x_1, x_2)$, ..., $\xi_n \in (x_{n-1}, b)$ se poate forma suma Riemann $\sigma_\Delta(f;\ \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Se spune că funcția f este *integrabilă Riemann* dacă există un număr real I, numit *integrala* lui f pe intervalul compact $[a, b]$ și notat $I = \int_a^b f(x)dx$, astfel încît să fie îndeplinită următoarea condiție: pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $\delta > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu norma cel mult δ și oricare ar fi punctele ξ_i intermediare, să avem $|\sigma_\Delta(f;\ \xi) - I| < \varepsilon$.

Se știe că funcțiile continue pe porțiuni și funcțiile monotone (pe un interval compact) sînt integrabile. Se cunosc de asemenea proprietățile principale ale integralelor definite — liniaritatea, monotonia, aditivitatea și proprietatea de medie.

Pentru calculul explicit al integralelor definite, se poate folosi formula Leibniz-Newton: dacă $f:[a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă oarecare a lui f pe intervalul $[a, b]$.

Scanned with OKEN Scanner

În calculele aproximative, se poate folosi definiția, aproximînd integrala cu o sumă Riemann corespunzătoare unei diviziuni echidistante, suficient de deasă, cu o alegere convenabilă a punctelor intermediare.

Exemple.

1) $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x} + \cos \pi x + \frac{1}{3x+5}\right) dx = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{\sin \pi x}{\pi} + \frac{1}{3} \ln |3x+5| \right) \Bigg|_1^2 =$

$= \frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2} - 1) + \frac{1}{3} \ln \frac{11}{8}$.

2) $\int_0^2 \frac{e^x}{x^4+1} dx \simeq \sigma_\Delta (f; \xi)$. Alegînd de exemplu $\Delta : 0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < 2$;

$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = \frac{1}{2}, \ \xi_3 = 1, \ \xi_4 = \frac{3}{2}$, rezultă $\sigma_\Delta (f, \ \xi) = \frac{e^0}{0^4+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4+1} \cdot \frac{1}{2} +$

$+ \frac{e^1}{1^4+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^4+1} \cdot \frac{1}{2}$ etc.

Pentru calculul integralelor definite se pot aplica regulile de integrare prin părți și schimbare de variabilă:

— dacă $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile cu derivata continuă, atunci

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx;$$

— dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă și $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ este o funcție derivabilă cu derivata continuă astfel încît $\varphi(c) = a, \ \varphi(d) = b$, atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt; \text{ unde s-a notat } x = \varphi(t);$$

— dacă $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este strict monotonă, derivabilă cu derivata continuă și dacă $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$ (sau $\varphi(\alpha) = b, \ \varphi(\beta) = a$), atunci pentru orice funcție integrabilă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, avem

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Exemple. 1) $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2+1}{4}$.

2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt =$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$, unde s-a notat $x = \sin t$.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int_1^0 (1-t^2) \cdot t^2(-dt) = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = \frac{2}{15}$, unde s-a notat $\cos x = t$.

Scanned with OKEN Scanner

Reamintim în fine că dacă $[-a, a]$ este un interval simetric și dacă $f:[-a, a]\to\mathbf{R}$ este o funcție integrabilă pară (respectiv impară), atunci

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \text{ (respectiv } \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0).$$

7. *Aplicații ale integralelor definite*

Dacă $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ este o funcție continuă și pozitivă (graficul deasupra axei Ox), atunci se poate considera submulțimea următoare a lui $\mathbf{R}^2$:

$$\Gamma_f = \{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

Atunci

1) aria $\Gamma_f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

2) corpul născut prin rotirea lui Γ_f în jurul axei Ox are volumul egal cu $\pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$.

3) asimilînd o placă materială omogenă cu o mulțime de tipul Γ_f, centrul G de greutate al plăcii admite coordonatele

$$x = \frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x};\quad y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Astfel de formule se extind pentru mulțimi plane care se pot descompune în mulțimi de tipul Γ_f, folosind aditivitatea integralei.

Exemple.

1) Se consideră placa omogenă definită prin

$$M = \{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant x^2\}.$$

Atunci aria ei este egală cu

$$\text{aria } M = \int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Volumul de rotație născut prin rotația lui M în jurul lui Ox este

$$\text{vol } M = \pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Coordonatele centrului G de greutate al plăcii M sînt

$$x_G = \frac{\int_0^2 x\cdot x^2\mathrm{d}x}{\text{aria } M} = \frac{3}{2};$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\mathrm{d}x}{\text{aria } M} = \frac{6}{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că $G \in M$.

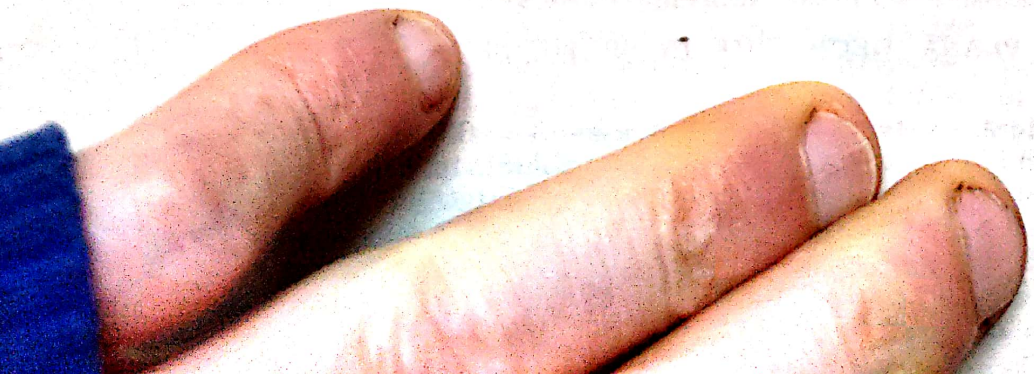
2) Calculăm aria cuprinsă între curbele avînd ecuațiile $y = x^2 - x^4$, $y = \frac{3}{2} \cdot x^3$.

[Punctele de intersecție ale celor două grafice au abscisele date de ecuația $x^2 - x^4 = \frac{3}{2} x^3$, de unde $x_{1,2} = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -2$. Aria cerută este

$$A = \int_{-2}^{1/2} \left(x^2 - x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^3\right) dx,$$

deoarece $x^2 - x^4 \geqslant \frac{3}{2} \cdot x^3$ pentru orice $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Se obține imediat valoarea lui A].

Integralele definite au și alte aplicații geometrice sau fizice.



Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNȚURI
1980

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL ELECTRIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

I.1°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a^x$, unde a este o constantă reală, $a > 0$, $a \neq 1$. Să se arate că $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$.

2°. Să se rezolve sistemul: $2^x + 3^y = 3$, $4^x + 9^y = 5$.

3°. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, astfel încît $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ și fie $a > 0$ un număr fixat. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției f pe fiecare interval $[a + n, a + n + 1]$, $n \geqslant 0$ fiind întreg, să se arate că există un șir $x_n \to \infty$ astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(a).$$

4°. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$, unde

$$a_n = \int_1^n \frac{x - 1}{x + 1}\, dx \quad (n \geqslant 1 \text{ întreg}).$$

5°. Să se reprezinte grafic funcția $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \arccos \frac{x^3 - 3x}{2}$ și să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 1$.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

II.1°. Se consideră un triunghi ABC în care $\hat{A} = 60°$ și unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite. Fie M mijlocul laturii BC și B', C' picioarele înălțimilor duse din B, respectiv din C, pe laturile opuse. Să se arate că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.

2°. Pe un cerc se consideră două puncte A și B, care nu sînt diametral opuse. Tangentele în A și B la cerc se intersectează în punctul C. Prin punctul A se duce paralela la BC, care intersectează din nou cercul în D. Dreapta CD intersectează a doua oară cercul în E. Dreptele AE și BC se intersectează în punctul F. Să se arate că $\widehat{BCE} = \widehat{CAE}$ și că $FC^2 = AF \cdot EF$.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Un tetraedru $VABC$ are baza ABC și lungimea înălțimii dusă din vîrful V egală cu h. La distanțele $\frac{h}{3}$ și $\frac{h}{2}$ de vîrful V se duc plane paralele cu baza, obținîndu-se secțiunile $A'B'C'$ și respectiv $A''B''C''$ în tetraedru. Să se determine raportul volumelor trunchiurilor de piramidă $ABCA''B''C''$ și $A''B''C''A'B'C'$.

4°. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x = \frac{3}{8}$.

5°. Să se demonstreze că un triunghi ABC pentru care $(p-b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ este isoscel.

β. PROFILUL MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

III.1°. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x^2 - x + 9} + 2x - 2x^2 = 3$.

2°. Fie polinomul $P = X^3 - X^2 + 2$. Dacă x_1 este rădăcina reală și x_2, x_3 sînt rădăcinile complexe ale lui P, să se determine un polinom Q de gradul doi cu coeficienți reali astfel încît $Q(x_1) = x_1$, $Q(x_2) = x_3$, $Q(x_3) = x_2$.

3°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{ax+1}{1-x^2} \cdot e^{2x}$, unde a este un parametru real. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 f(x)$ și să se determine a astfel încît $3f'(0) = 11 + f(0)$.

4°. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă } x < 0 \\ e^{-x} & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Să se traseze graficul lui f și să se determine o primitivă a lui f.

5°. Se consideră funcția $f : [0, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2 \arcsin \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x - x^2}$. Să se calculeze integrala

$$I = \int_2^3 \frac{x-2}{x+1} \cdot f'(x) \cdot \sqrt{4x - x^2}\, dx.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

IV.1°. Să se calculeze aria trapezului isoscel circumscris unui cerc de rază R, știind că unghiurile ascuțite ale trapezului sînt de $60°$.

2°. Să se calculeze lungimea bisectoarei interioare a unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC, în funcție de catetele $AB = c$ și $AC = b$ ale acestuia.

3°. Se consideră o prismă dreaptă care are ca bază pătratul $ABCD$, avînd laturile AB, BC, CD și DA și muchiile laterale AA', BB', CC' și DD'. Pe prelungirea laturii DA se consideră un punct I, astfel încît $AI = a$ (A între I și D), iar pe prelungirea lui CB se consideră punctul J, astfel încît $BJ = b$ (B între J și C).

Un plan trecînd prin dreapta IJ intersectează muchiile AA', BB', CC' și DD' respectiv în punctele A_1, B_1, C_1 și D_1. Să se demonstreze că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram și că $\frac{AA_1}{a} = \frac{BB_1}{b}$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $1 + \cos a - i \sin a$, $a \in (0, \pi)$.

5°. Să se rezolve ecuația: $\sin 4x + 3 \sin 2x = 0$.

γ. PROFILUL CHIMIE ȘI METALURGIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

V.1°. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy - x - y = 0 \\ x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

2°. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\log_2(2x - 5)}{\log_2(x^2 - 8)} = \frac{1}{2}.$$

3°. Să se reprezinte graficul funcției $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$.

4°. Să se arate că:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) \text{ pentru orice } x > 0.$$

5°. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 x \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

(numai pentru profilul metalurgie)

VI.1°. Într-un cerc de centru O se consideră un diametru AB și pe segmentul AB se iau punctele M și N, astfel încît $OM = ON$ (O între M și N). Să se arate că oricare două coarde paralele duse prin punctele M și N au aceeași lungime.

2°. Se consideră un pătrat $ABCD$ având lungimea laturii egale cu l. Pe laturile DC și BC se iau punctele E și F respectiv, astfel încît dreptele EF și BD să fie paralele. Să se calculeze lungimea segmentului DE, astfel încît triunghiul AEF să fie echilateral.

3°. Să se rezolve ecuația:

$$2 \sin^2 x + \sin 2x = 0.$$

4°. Se consideră un triunghi OAB astfel încît $OA = AB = a$, $OAB = 90°$. Prin A se duce o semidreaptă în spațiu, perpendiculară pe planul OAB. Pe această semidreaptă se ia un punct C, astfel încît $AC = b$. Să se calculeze aria triunghiului BOC și cosinusul unghiului diedru al planelor AOB și BOC, în funcție de a și b.

5°. Să se calculeze laturile AB și AC ale unui triunghi ABC pentru care $BC = 4$ cm, $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$.

Scanned with OKEN Scanner

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (MATEMATICĂ)

a. ALGEBRĂ

VII.1°. Să se demonstreze că pentru $n \geqslant 10$, $n \in \mathbf{N}$, are loc inegalitatea $2^n > n^3$.

2°. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel ca pentru orice $x \in \mathbf{R}$ să existe inegalitatea

$$(m+1)e^{-2x} + 2(m+1)e^{-x} + m > 0.$$

3°. Să se determine polinomul de grad minim, ale cărui rădăcini sînt toate numerele complexe nenule z pentru care $z^2 = \bar{z}$.

4°. Fie $k \in \mathbf{Q}$ și H mulțimea numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbf{Q}$, care satisfac condiția $a^2 - kb^2 = 1$. Să se determine o valoare strict pozitivă întreagă a lui k astfel încît H să fie o parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu înmulțirea.

5°. Să se arate că numărul real $\log_5 10$ nu este rațional.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

VIII.1°. Se consideră șirul (a_n) definit prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$ pentru $n \geqslant 3$.

Să se demonstreze că:

$a_n = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$ pentru orice $n \geqslant 2$ și să se studieze convergența șirului (a_n).

2°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - e}.$$

Să se cerceteze existența limitelor lui f în punctele $x = 0$ și $x = 1$.

3°. Să se determine numerele reale a, b, c, astfel încît limita

$$\lim_{n \to \infty} n\left(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}\right)$$

să existe și să fie egală cu 1.

4°. Să se determine asimptotele graficului funcției $f : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$.

5°. Se consideră funcția $f : \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(1+tx)\sqrt{1+2tx}}.$$

Să se arate că $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{1+2x} - \frac{\pi}{4}$ pentru orice $x > -\frac{1}{2}$ și să se calculeze aria cuprinsă între axa Ox, dreptele $x = 0$, $x = 1$ și graficul funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

c. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI TRIGONOMETRIE

IX.1°. Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic ABC, suma catetelor este egală cu suma lungimilor diametrilor cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

2°. Să se arate că proiecțiile a două drepte pe un plan paralel cu perpendiculara lor comună sînt paralele; discuție.

3°. Să se arate că pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ există inegalitatea

$$\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x > 2.$$

4°. Într-un plan π se fixează două puncte distincte A și B și se notează cu M mulțimea punctelor din planul π, necoliniare cu A și B. Se consideră funcția $f : M \to M$, care asociază fiecărui punct $P \in M$ ortocentrul $f(P)$ al triunghiului ABP.

a) Să se determine submulțimile de puncte P ale lui M, pentru care $f(P) = A$, respectiv $f(P) = C$, unde C este un punct arbitrar al dreptei AB, diferit de A și B.

b) Se consideră în planul π un cerc dat O, care conține punctele A și B. Să se demonstreze că pentru orice punct $P \in O \cap M$, imaginea sa $f(P)$ aparține cercului O', simetricul cercului O față de dreapta AB. (Se acceptă și soluții analitice).

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

X.1°. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a < 0$, $b < 0$, atunci

$$\frac{a}{b} \geqslant 2 - \frac{b}{a}.$$

2°. Să se rezolve sistemul:

$$8^x - 10\ y = 0$$

$$2^x - 5\ y = 0.$$

3°. Să se determine parametrul real m, astfel încît ecuația $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$, să admită o rădăcină dublă și apoi să se rezolve ecuația.

4°. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1 - x}{x^2}$. Fie $M(a, f(a))$ un punct pe graficul lui f, $(a \notin \{0, 2, 3\})$ și M' punctul în care tangenta la grafic în M intersectează din nou graficul funcției. Să se determine valorile lui a, astfel încît coeficientul unghiular al tangentei în M' la grafic să fie egal cu 3.

5°. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI
1981

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL ELECTRIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XI. 1°. Să se determine parametrii reali m și n dacă ecuația $z^3 + (m-n)z^2 + (2m-3n)z + m + 3n = 0$ admite rădăcina $z = 2$, iar suma celorlalte două rădăcini este nulă; apoi să se rezolve ecuația.

2°. Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$ care satisfac relația $X \cdot P(X-1) = (X-3) \cdot P(X)$.

3°. Să se arate că $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^{12} = 2^{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4°. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \frac{2}{x}$. Să se arate că funcția f este bijectivă și să se calculeze derivata lui f^{-1}.

5°. Să se arate că funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos x, \text{ dacă } x > 0, \end{cases}$$

nu admite primitive.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XII. 1°. Fie un triunghi oarecare ABC având înălțimea AD și ortocentrul H. Să se arate că $HD \cdot AB \cdot AC = AD \cdot BH \cdot CH$.

2°. O dreaptă perpendiculară pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC întîlnește pe AB și AC respectiv în M și N. Cercurile circumscrise triunghiurilor BMC și BNC întîlnesc dreptele AC și AB respectiv în Q și P. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este romb.

3°. Să se găsească raportul dintre volumul conului circumscris unui tetraedru regulat și volumul sferei înscrise în acest tetraedru.

4°. Se consideră patru puncte necoplanare A, B, C, D astfel încît $AB = BC = CD = DA$. Fie M și N respectiv mijloacele segmentelor AC și BD. Să se arate că dreapta MN este perpendiculară pe AC și pe BD.

5°. Să se rezolve ecuația

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

β. PROFILUL MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XIII. 1°. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ dacă rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$ satisfac relația $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$.

2°. Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel ca numărul complex $\frac{1 - i\sqrt{3}}{\alpha + (\alpha+1)i}$ să fie real.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{3n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{3n}}$.

4°. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ două funcţii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) cu $g(x) \neq 0$ şi $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că dacă $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încît $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

5°. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|\sqrt{|x-1|}}{x-1} & \text{dacă } x < 2,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \\ 3 - x & \text{dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$

Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între axa Ox, curba $y = f(x)$ şi dreptele $x = 1$, $x = 3$.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAŢIU ŞI TRIGONOMETRIE

XIV. 1°. Pe un diametru al unui cerc se fixează punctele M, N egal depărtate de centru. Prin M se duce o coardă AB iar prin N se duce o coardă AC. Să se arate că $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2}$ este constantă.

2°. În triunghiul ABC se duc înălţimile BB' şi CC'. O dreaptă oarecare MN unde $M \in AB$, $N \in AC$, trece prin ortocentrul H. Se duc segmentele $MM' \perp BB'$ şi $NN' \perp CC'$, unde $M' \in BB'$, $N' \in CC'$. Să se arate că dreptele $C'M'$ şi $B'N'$ sînt paralele.

3°. O piramidă are vîrful V şi ca bază rombul $ABCD$. Ştiind că diagonalele bazei sînt de 8 cm şi 6 cm şi că se întîlnesc în O, iar înălţimea piramidei este $VO = 4$ cm, să se calculeze volumul şi aria totală a piramidei.

4°. Într-un cub $ABCDEFGH$ se notează cu P mijlocul laturii AB şi cu Q punctul de intersecţie dintre BG şi CF. Să se arate că dreapta HQ este perpendiculară pe planul CFP, iar AG este paralelă cu acest plan.

5°. Să se rezolve ecuaţia

$$\sin 2x + 2 \sin x = \sin \frac{x}{2}.$$

γ. PROFILUL CHIMIE ŞI METALURGIE

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XV. 1°. Ştiind că $\log_{40} 100 = a$, să se exprime $\log_{16} 25$ în funcţie de a.

2°. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a \in G$. Să se arate că aplicaţia $\varphi : G \to G$, $\varphi(x) = a^{-1} \cdot x \cdot a$ este un automorfism al grupului G.

3°. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{ax} \cdot e^{bx} (a, b \in \mathbf{R}$ constante). Să se calculeze derivata de ordinul trei a lui f.

4°. Pe curba $y = \frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ să se determine un punct $P(a, b)$ unde tangenta este paralelă cu coarda care uneşte punctele $A(1, 1)$, $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{1}{x^3 + x^5}\, dx$$

pe un interval compact care nu conține punctul $x = 0$.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE
(numai pentru profilul metalurgie).

XVI 1°. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu unghiurile drepte în A și B, iar O intersecția diagonalelor. Paralela dusă prin O la baze intersectează latura AB în E. Să se arate că EO este bisectoare a unghiului $\widehat{DEC}$.

2°. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură a. Se prelungește latura BC cu segmentul $CD = b$, și latura BA cu segmentul $AE = a + b$. Să se arate că $EC = ED$.

3°. Se consideră un con circular drept circumscris unei sfere de rază R. Să se exprime volumul acestui con în funcție de aria sa totală A și de raza R a sferei.

4°. Știind că $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ ($z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $\theta \in \mathbf{R}$), să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, ($n \in \mathbf{N}$).

5°. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)}{2 \cos^2\alpha \cos^2\beta} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta, \quad (\cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0).$$

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (MATEMATICĂ)

a. ALGEBRA

XVII. 1°. Să se afle numărul prim p știind că rădăcinile ecuației $X^2 - 3X + p = 0$ sînt întregi.

2°. Să se rezolve inegalitatea:

$$\log 2 + \log (4^{x-2} + 9) \leqslant 1 + \log (2^{x-2} + 1).$$

3°. Determinați numerele reale x, y, z care verifică relațiile

$$\begin{cases} 2x = y + \frac{2}{y} \\ 2y = z + \frac{2}{z} \\ 2z = x + \frac{2}{x}. \end{cases}$$

4°. Fie sistemul:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5u = -1 \\ x + 9y + az + u = 3 \\ 5x - 6y + 10z + bu = c \end{cases} \quad (a, b, c \in \mathbf{R}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine a, b, c astfel încît sistemul (S) să aibă rangul 2 şi să fie compatibil. Să se rezolve apoi sistemul (S).

5°. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$", $x * y = xy + 2ax + by$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît legea de compoziţie dată să fie comutativă şi asociativă.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XVIII. 1°. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

2°. Arătaţi că şirurile $(a_n)_{n\geq 2}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, date de $a_n = \left(\frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \ldots + \frac{n^2-2}{n!}\right) + \frac{n+2}{n!}$ şi $b_n = \ln\left(1 - \frac{4}{3^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{4}{5^2}\right) + \ldots + \ln\left(1 - \frac{4}{(2n+1)^2}\right)$ sînt convergente şi să se calculeze limitele lor.

3°. Să se arate că nu există niciun polinom, a cărui restricţie la intervalul $[0,1]$ să fie egală cu funcţia $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, dată de $f(x) = \ln(1+x)$.

4°. Să se reprezinte grafic funcţia $f\colon \mathbf{R}\setminus\{-1, 0\} \to \mathbf{R}$, dată de

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)}.$$

5°. Să se determine numerele supraunitare a şi b, pentru care $a + b = 7$ şi

$$\int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\frac{b-1}{a-1}.$$

c. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAŢIU, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI TRIGONOMETRIE

XIX. 1°. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Paralele prin A şi B la laturile BC şi AD taie dreapta CD în punctele E şi F, iar cercul circumscris patrulaterului în punctele M şi N.

a) Să se arate că $AB^2 = CE \cdot FD$.

b) Să se dovedească proprietatea: patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil.

2°. Fie ABC un triunghi oarecare, avînd toate unghiurile ascuţite. Dacă A', B', C' sînt picioarele înălţimilor din vîrfurile A, B, C, H ortocentrul, iar R raza cercului circumscris, să se arate că $HA' \cos A + HB' \cos B + HC' \cos C = 6R \cos A \cos B \cos C$, $\dfrac{HA}{HA'} + \dfrac{HB}{HB'} + \dfrac{HC}{HC'} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3$.

3°. Se dă cercul (C) cu centrul în punctul $A(2, 3)$ şi raza 1. Se cer ecuaţiile cercurilor tangente la axa Ox şi tangente la cercul (C).

4°. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Fie a, b, c, d lungimile înălţimilor tetraedrului din vîrfurile A, B, C, D. Dacă O este un punct oarecare, interior tetraedrului şi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt distanţele punctului O la feţele BCD, CDA, DBA, ABC să se arate că are loc relaţia

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. ÎNVĂŢĂMÎNTUL ECONOMIC

XX. 1°. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x) = |2x - 1| + 2|x|.$$

2°. Să se demonstreze că pentru n întreg, $n \geqslant 10$, există inegalitatea:

$$2^n > n^3.$$

3°. În $Q[X]$ să se împartă cu rest polinomul:

$$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$$

la

$$X^2 - 3X + 1.$$

4°. Are funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

asimptote? Justificaţi răspunsul.

5°. Să se calculeze:

$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

ENUNŢURI
1982

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL ELECTRIC

a. ALGEBRĂ ŞI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXI. 1°. Se consideră matricea

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Să se caluleze $A^n, (n \in \mathbf{N})$ şi limita fiecărui element al lui A^n pentru $n \to \infty$.

2°. Să se determine valorile parametrului real a astfel încît legea de compoziţie internă pe $\mathbf{R}$ definită prin

$$x * y = a(x + y) - xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

să fie comutativă, asociativă şi apoi să se determine elementul ei neutru.

3°. Să se arate că un polinom $f \in \mathbf{Z}[X]$ nu are rădăcini întregi în cazul cînd numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sînt impare.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se traseze graficul funcției

$$f\colon (0, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{\ln x}{x - 1},$$

apoi să se discute numărul soluțiilor ecuației $f(x) = 1 + m(x - 1)$ după valorile parametrului real m.

5°. Se cer toate primitivele funcției

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXII. 1°. Un triunghi ABC este înscris într-un cerc. Perpendiculara din B pe AB taie cercul în P și pe AC în M. Dreapta CP taie pe AB în N. Să se arate că $AP \perp MN$ și să se determine locul geometric al punctului M dacă baza BC este fixă, iar A descrie cercul.

2°. Într-un semicerc de diametru AB se înscrie un patrulater oarecare $ABCD$. Fie P un punct arbitrar pe CD și Q proiecția sa pe AB. Să se verifice relația

$$QA \cdot QB - PC \cdot PD = PQ^2.$$

3°. Într-un tetraedru regulat cu muchia l se consideră patru sfere având aceeași rază, tangente între ele și tangente la fețele tetraedrului. Să se determine raza sferelor în funcție de l.

4°. Să se arate că în orice triunghi cu lungimile laturilor a, b, c are loc relația $R(b + c) \geqslant a\sqrt{bc}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. În ce caz are loc egalitatea?

5°. Să se rezolve ecuația $z^{n-1} = \bar{z}$ ($z \in \mathbf{C}$, $\bar{z}$ conjugatul lui z și $n \in \mathbf{N}$).

β. PROFILUL MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXIII. 1°. Să se determine parametrii reali a, b și c și să se afle soluțiile ecuațiilor

$$x^4 + ax^2 + bx + 2 = 0,\quad x^3 - 3x + 2c = 0$$

știind că acestea au o rădăcină dublă comună.

2°. Să se demonstreze că pentru orice întreg $n \geqslant 1$, numărul $N = 5^{5n} + 5^{2n-1} + 5^{5n+1}$ este divizibil cu 31.

3°. Să se arate că un grup $(G, \cdot)$ în care $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$ pentru orice $x, y \in G$, este abelian.

4°. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f(x) = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

să admită un punct de extrem situat la distanța 1 de axa Oy. Pentru $a = 3$ să se traseze graficul lui f.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Se consideră funcția

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \ln \frac{|1 - x^2|}{1 + x^2} & \text{dacă } x \notin \{-1, 0, 1\} \\ -2 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui f și să se calculeze integrala

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} f(x)\, dx.$$

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXIV. 1°. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat și $F = |AC| \cap |BD|$. Să se arate că patrulaterul $AFDE$ este un romb și să se calculeze raportul $\frac{|DF|}{|BF|}$.

2°. În triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza BC este fixă, iar vîrful A esti variabil. Se prelungește $|BA|$ cu $|AD| \equiv |BA|$, se unește mijlocul E al lue $|BC|$ cu D și se notează cu M punctul de intersecție dintre dreptele $|ED|$ și $|AC|$. Se cere locul geometric al lui M.

3°. Un tetraedru $OABC$ este tridreptunghic în O. Să se arate că proiecția vîrfului O pe planul bazei ABC este punctul de intersecție al înălțimilor triunghiului ABC. Dacă triunghiul ABC este echilateral și are latura a, să se calculeze volumul tetraedrului $OABC$.

4°. Fie un triunghi ABC în care $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$. Să se arate că dacă $\sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{2}$, atunci $\hat{B} + \hat{C} < 45°$.

5°. Să se determine numerele complexe z astfel încît pentru orice α real și pentru orice întreg $n \geqslant 2$,

$$(\cos \alpha + z \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + z \sin n\alpha.$$

γ. PROFILUL CHIMIE ȘI METALURGIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXV. 1°. Să se determine explicit elementele mulțimii

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x^2 - 5x + 6} \geqslant \sqrt{3 - x}\}.$$

2°. Să se arate că pentru orice $n, k \in \mathbf{N}$, $n \geqslant k \geqslant 1$,

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

3°. Se consideră polinomul $f(X) = X^4 + X^3 + aX + b$. Să se determine constantele reale a, b dacă restul împărțirii lui $f(X + 2)$ cu $X + 1$ este -18, iar restul împărțirii lui $f(X - 2)$ cu $X - 1$ este -12.

4°. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 4x^3$. Se cere să se traseze graficul lui f și să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) + m = 0$ (discuție după $m \in \mathbf{R}$).

5°. Să se determine aria mulțimii mărginite, cuprinse între curbele

$$3y + x^2 - 8x + 7 = 0, \quad y + 1 - \frac{4}{x - 3} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE
(numai pentru profilul metalurgie)

XXVI. 1°. O dreaptă variabilă care trece prin centrul de greutate al unui triunghi ABC intersectează $|AB|$ în Q și $|AC|$ în P. Să se arate că

$$\frac{PC}{PA} + \frac{QB}{QA} = 1.$$

2°. Fie ABC un triunghi, H ortocentrul triunghiului, a lungimea laturii $|BC|$ și A' piciorul înălțimii din A. Să se arate că simetricul lui H față de dreapta BC se află pe cercul circumscris triunghiului ABC și să se verifice relația

$$\overline{A'B} = \frac{a \operatorname{tg} \hat{C}}{\operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}}.$$

3°. Două drepte oarecare duse printr-un punct A din spațiu intersectează sfera de centru O și raza r în punctele M, N și respectiv P, Q. Să se arate că $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AO}^2 - r^2$.

4°. Să se cerceteze care sînt unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC știind că $a = m, b = n, c = m + n - 1$, unde m și n sînt numere întregi mai mari decît 1 (a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului).

5°. Să se discute și să se rezolve ecuația $(2\lambda-1)\cos 2x - 3\cos x + \lambda - 2 = 0$, unde λ este un parametru real.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (MATEMATICĂ)

a. ALGEBRĂ

XXVII. 1°. Să se discute în funcție de parametrul real m natura soluțiilor ecuației

$$x^4 - (m-1)x^3 + mx^2 - (m-1)x + 1 = 0.$$

2°. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea că $n^2 + 2$ este divizibil cu $n + 1$.

3°. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$, atunci restul împărțirii polinomului $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ la $(X-a)(X-b)$ este polinomul $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} X + \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$

4°. Se consideră submulțimea $K \subset \mathbf{R}$ formată din numerele reale de forma $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$.

a) Să se arate că orice element $x \in K$ se poate scrie sub forma $x = a'(m + n\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4})$ unde $a' \in \mathbf{Q}$ și m, n, p sînt întregi care nu au nici un divizor prim comun.

b) Să se arate că dacă $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in K$ și $x = 0$, atunci $a = b = c = 0$.

c) Să se demonstreze că mulțimea K este un corp în raport cu operațiile induse de adunarea și înmulțirea din $\mathbf{R}$.

5°. Polinomul $f(X)$ cu coeficienți întregi are o rădăcină întreagă. Să se arate că pentru orice număr natural n produsul $f(0)\, f(1) \ldots f(n)$ este divizibil cu $(n+1)!$.

Scanned with OKEN Scanner

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXVIII. 1°. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geqslant 2}$, cu termenul general $x_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, pentru $n \geqslant 2$ este convergent și să se calculeze limita sa.

2°. Pentru ce valori ale numărului natural n există limita

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x\cos x - \sin x}{x^n} ?$$

3°. Să se studieze derivabilitatea funcției $|f|$, definită prin $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbf{R}$, știind că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este derivabilă în orice punct din $\mathbf{R}$.
Aplicație: $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

4°. Să se arate că $e^x \geqslant 1 + x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și să se verifice inegalitățile

$$\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

5°. Să se stabilească o formulă de recurență pentru integrala

$$I_n = \int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (n \in \mathbf{N})$$

și apoi să se calculeze valoarea sa.

c. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XXIX. 1°. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CA|$ astfel încît $|AP| = |BQ| = |CR|$. Să se arate că

$$4 \text{ aria } [PQR] \geqslant \text{aria } [ABC].$$

2°. Fie propoziția: „Există un triunghi ABC care nu este isoscel și nici dreptunghic și în care $b + a\sin\hat{C} = c + b\sin\hat{A}$“. Este sau nu adevărată această propoziție? (a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului).

3°. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt două cîte două perpendiculare. Să se arate că cele 6 mijloace ale muchiilor se află pe o aceeași sferă.

4°. Se dau relațiile: $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$, $a^2 + b^2 = 1$. Să se arate că $\sin(x + y) = 2ab$.

5°. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o parabolă dată.

ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

XXX. 1°. Fie ecuațiile:

$$x^2 - (m+3)x + 12m = 0$$
$$y^2 - (m+1)y + m^2 + 11 = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2 și respectiv y_1, y_2. Să se determine valorile parametrului real m pentru care este adevărată relația:

$$\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{y_1 + y_2} \leqslant 2(x_1 + x_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

2°. Să se arate că egalitatea

$$1(x+1)+2(x+2)+\ldots+n(x+n)=\frac{n(n+1)(2n+3x+1)}{6}$$

este adevărată pentru orice număr real x și orice număr natural $n \geqslant 1$.

3°. Se consideră matricea:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Să se arate că:

$$A^n=\begin{bmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

unde

$$a_{n+1}=1+a_n,\quad b_{n+1}=a_n+b_n$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ și apoi să se calculeze A^{100}.

4°. Să se arate că un grup $(G, \cdot)$ cu proprietate $x^2=a$, oricare ar fi $x \in G$, este un grup abelian.

5°. Fie funcția $f:[0, 3] \to [0, 2]$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x}, & x \in [0, 1]\\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (1, 3].\end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă, să se determine f^{-1} și să se calculeze

$$\int_0^3 f^2(x)\,dx.$$

ENUNȚURI
1983

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILUL ELECTRIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXI. 1°. Să se rezolve inecuația $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}}<1$.

2°. Să se arate că dacă x, y, z sînt numere complexe nenule astfel încît $x+y+z=0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, atunci are loc egalitatea $x^6+y^6+z^6=ax^2y^2z^2$, unde a este un număr complex convenabil determinat.

3°. Fie șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$, cu $a_n=\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin nx)^{\frac{1}{x^2}}$. Să se studieze convergența șirului $(b_n)_{n\geqslant 1}$, $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ și în caz de convergență să i se calculeze limita.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, $a > 0$. Să se studieze variația și să se traseze graficul acestei funcții. Să se calculeze $\lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$.

5°. Pe intervalul $G = (-1, 1)$ se definește operația $*$ prin

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}, \quad (\forall)\ x, y \in G.$$

Să se arate:

i) $(G, *)$ este un grup comutativ

ii) Între grupurile $(\mathbf{R}_+, \cdot)$ și $(G, *)$ se poate stabili un izomorfism de forma $f(x) = \frac{ax - 1}{x + 1}$, cu $a \in \mathbf{R}$ convenabil determinat.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXII. 1°. În triunghiul isoscel ABC, $(\overline{AB} = \overline{AC})$ se cunoaște $\overline{BC} = 2a$ și înălțimea din A, $\overline{AD} = b$, $b \geqslant a$. Considerînd punctul $M \in |AC|$, să se determine $x = \overline{AM}$ astfel încît patrulaterul $AMDB$ să fie inscriptibil.

2°. Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in |AB|$, $E \in |AC|$ astfel încît $DE \parallel BC$. Fie punctul $M \in |BC|$. Să se calculeze aria $(ADME)$ în funcție de ariile $S_1 =$ aria (ABC) și $S_2 =$ aria (ADE).

3°. Se dă un triunghi ABC în care mediana $|AA'|$ este perpendiculară pe $|AB|$. Notînd cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului, să se calculeze unghiul A în funcție de b, c și unghiul C în funcție de a, b.

4°. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Să se arate că mijloacele celor șase muchii ale cubului ce nu trec prin nici unul dintre vîrfurile A și C' se află în același plan și sînt vîrfurile unui hexagon regulat.

5°. Să se rezolve ecuația

$$3 \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x + \cos x.$$

β. PROFILUL MECANIC

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXIII. 1°. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}.$$

2°. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geqslant 1}$ cu $a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $b_k = \frac{2k + 1}{k^2(k + 1)^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ iar dacă acest șir este convergent, să i se calculeze limita.

3°. Să se determine valorile maxime și valorile minime ale funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{\frac{(x - 2)^2 + 4}{x^2 + 4}}$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se calculeze $\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$ unde a este un număr real. Notînd cu $I(a)$ rezultatul găsit, să se calculeze $\lim_{a\to\infty} I(a)$.

5°. Pe mulțimea $A=\mathbf{R}\setminus\{1\}$ de numere reale se consideră legea $*$ definită prin $x*y=2xy-2x-2y+c$, unde c este un număr real. Pentru ce valori ale lui c legea $*$ definește pe A o structură de grup abelian?

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

XXXIV. 1°. Fie ABC un triunghi care nu este dreptunghic în A sau B și fie $M\in|AB|$. Perpendiculara în M pe AB intersectează dreptele AC și BC în P respectiv Q. Să se arate că

$$QB^2\cdot IC^2=IP^2\cdot QB^2+MB^2\cdot IC^2,$$

unde I este intersecția dintre perpendiculara în P pe AC și perpendiculara în Q pe BC.

2°. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se calculeze puterea punctului G față de cercul circumscris triunghiului, în funcție de lungimile a, b, c ale laturilor.

3°. Fie triunghiul isoscel ABC în care $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$ și D este piciorul înălțimii din A. Cercul cu centrul în A și rază $\overline{AD}$ intersectează laturile $|AB|$, $|AC|$ în E respectiv F. Rotim figura în jurul dreptei AD. Să se calculeze aria calotei generată de arcul $\overset{\frown}{EDF}$, aria laterală și volumul trunchiului de con generat de trapezul $BCFE$.

4°. Fie pătratul $ABCD$, cu latura a. Pe perpendicularele în A și C pe planul $(ABCD)$, de aceeași parte a planului, se consideră $\overline{AE}=a\sqrt{2}$, $\overline{CF}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Să se calculeze $\overline{BE}$, $\overline{EF}$, măs $\overset{\frown}{BEF}$ și volumul piramidei $FBDE$.

5°. Să se determine măsurile unghiurilor A, B, C ale unui triunghi știind că sînt în progresie aritmetică, în această ordine, și că satisfac relația

$$\cos^2 B=\sin A\sin C.$$

γ. PROFILUL CHIMIE ȘI METALURGIE

a. ALGEBRĂ ȘI ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXV. 1°. Se dau numerele reale a și b, $a\cdot b>0$ și să se determine numerele reale x, y, z astfel încît:

i) x, y, z să fie în progresie geometrică

ii) x, $y+a$, z să fie în progresie aritmetică

iii) x, $y+a$, $z+b$ să fie în progresie geometrică. Caz particular $a=4$, $b=32$.

2°. Pentru ce valori reale ale lui y inecuația

$$x^2\log_2\frac{4(y+1)}{y}+2x\log_2\frac{2y}{y+1}+\log_2\frac{(y+1)^2}{4y^2}>0$$

este satisfăcută pentru orice x real?

Scanned with OKEN Scanner

3°. În mulțimea numerelor complexe $\mathbf{C}$ se definește legea $*$ prin $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2.

i) Să se calculeze $(1 - i) * (1 + i)$ și $i * 2$.

ii) Să se arate că $(\mathbf{C} - \{1\}, *)$ este un grup abelian.

4°. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{4x^3 - 9x^2}{4(x-2)}$ dacă $x \neq 2$, $f(2) = 0$. Să se traseze graficul lui f și să se calculeze $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

5°. Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n = ac + (a + ab)c^2 + (a + ab + ab^2)c^3 + \ldots + (a + ab + \ldots + ab^n)c^{n+1}$ și unde a, b, c sînt numere reale astfel încît: $|c| < 1$, $b \neq 1$ și $|bc| < 1$.

b. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU ȘI TRIGONOMETRIE

(numai pentru profilul metalurgie)

XXXVI. 1°. Fie patrulaterul $ABCD$. Paralela prin B la latura $|AD|$ intersectează diagonala AC în E, iar paralela prin A la latura $|BC|$ intersectează diagonala BD în F. Să se arate că $EF \parallel CD$.

2°. Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC se fixează un punct M. Să se arate că lungimea celui mai mare dintre segmentele $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ este egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente.

3°. Fie două plane perpendiculare p și q, iar A și B două puncte pe intersecția celor două plane. Fie $C \in p$ și $D \in q$ astfel încît măs $\widehat{ABC} = 90°$, măs $\widehat{ADB} = 90°$. Să se arate că triunghiurile CBD și ADC sînt dreptunghice.

4°. Să se determine raza sferei înscrise în tetraedrul regulat de latură a.

5°. Să se arate că, oricare ar fi $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, imaginile pe cercul trigonometric ale soluțiilor ecuației

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} + m\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \cos x$$

sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (MATEMATICĂ)

a. ALGEBRĂ

XXXVII. 1°. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația $x^2 - |x| = mx(x + 1)$ are trei rădăcini reale.

2°. Să se găsească soluțiile reale ale sistemului

$$x + y + z = 6$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 36.$$

3°. În inelul $\mathbf{Z}_4[X]$ să se găsească un polinom $h(X)$ astfel încît

$$(\hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3})h(X) = \hat{1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se găsească toate matricile $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$ care îndeplinesc condiția $A^2 = I$, unde I este matricea

$$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

5°. Fie mulțimea $M = \{0,1\}$. Pe mulțimea A a funcțiilor reale $f : M \to \mathbf{R}$ se definesc legile de compoziție $(f, g) \to f + g$ și $(f, g) \to fg$, unde $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ și $(fg)(i) = f(i)g(i)$, oricare ar fi $i \in M$.

Arătați că mulțimea A devine astfel un inel comutativ în care există divizori ai lui zero.

b. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

XXXVIII. 1°. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^{-x^2}$. Să se arate că derivata de ordinul n a funcției f are forma $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, unde P_n este o funcție polinomială de gradul n.

2°. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} |\ln|x - 4|\,|, \text{ dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]. \\ a \sin 2\pi x + b, \text{ dacă } x \in \left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]. \end{cases}$$

3°. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ definit prin relațiile $x_0 = a > 1$, $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$ este monoton crescător și să se calculeze limita sa.

4°. Să se calculeze $\int_0^2 f(x)dx$, unde $f: [0,2] \to \mathbf{R}$ este definită prin $f(x) = \min\left\{x, \frac{2}{1+x^2}\right\}$.

5°. Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}, & \text{dacă } x < 0 \\ & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

admite primitive și să se calculeze o primitivă a acestei funcții.

c. GEOMETRIE PLANĂ, GEOMETRIE ÎN SPAȚIU, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI TRIGONOMETRIE

XXXIX. 1°. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că bisectoarea unghiului $\hat{A}$ este inclusă în interiorul unghiului format de înălțimea și mediana corespunzătoare vîrfului A.

2°. Fie 1, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 rădăcinile de ordinul șase ale unității. Să se arate că 1, U_1, U_2, U_3, U_4 și U_5 sînt afixele vîrfurilor unui hexagon regulat înscris în cercul de centru O și rază 1.

3°. Să se arate că

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se calculeze volumul paralelipipedului având toate fețele romburi (romboidul) știind că lungimea laturii unuia dintre romburi este de 3 cm, iar un unghi al rombului este de $30°$.

5°. Să se verifice că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ de vîrfuri $A(7,1)$, $B(7,4)$ $C(3,1)$, $A'\left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$ $B'(2,5)$, $C'(2,0)$ sînt congruente. Să se determine izometria J cu proprietatea $J(ABC) = A'B'C'$.

3 ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

XL. 1°. Să se rezolve inecuația:

$$\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2 \log_9 7.$$

2°. Să se determine rangul matricii:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

3°. Să se studieze variația și să se traseze graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = (1 + x)\, e^{-|1-x|}.$$

4°. Să se calculeze:

$$\lim_{a \to -\infty} I(a),$$

unde

$$I(a) = \int_a^0 e^x (2x^2 - 3x)\,dx.$$

5°. Fie G intervalul $(-1, 1)$ și pentru orice $x, y \in G$ se definește operația $*$ prin:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Știind că $(G, *)$ este un grup, iar funcția $f: G \to \mathbf{R}$ se definește prin:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 - t^2},$$

să se arate că f este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbf{R}, +)$.

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

I. 1°. Inegalitatea din enunț se scrie $\frac{1}{2}(a^{x_1}+a^{x_2}) > a^{\frac{x_1+x_2}{2}}$. Ea poate fi adusă la forma $a^{x_1}+a^{x_2}-2a^{\frac{x_1}{2}}\cdot a^{\frac{x_2}{2}}>0$ sau $(a^{\frac{x_1}{2}}-a^{\frac{x_2}{2}})^2>0$, ceea ce este evident dacă $x_1 \neq x_2$.

2°. Notînd $2^x=u$, $3^y=v$ sistemul se scrie $u+v=3$, $u^2+v^2=5$ și are soluțiile $u=1$, $v=2$ au $u=2$, $v=1$. Rezultă $x=0$, $y=\log_3 2$ sau $x=1$, $y=0$.

3°. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $x_k \in (a+k, a+k+1)$ astfel încît $f(a+k+1)-f(a+k)=f'(x_k)$. Luînd $k=0, 1, \ldots, n$ și sumînd obținem $\sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = f(a+n+1)-f(a)$. Deoarece $x_k > a+k$ rezultă că pentru $k\to\infty$, $x_k\to\infty$. Dar $\lim_{n\to\infty} f(a+n+1)=0$ deci, trecînd la limită în egalitatea obținută, rezultă: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f'(x_k) = -f(a)$.

4°. Avem $\int_1^n \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int_1^n dx - 2\int_1^n \frac{dx}{x+1} = n-1-2\ln(n+1)+2\ln 2$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\ln 2-1}{n}-2\frac{\ln(n+1)}{n}\right]=1.$$

5°. Graficul nu are asimptote. Avem $\lim_{x\searrow -2} f(x)=\pi$, $\lim_{x\nearrow 2} f(x)=0$; $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ și $y=f(x)=0$, deci $\frac{x^3-3x}{2}=1$ și $x=-1$, $x=2$. Derivata funcției este

$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} & \text{dacă } x\in(-2,-1)\cup(1,2) \\ \dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} & \text{dacă } x\in(-1,1). \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivata a doua a funcției este

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{3x}{\sqrt{(4-x^2)^5}} & \text{dacă } x \in (-2, -1) \cup (1, 2) \\ \dfrac{3x}{\sqrt{(4-x^2)^5}} & \text{dacă } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Tabloul de variație a funcției arată astfel:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$		$+$	‖	$-$	‖
$f''(x)$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖
$f(x)$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

Graficul are forma:

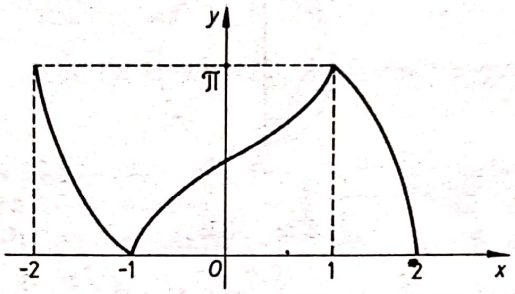


Fig. M.B.1

Aria $= \int_{-1}^{1} \arccos \frac{x^3 - 3x}{2}\, dx$. Integrînd prin părți rezultă:

Aria $= x \arccos \frac{x^3 - 3x}{2} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} \frac{3x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \pi$, după calcule imediate.

II. 1°. În triunghiul dreptunghic $B'BC$, MB' este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $MB' = \frac{BC}{2}$. Analog, din triunghiul dreptunghic $C'CB$ deducem $MC' = \frac{BC}{2}$. Triunghiul dreptunghic $B'BA$ având un unghi de $60°$ rezultă $AB' = \frac{AB}{2}$. Analog, din triunghiul dreptunghic $C'CA$ rezultă $AC' = \frac{AC}{2}$. Triunghiurile $AB'C'$ și ABC sînt asemenea avînd un unghi comun A între laturi proporționale $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{1}{2}$. Rezultă că și laturile $B'C'$ și BC sînt în același raport $\frac{1}{2}$, deci $B'C' = \frac{BC}{2}$. Comparînd rezultatele obținute, deducem că $MB' = MC' = B'C'$, deci triunghiul $MB'C'$ este echilateral.

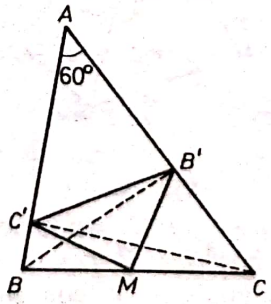


Fig. M.B.2

2°. AD și BC fiind paralele rezultă că $\widehat{BCE} = \widehat{ADE}$ ca alterne interne față de secanta CD. Avem $\widehat{CAE} = \widehat{ADE}$, căci au aceeași măsură (jumătate din arcul $\widehat{AE}$). Rezultă deci că $\widehat{BCE} = \widehat{CAE}$. Triunghiurile AFC și EFC sînt asemenea deoarece au unghiul din F comun și $\widehat{CAF} = \widehat{FCE}$. Scriind proporționalitatea laturilor, rezultă $\frac{AF}{FC} = \frac{FC}{EF} = \frac{CA}{CE}$, de unde $FC^2 = AF \cdot EF$.

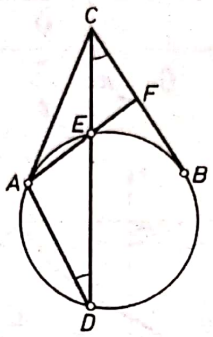


Fig. M.B.3

3°. Notînd cu V volumul tetraedrului $VABC$ și cunoscînd că raportul volumelor a două piramide asemenea este egal cu cubul raportului înălțimilor corespunzătoare, rezultă

Volum $(VA'B'C') = \frac{1}{27} V$ și Volum $(VA''B''C'') = \frac{1}{8} V$. Deducem apoi că Volum $(ABCA''B''C'') = V - \frac{1}{8} V = \frac{7}{8} V$ și Volum $(A''B''C''A'B'C') = \frac{1}{8} V - \frac{1}{27} V = \frac{19}{216} V$. În concluzie raportul cerut este $\frac{7}{8} V : \frac{19}{216} V = \frac{189}{19}$.

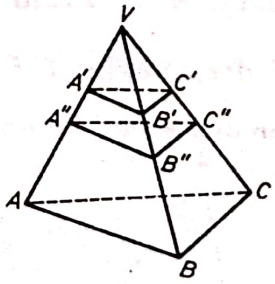


Fig. M.B.4

4°. Înlocuind $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ și $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ în ecuația dată obținem: $\sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) = \frac{3}{8}$, de unde $3\sin x\cos^3 x - 3\sin^3 x\cos x = \frac{3}{8}$. Apoi avem $8\sin x\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1$ sau $4\sin 2x\cos 2x = 1$, deci $\sin 4x = \frac{1}{2}$. Rezultă $4x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, deci în final $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Se cunosc formulele $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ și $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului iar $p=\frac{a+b+c}{2}$. Introducînd în relația dată se obține condiția $(p-b)\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=p\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$, de unde rezultă, după simplificări, $p-b=p-a$, deci $a=b$, adică triunghiul ABC este isoscel.

III. 1°. Ecuația se scrie echivalent $\sqrt{x^2-x+9}=2x^2-2x+3$ și se impun condițiile $x^2-x+9\geqslant 0$ și $2x^2-2x+3\geqslant 0$ cu soluția $x\in\mathbf{R}$. Prin ridicare la pătrat se obține ecuația echivalentă $x^2-x+9=4x^4+4x^2+9-8x^3+12x^2-12x$ sau încă $x(4x^3-8x^2+15x-11)=0$. Ecuația obținută are soluțiile reale $x_1=0$ și $x_2=1$. Împărțind cu $x(x-1)$ se obține cîtul $4x^2-4x+11$, deci celelalte rădăcini sînt date de ecuația $4x^2-4x+11=0$ cu soluțiile $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{10}}{2}\notin\mathbf{R}$. În concluzie, soluțiile reale ale ecuației date sînt $x_1=0$, $x_2=1$.

2°. Polinomul P are rădăcina reală $x_1=-1$. Împărțind P cu $x+1$ se obține cîtul x^2-2x+2 care are rădăcinile $x_{2,3}=1\pm i$. Considerînd $Q=aX^2+bX+c$ cu $a, b, c\in\mathbf{R}$, condițiile din enunț se scriu: $a-b+c=-1$, $a(1+i)^2+b(1+i)+c=1-i$ și $a(1-i)^2+b(1-i)+c=1+i$. Rezultă sistemul: $a-b+c=-1$, $b+c=1$, $2a+b=-1$ cu soluția $a=-\frac{4}{5}$, $b=\frac{3}{5}$ și $c=\frac{2}{5}$, deci polinomul căutat este $Q=-\frac{4}{5}X^2+\frac{3}{5}X+\frac{2}{5}$.

3°. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+ax)}{1-x^2}e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+1}{e^{-2x}}=(-1)\cdot 0=0$. Derivata este

$$f'(x)=\frac{ax^2+2x+a}{(1-x^2)^2}e^{2x}+\frac{ax+1}{1-x^2}\cdot 2e^{2x}.$$

Rezultă $f(0)=1$, $f'(0)=a+2$. Condiția din enunț se scrie $3(a+2)=11+1$, de unde $a=2$.

4°. Funcția f este continuă și derivabilă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, graficul ei obținîndu-se din graficul funcției x^2+x+1 pentru $x<0$, care este o parabolă și din graficul funcției e^{-x} pentru $x\geqslant 0$, care este o exponențială. Avem

$$f'(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{dacă } x<0\\ -e^{-x} & \text{dacă } x>0\end{cases}$$

Dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.
Rezultă tabloul de variație

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Scanned with OKEN Scanner

Graficul are forma:

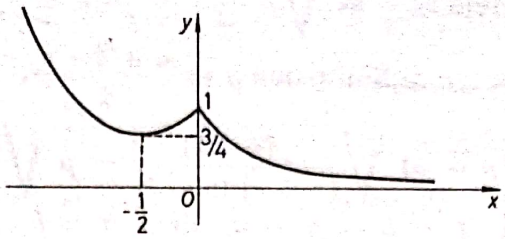


Fig. M.B.5

Deoarece f este definită pe $\mathbf{R}$ și continuă, va admite o primitivă F, care va trebui să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C_1 & \text{pentru } x < 0. \\ -e^{-x} + C_2 & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Condiția de continuitate în origine conduce la $C_1 = -1 + C_2$ și, cu această relație, F rezultă derivabilă și în origine, deci pe $\mathbf{R}$.

5°. Derivata funcției f este $f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} =$

$= \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}}$. Integrala se scrie

$$I = \int_2^3 \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}} \sqrt{4x - x^2}\, dx = \int_2^3 \frac{x(x-2)}{x+1} dx = \int_2^3 \left(x - 3 + \frac{3}{x+1}\right) dx =$$

$$= 3 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}.$$

IV. 1°. Punctele M și N fiind mijloacele bazelor, din triunghiurile dreptunghice OBM și OAN care au fiecare un unghi de $30°$, rezultă că $OA = 2\,AN$, $OB = 2OM = 2R$. Din teorema lui Pitagora rezultă $OA^2 - AN^2 = R^2$, deci $AN = \frac{R}{\sqrt{3}}$ și $AD = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, apoi $OB^2 - BM^2 = R^2$, deci $BM = R\sqrt{3}$ și $BC = 2R\sqrt{3}$. Aria trapezului este $\frac{(BC + AD)MN}{2} = \frac{\left(2R\sqrt{3} + \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)2R}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} R^2$.

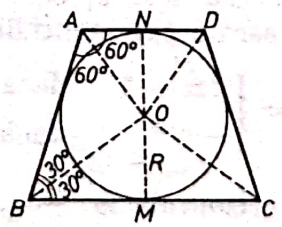


Fig. M.B.6

2°. Din piciorul D al bisectoarei AD ducem $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$. În triunghiurile dreptunghice și isoscele ADE, ADF avem $DE = DF = AD \sin 45° =$ $= AD\frac{\sqrt{2}}{2}$. Putem scrie relația

$$\text{Aria } (ABC) = \text{Aria } (ABD) + \text{Aria } (ACD).$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi avem Aria $(ABD) = \frac{AB \cdot DE}{2} = \frac{c\sqrt{2}}{4} AD$ și Aria $(ACD) = \frac{AC \cdot DF}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{4} AD$, iar Aria $(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{bc}{2}$. Rezultă că

$$\frac{bc}{2} = \frac{c\sqrt{2}}{4} AD + \frac{b\sqrt{2}}{4} AD,$$

de unde obținem că $AD = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$.

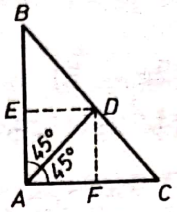


Fig. M.B.7

3°. Fețele laterale ale prismei date fiind plane paralele sînt intersectate de planul ce trece prin IJ după drepte paralele. Deci $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ și $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, adică $A_1B_1C_1D_1$ este un paralelogram. Triunghiurile IAA_1 și JBB_1 avînd laturile paralele ($AA_1 \parallel BB_1$ ca muchii ale prismei date, $AI \parallel BJ$ ca laturi opuse ale pătratului bază; $IA_1 \parallel JB_1$ ca laturi opuse ale paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$) sînt asemenea, deci $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{IA}{JB}$ sau $\frac{AA_1}{a} = \frac{BB_1}{b}$.

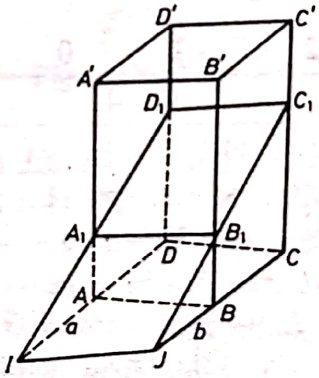


Fig. M.B.8

4°. Se știe că $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$ și $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$, deci numărul complex se poate scrie astfel: $1 + \cos a - i \sin a = 2\cos^2 \frac{a}{2} - i\, 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} =$
$= 2\cos \frac{a}{2}\left(\cos \frac{a}{2} - i \sin \frac{a}{2}\right) = 2\cos \frac{a}{2}\left[\cos\left(-\frac{a}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{a}{2}\right)\right] = 2\cos \frac{a}{2}\left[\cos\left(2\pi - \frac{a}{2}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{a}{2}\right)\right]$, care este forma trigonometrică a sa, deoarece $a \in (0, \pi)$ implică $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\rho = 2 \cos \frac{a}{2} > 0$ și $\vartheta = 2\pi - \frac{a}{2} \in (0, 2\pi)$.

5°. Putem scrie $\sin 4x + 3 \sin 2x = 2 \sin 2x \cos 2x + 3 \sin 2x$, deci ecuația este echivalentă cu $\sin 2x(2 \cos 2x + 3) = 0$, de unde obținem $\sin 2x = 0$ sau

$2\cos 2x + 3 = 0$. Ecuația $2\cos 2x + 3 = 0$ nu are soluții, deoarece $\cos 2x = -\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$. Din $\sin 2x = 0$ rezultă $2x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, deci soluțiile ecuației sînt $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

V. 1°. Din prima ecuație rezultă $y = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$. Înlocuind în ecuația a doua obținem $x^2 \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2} - 2x^2 - 2\frac{x^2}{(x-1)^2} = 0$, sau $-x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$, deci $x^2(x-2)^2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 2$. Lor le corespund $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = y_4 = 2$.

2°. Condițiile ce se impun $(2x - 5) > 0$, $x^2 - 8 > 0$, $\log_2(x^2 - 8) \neq 0$ conduc la $x > \frac{5}{2}$, $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$, $x \notin \{-3, 3\}$, din care se deduce că $x \in (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, +\infty)$. Ecuația este echivalentă cu $2\log_2(2x-5) = \log_2(x^2 - 8)$, deci cu $(2x-5)^2 = x^2 - 8$ sau $3x^2 - 20x + 33 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{11}{3}$. Singura rădăcină acceptabilă este $x = \frac{11}{3}$.

3°. Avem că $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$, deci $x = 1$ este asimptotă verticală, și că $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, deci $y = 1$ este asimptotă orizontală. Apoi $f(x) = 0$ pentru $x = -1$ și $f(0) = 1$. Derivata întîia este $f'(x) = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$ și derivata a doua este $f''(x) = \frac{8(x+2)}{(x-1)^4}$. Rezultă tabloul de variație

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/9$ (i)	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$ $\searrow$	1

și graficul corespunzător:

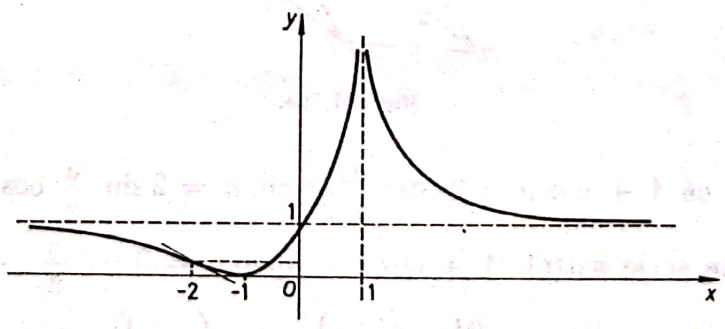


Fig. M.B.9

Punctul $(-1, 0)$ este punct de minim, iar $(-2, 1/9)$ este punct de inflexiune.

4°. Notînd $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, pentru $x \in [0, \infty)$ avem $f(0) = 0$ și $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$.

Pentru $x > 0$ avem $f'(x) > 0$, deci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = 0$ rezultă că pentru $x > 0$, $f(x) > 0$, deci $\ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x} > 0$, adică $\ln(1 + x) > \frac{x}{1 + x}$.

5°. Făcînd schimbarea de variabilă $t = \varphi(x) = 1 - x^2$ avem $\varphi'(x) = -2x$, deci putem scrie

$$I = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3},$$ unde am ținut seamă de faptul că pentru $x = 0$, $t = 1$ și pentru $x = 1$, $t = 0$.

VI. 1°. Se duce perpendiculara PQ din centrul cercului pe cele două drepte. Triunghiurile OMP și OQN sînt egale ($OM = ON$ prin ipoteză, unghiurile din O sînt egale ca opuse la vîrf, iar $\widehat{OMP} = \widehat{ONQ}$ ca alterne interne), deci segmentele OP și OQ sînt egale. Coardele CD și EF sînt egale fiind egal depărtate de centrul O al cercului.

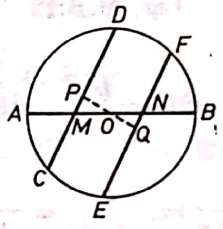


Fig. M.B.10

2°. Notînd $DE = x$, rezultă $EC = l - x$ și, cum $CF = CE$ și $FB = ED$, rezultă $CF = l - x$ și $FB = x$. Atunci $EF = (l - x)\sqrt{2}$ și $AE = AF = \sqrt{x^2 + l^2}$. Condiția ca triunghiul AEF să fie echilateral este $AE = EF$ sau $(l - x)\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + l^2}$. Obținem ecuația $2(l - x)^2 = x^2 + l^2$, care se mai scrie $x^2 - 4lx + l^2 = 0$, cu rădăcinile $x_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3})\,l$. Deoarece punctul E se află pe segmentul DC avem condiția $x \in [0, l)$, deci soluția problemei este $DE = x = (2 - \sqrt{3})\,l$.

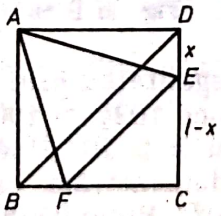


Fig. M.B.11

3°. Putem scrie $2\sin^2 x + \sin 2x = 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x$, deci ecuația se scrie echivalent $2\sin x(\sin x + \cos x) = 0$, de unde $\sin x = 0$ sau $\sin x + \cos x = 0$. Din $\sin x = 0$ obținem soluțiile $x = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Din $\sin x + \cos x = 0$ rezultă $\operatorname{tg} x = -1$, de unde avem soluțiile $x = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Fie D piciorul perpendicularei din C pe OB. Triunghiul COB fiind isoscel $(CO = CB = \sqrt{a^2+b^2})$, D este la mijlocul laturii OB, iar în baza teoremei celor trei perpendiculare, $AD \perp OB$. Rezultă:

$$OB = a\sqrt{2},\ CO = CB = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$CD = \sqrt{CO^2 - \left(\frac{OB}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+b^2-2\frac{a^2}{4}} = \sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}.$$

$$\text{Aria } (BOC) = \frac{1}{2}\,OB\cdot CD = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+2b^2}.$$

Notînd cu $\alpha = \widehat{ADC}$ unghiul diedru cerut, rezultă $\cos\alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$.

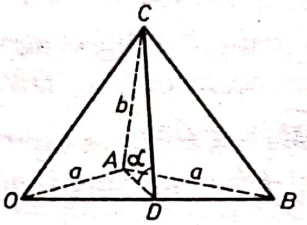


Fig. M.B.12

5°. Avem: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
Din teorema sinusurilor

$$\frac{4}{\sin 60°} = \frac{b}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 75°}$$

rezultă

$$b = \frac{4}{3}\sqrt{6} \quad \text{și} \quad c = \frac{2}{3}(\sqrt{6}+3\sqrt{2}).$$

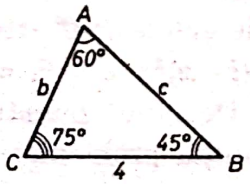


Fig. M.B.13

VII. 1°. Vom demonstra inegalitatea prin inducție după n. Pentru $n = 10$ trebuie verificat că $2^{10} > 10^3$, adică $1024 > 1000$, ceea ce este evident. Presupunem adevărat că $2^n > n^3$ pentru $n \geqslant 10$ și trebuie arătat că $2^{n+1} > (n+1)^3$. Dar $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^3$; dacă demonstrăm că pentru $n \geqslant 10$, $2n^3 \geqslant (n+1)^3$, atunci rezultă că $2^{n+1} > (n+1)^3$. Putem scrie: $2n^3 \geqslant n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ sau $n^3 \geqslant 3n^2+3n+1$; de unde $\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leqslant 1$. Dar $\frac{3}{n} \leqslant \frac{3}{10}$, $\frac{3}{n^2} \leqslant \frac{3}{100}$ și $\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{1000}$; atunci $\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leqslant 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}001 = 0{,}331 < 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

2°. Notînd $y = e^{-x}$, trebuie determinat $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $P(y) = (m+1)y^2 + 2(m+1)y + m > 0$ pentru $\forall y > 0$. Sînt posibile trei cazuri: a) Dacă $\Delta < 0$ și $(m+1) > 0$, atunci $P(y) > 0\ \forall y \in \mathbf{R}$. Dar $\Delta = 4(m+1) < 0$ și $(m+1) > 0$ conduc la $m \in \emptyset$, deci acest caz nu poate să apară.

b) Dacă $\Delta \geqslant 0$, $(m+1) > 0$, $S < 0$ și $P \geqslant 0$, atunci $P(y) > 0$, $\forall y > 0$. Rezultă sistemul de inegalități: $4(m+1) \geqslant 0$, $m+1 > 0$, $-2 < 0$, $\frac{m}{m+1} \geqslant 0$ cu soluțiile $m \in [0, \infty)$.

c) Dacă $m + 1 = 0$; atunci $P(y) = -1 < 0$, deci $m = -1$ nu convine. În concluzie soluția problemei este: $m \in [0, \infty)$.

3°. Fie $z = a + bi \in \mathbf{C}$. Condiția $z^2 = \bar{z}$ conduce la sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$ care este echivalent cu $\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ b = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2a + 1 = 0 \end{cases}$. Obținem soluțiile

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Rădăcinile căutate sînt: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($z = 0$ a fost exclusă), iar polinomul cerut este

$$P = (X-1)\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (X-1)(X^2 + X + 1) =$$

$$= X^3 - 1 \in \mathbf{R}[X].$$

4°. Dacă $x, y \in H$ atunci $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ și $a^2 - kb^2 = 1$, $c^2 - kd^2 = 1$. Pentru ca H să fie stabilă în raport cu înmulțirea trebuie ca $x \cdot y \in H$, $\forall x, y \in H$, adică trebuie să fie îndeplinite condițiile: $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$, $ac + 2bd \in \mathbf{Q}$, $ad + bc \in \mathbf{Q}$ și $(ac + 2bd)^2 - k(ad + bc)^2 = 1$.

Deoarece primele condiții se îndeplinesc în mod evident, rămîne de studiat ultima condiție. Avem: $(ac + 2bd)^2 - k(ad + bc)^2 = 1 = (a^2 - kb^2)(c^2 - kd^2)$, sau $a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - ka^2d^2 - kb^2c^2 - 2kabcd = a^2c^2 - ka^2d^2 - kb^2c^2 + k^2b^2d^2$, de unde prin reducerea termenilor asemenea obținem: $2abcd(2-k) + b^2d^2(4-k^2) = 0$, adică

$$bd(2-k)[2ac + bd(2+k)] = 0.$$

Rezultă $k = 2 \in \mathbf{N}^*$ pentru care condiția $(ac + 2bd)^2 - k(ad + bc)^2 = 1$ este verificată independent de $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ cu $a^2 - kb^2 = 1$ și $c^2 - kd^2 = 1$.

5°. Presupunem că $x = \log_5 10 \in \mathbf{Q}$. Deoarece $10 > 1$ rezultă $x = \log_5 10 > \log_5 1 = 0$, deci $x = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbf{N}^*$. Avem $x = \log_5 10 = \frac{p}{q}$, de unde $5^{\frac{p}{q}} = 10$, sau încă: $5^p = 10^q$. Dar ultima cifră a numărului natural 5^p este 5, iar ultima cifră a numărului 10^q este 0, contradicție. Rezultă că $x = \log_5 10 \notin \mathbf{Q}$.

VIII. 1°. Vom demonstra prin inducție după $n \geqslant 2$. Pentru $n = 2$ din formula dată obținem $a_2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$, ceea ce este adevărat. Pentru $n = 3$ obținem: $a_3 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Presupunem formula adevărată pentru $k = 2, 3, \ldots, n$ și calculăm:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2-1)\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right),$$

deci formula este adevărată și pentru $k = n + 1$.

Deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ converge la zero, rezultă că a_n este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}(1 + 0) = \frac{2}{3}$.

2°. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\frac{1}{e^x} - e} = -\frac{1}{e}$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{1 - e^x} = 0$, deci f nu are limită în $x = 0$, întrucît limitele laterale în zero sînt distincte.

Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\frac{1}{e^x} - e} = +\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{1 - e^x} = -\infty$, deci f nu are limită nici în $x = 1$, din același motiv.

3°. Impunem condiția $2 + bn + cn^2 \geqslant 0$, de unde rezultă $c > 0$ sau $c = 0$ și $b \geqslant 0$. Dacă $a \geqslant 0$ atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}\right) = +\infty,$$

ceea ce nu convine cerințelor problemei, deci $a < 0$. Atunci calculăm:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(cn^2 + bn + 2 - a^2n^2)}{\sqrt{cn^2 + bn + 2} - an} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(c - a^2) + bn^2 + 2n}{n\left[\sqrt{c + \frac{b}{n} + \frac{2}{n^2}} - a\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(c - a^2) + bn + 2}{\sqrt{c + \frac{b}{n} + \frac{2}{n^2}} - a}.$$

Pentru ca ultima limită să existe și să fie egală cu 1 este necesar ca să avem $c - a^2 = 0$, $b = 0$ și $\frac{2}{\sqrt{c} - a} = 1$. Se obțin soluțiile: $a = -1$, $b = 0$ și $c = 1$. Se verifică imediat că în acest caz avem, într-adevăr

$$\lim_{n\to\infty} n(-n + \sqrt{2 + n^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1\right)} = 1.$$

4°. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x<\frac{3}{2}}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ x>\frac{3}{2}}} f(x) = +\infty$, deci dreapta

$x = \frac{3}{2}$ este asimptotă verticală. Apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)} =$

$= \frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

deci $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la ramura $+\infty$ și $y = -\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la ramura $-\infty$.

5°. Verificăm imediat că avem:

$$(\operatorname{arctg}\sqrt{1+2tx})'_t = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+2tx}}}{1+(1+2tx)} = \frac{x}{2(1+tx)\sqrt{1+2tx}}$$

pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ și orice $t \in [0, 1]$, deoarece $1+2tx > 0$ și $1+tx > 0$. Atunci obținem:

$$f(x) = (\operatorname{arctg}\sqrt{1+2tx})\Big|_{t=0}^{t=1} = \operatorname{arctg}\sqrt{1+2x} - \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \operatorname{arctg}\sqrt{1+2x} - \frac{\pi}{4} \text{ pentru orice } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Avem: $f'(x) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+2x}} > 0, \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, deci f este strict crescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Dar $f(0) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{\pi}{4} = 0$, deci $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [0, 1]$. Atunci aria cerută este

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+2x} - \frac{\pi}{4}\right)dx = x\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+2x} - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{x}{2(1+x)\sqrt{1+2x}}\,dx = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(x+1)-1}{2(1+x)\sqrt{1+2x}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1+2x}} + \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{1+2x}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x}\Big|_0^1 +$$

$$+ \operatorname{arctg}\sqrt{1+2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

IX. 1°. În triunghiul dreptunghic ABC fie catetele $AC = b$ și $AB = c$. Atunci $BC = a = \sqrt{b^2+c^2}$. Avem: $R = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ și $r = \frac{S}{p}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$ și $S = \frac{bc}{2}$. Obținem:

$$r = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}+b+c} \text{ și atunci } 2R + 2r = \sqrt{b^2+c^2} + \frac{2bc}{\sqrt{b^2+c^2}+b+c} =$$

$$= \frac{b^2+c^2+(b+c)\sqrt{b^2+c^2}+2bc}{\sqrt{b^2+c^2}+b+c} = \frac{(b+c)^2+(b+c)\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}+b+c} =$$

$$= \frac{(b+c)(b+c+\sqrt{b^2+c^2})}{(b+c+\sqrt{b^2+c^2})} = b+c.$$

2°. Distingem trei cazuri: a) Dacă planul P este perpendicular pe una din dreptele d_1, d_2 problema nu are sens deoarece proiecția dreptei respective pe P este un punct. b) Dacă P conține una din drepte (fie aceea d_1) atunci conține și perpen-

Scanned with OKEN Scanner

diculara comună AB a celor două drepte căci $AB \parallel P$ și $A \in P$. Fie d_2' proiecția lui d_2 pe planul P. Dreapta d_1 este paralelă cu planul ce trece prin d_2 și este perpendicular pe AB (din construcția perpendicularei comune). Dar acest plan taie planul dat P după d_2', deci $d_1'(= d_1) \parallel d_2'$, deoarece planul P trece prin d_1' și taie planul (d_2, d_2') după o dreaptă (d_2') paralelă cu d_1'. c) Dacă planul P nu este perpen-

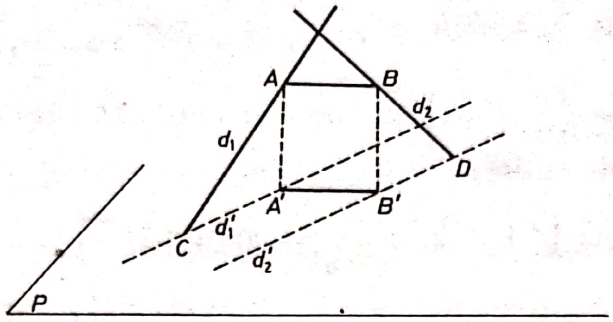


Fig. M.B.14

dicular pe nici una din dreptele d_1, d_2 și nici nu conține vreuna din ele, fie A', B' proiecțiile lui A, B pe planul P care este paralel cu AB. Atunci $d_1 \perp AB$, $AA' \perp AB$ implică $AB \perp$ pe planul determinat de AA' și d_1. Analog $d_2 \perp AB$, $BB' \perp AB$ implică $AB \perp$ pe planul determinat de BB' și d_2. Rezultă că planele (AA', d_1), (BB', d_2) sînt paralele și ele vor tăia planul P după două drepte paralele, care sînt tocmai d_1', d_2', proiecțiile celor două drepte d_1, d_2 pe planul P.

3°. Pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\sin x \in (0, 1)$ și $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Atunci inegalitatea dată se scrie:

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} > 2 \text{ sau, echivalent}$$

$\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 > 0$, adică $(\sin^2 x - 1)^2 > 0$, ceea ce este evident deoarece $\sin x \in (0, 1)$, $\forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4°. a) Avem: $\{P \in M \mid f(P) = A\} = \{P \in M \mid PA \perp AB\} =$ dreapta perpendiculară pe AB în A din care se scoate punctul A. Fie $C \in AB$, $C \neq A$ și $C \neq B$. Fie $P \in M$ astfel încît $f(P) = C$; atunci $AB \perp PA$ sau $AB \perp PB$, deci $C = A$ sau $C = B$, contradicție. Rezultă că $\{P \in M \mid f(P) = C\} = \phi$.

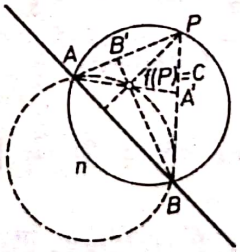


Fig. M.B.15

b) Patrulaterul $PA'f(P)B'$ este inscriptibil deoarece are două unghiuri opuse $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ de $90°$. Rezultă că măs $\overset{\frown}{Af(P)B} = 180° -$ măs $\overset{\frown}{A'PB'}$, deci $f(P)$ se află pe cercul O', simetricul cercului O față de dreapta AB. Raționamentul este analog dacă P aparține arcului $\overset{\frown}{AnB}$ al cercului O.

X.I°. Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \geqslant 0$$

adică

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} \geqslant 0$$

sau

$$\frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0,$$

care este adevărată deoarece:

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

și

$$ab > 0.$$

Notă: Într-un cadru mai general, problema ar fi putut fi formulată astfel:
Să se arate că dacă $a, b \in (-\infty, 0)$ sau $a, b \in (0, +\infty)$ atunci:

$$\frac{a}{b} \geqslant 2 - \frac{b}{a}.$$

Și în acest caz, soluția dată rămîne valabilă.

2°. Notînd:

$$2^x = t,$$

sistemul devine:

$$\begin{cases} t^3 - 10y = 0 \\ t - 5y = 0 \end{cases}$$

de unde, înmulțind a doua ecuație cu 2 și scăzînd-o din prima, găsim:

$$t^3 - 2t = 0$$

deci

$$t_1 = -\sqrt{2},\ t_2 = 0,\ t_3 = \sqrt{2}.$$

Ținînd cont de semnificația lui $t (t = 2^x$, deci o exponențială) rezultă:

$$t > 0$$

deci singura valoare care satisface este:

$$t_3 = \sqrt{2}.$$

Corespunzător acestei valori, se obțin valorile:

$$x = \frac{1}{2},\quad y = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

care reprezintă soluția sistemului dat.

3°. *Metoda I.* Scriind relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației date (relațiile lui Viète) găsim:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -9 \\ x_1x_2x_3 = -m. \end{cases} \quad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Presupunînd:

$$x_1 = x_2 \tag{2}$$

şi ţinînd cont de (2) în primele 2 ecuaţii ale lui (1), obţinem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1^2 + 2x_1x_3 = -9. \end{cases} \tag{3}$$

Scăzînd cea de a doua ecuaţie a sistemului (3) din prima înmulţită cu $2x_1$ găsim:

$$x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0 \tag{4}$$

ale cărei soluţii sînt:

$$x_1 = -1, \qquad x_1 = 3.$$

Impunînd condiţia ca soluţiile ecuaţiei (4) să verifice ecuaţia dată obţinem, respectiv:

$$m = -5, \qquad m = 27.$$

Prin urmare, pentru $m \in \{-5, 27\}$ ecuaţia dată admite o rădăcină dublă.
Să rezolvăm acum ecuaţia dată, pentru fiecare dintre valorile determinate ale lui m.

a) pentru $m = -5$, ecuaţia devine:

$$x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$$

adică

$$x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x - 5x - 5 = 0$$

sau

$$(x + 1)(x^2 - 4x - 5) = 0$$

de unde:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 5.$$

b) pentru $m = 27$, ecuaţia devine:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

sau

$$x^2(x - 3) - 9(x - 3) = 0$$

deci

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = -3.$$

Metoda II. Notînd:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$$

şi ţinînd seama că f este o funcţie continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$ (fiind o funcţie polinomială), condiţia ca ecuaţia dată să aibă o rădăcină dublă este echivalentă cu a cere ca axa Ox să fie tangentă la graficul lui f, în punctul respectiv. Prin urmare, condiţia din enunţ revine la a cere ca măcar una (oricum nu ambele, simultan!) din soluţiile ecuaţiei:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \tag{5}$$

să verifice ecuaţia dată, pentru aceasta din urmă fiind, evident, rădăcină dublă.
Împărţind la 3 ambii membri ai ecuaţiei (5) găsim:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

adică chiar ecuația (4) de la metoda I, deci, în continuare, se poate proceda ca la metoda anterioară.

Metoda III. Se procedează ca la metoda I pînă cînd se obțin soluțiile ecuației (4), adică:

$$x_1 = -1, \qquad x_1 = 3.$$

Ținînd cont de aceste valori în (3) obținem, respectiv:

$$x_3 = 5, \qquad x_3 = -3.$$

Utilizînd acum cea de a treia ecuație din (1):

pentru $x_1 = -1$ și $x_3 = 5$, găsim $m = -5$;

pentru $x_1 = 3$ și $x_3 = -3$, obținem $m = 27$.

Pentru a pune în evidență soluțiile ecuației date, pentru fiecare valoare a lui m, vom ține seama de relația (2). Astfel:

pentru $m = -5$, găsim:

$$x_1 = x_2 = -1, \qquad x_3 = 3;$$

pentru $m = 27$, obținem:

$$x_1 = x_2 = 3, \qquad x_3 = -3.$$

Notă: Metoda III este indicată numai în dorința de a atrage atenția că mulți rezolvitori pierd din vedere faptul că în enunț se cere „să se determine parametrul real *m... și apoi* să se rezolve ecuația". Dacă în primele două metode această „ordine" în soluționare a fost respectată, la ultima aceasta este marcată doar prin modul în care se trag concluziile asupra rezultatelor. Într-un fel, s-ar putea spune că la metoda a III-a respectarea „ordinei" respective este oarecum „forțată".

De remarcat că dacă s-ar fi procedat la rezolvarea sistemului format din (1) și (2) atunci era posibil să se găsească și prin urmare, să se indice mai întîi soluțiile ecuației și apoi valorile lui m, adică exact în „ordinea" inversă celei cerute prin enunț.

4°. a) Pentru reprezentarea grafică a funcției, vom parcurge următoarele etape:

i) domeniul de definiție:

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

ii) limitele la extremitățile domeniului de definiție:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

deci

$y = 0$ este asimptotă orizontală;

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \infty; \qquad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty,$$

deci

$x = 0$ este asimptotă verticală.

iii) asimptote:

— cele orizontale și verticale au fost remarcate la punctul anterior;

— oblice nu se mai caută, întrucît există orizontale.

Scanned with OKEN Scanner

iv) studiul derivatei întîi

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x(1-x)}{(x^2)^2}$$

adică

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^3}$$

și

$$f'(x) = 0 \text{ pentru } x = 2.$$

Cu ajutorul tabelului:

x	$-\infty$					0		2			$+\infty$
$x-2$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x^3		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
f'		$+$	$+$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

deducem că punctul de abscisă $x = 2$ este punct de minim al graficului lui f.

v) studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{x^6}$$

adică:

$$f''(x) = \frac{6-2x}{x^4}$$

și $f''(x) = 0$ pentru $x = 3$.

Cu ajutorul tabelului:

x	$-\infty$				0		3		$+\infty$
$6-2x$		$+$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	
x^4	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
f''		$+$		$\|$	$+$	0	$-$	$-$	

deducem că punctul de abscisă $x = 3$ este punct de inflexiune al graficului lui f.

vi) Tabloul de variație al funcției:

x	$-\infty$		-2		-1	0		1		2		3		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$			$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$		0	$+$		$+$		$+$		$+$	
f'		$+$		$+$		$\|$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f''		$+$		$+$		$\|$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$2\nearrow+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ m	$\nearrow$	$-\frac{2}{9}$ i	$\nearrow$	0

Scanned with OKEN Scanner

vii) Graficul funcției este prezentat în fig. M.B.16.

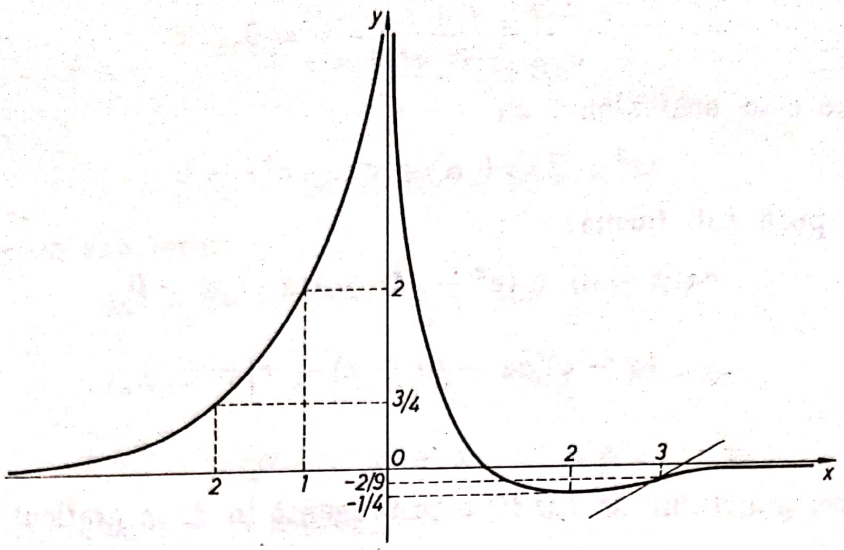


Fig. M.B.16

Notă: Punctele de abscisă -2 și -1 au fost introduse în tabloul de variație numa. pentru a putea trasa mai precis porțiunea din graficul lui f aflată la stînga axei Oyi

b) Notînd $y = f(x)$, ecuația tangentei în M la graficul lui f este dată de:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

sau

$$y - \frac{1-a}{a^2} = \frac{a-2}{a^3}(x - a), \tag{1}$$

cu $a \neq 0$.

Pentru a găsi coordonatele punctului M' trebuie rezolvat sistemul format din (1) și ecuația dreptei, ceea ce revine la a pune:

$$y = \frac{1-x}{x^2}$$

în ecuația (1), x fiind diferit de zero. Astfel, obținem:

$$\frac{1-x}{x^2} - \frac{1-a}{a^2} = \frac{a-2}{a^3}(x - a)$$

adică

$$\frac{a^2 - a^2x - x^2 + ax^2}{a^2x^2} = \frac{a-2}{a^3}(x - a)$$

sau

$$\frac{a^2 - x^2 - ax(a-x)}{a^2x^2} = \frac{a-2}{a^3}(x - a)$$

ori

$$\frac{(a-x)(a+x-ax)}{a^2x^2} = \frac{a-2}{x^3}(x - a)$$

deci

$$(x - a)\frac{a-2}{a^3} + \frac{a+x-ax}{a^2x^2} = 0$$

de unde

$$x = a,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică abscisa punctului M, și

$$\frac{a-2}{a^3}+\frac{a+x-ax}{a^2x^2}=0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu

$$ax^2-2x^2+a^2+ax-a^2x=0$$

care poate fi pusă sub forma:

$$ax(x-a)+(a^2-x^2)+x(a-x)=0$$

adică

$$(x-a)[ax-(a+x)-x]=0$$

de unde:

$$x=a,$$

din nou abscisa punctului M (MM' este tangentă în M la graficul funcției) și

$$ax-(a+x)-x=0.$$

Din ultima ecuație obținem:

$$x=\frac{a}{a-2},$$

a fiind presupus diferit de 2, care reprezintă abscisa punctului M'.

Prin urmare:

$$x_{M'}=\frac{a}{a-2}$$

deci

$$y_{M'}=f(x_{M'})=\frac{1-\frac{a}{a-2}}{\left(\frac{a}{a-2}\right)^2}$$

adică

$$y_{M'}=\frac{2(a-2)}{a^2}.$$

Așadar

$$M'\left(\frac{a}{a-2},\ \frac{2(a-2)}{a^2}\right).$$

c) Notînd cu m' coeficientul unghiular al tangentei la grafic în punctul M', avem:

$$m'=f'\left(\frac{a}{a-2}\right)$$

adică

$$m'=\frac{\frac{a}{a-2}-2}{\left(\frac{a}{a-2}\right)^3}$$

sau

$$m'=\frac{(4-a)(a-2)^2}{a^3}.$$

Pe de altă parte, conform ipotezei:

$$m' = 3$$

deci

$$\frac{(4-a)(a-2)^2}{a^3} = 3$$

sau

$$4a^3 - 8a^2 + 20a - 16 = 0$$

care poate fi pusă sub forma:

$$4a^3 - 4a^2 - 4a^2 + 4a + 16a - 16 = 0$$

sau

$$4a^2(a-1) - 4a(a-1) + 16(a-1) = 0$$

adică

$$4(a^2 - a + 4)(a-1) = 0$$

de unde, singura valoare reală a lui a este:

$$a = 1.$$

5°. Împărțind prin 4 ambii membri ai inegalității:

$$4x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0$$

obținem:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \leqslant 0 \qquad (1)$$

și recunoaștem că mulțimea punctelor ale căror coordonate satisfac (1) este formată din mulțimea punctelor aflate în interiorul elipsei cu semiaxele

$$a = 1, \qquad b = 2$$

și având originea axelor de coordonate drept centru de simetrie. Pe de altă parte, potrivit ipotezei:

$$y \geqslant 0$$

deci domeniul al cărui centru de greutate se cere este cel mărginit de axa Ox și semielipsa situată deasupra lui Ox (v. figura M.B.17.)

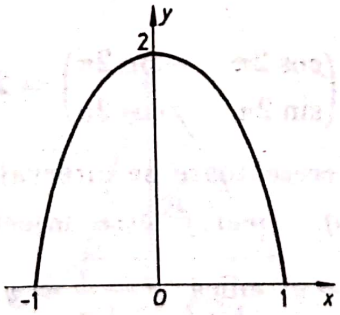


Fig. M.B.17

Notînd:

$$f(x) = 0, \qquad x \in [-1, 1];$$
$$g(x) = 2\sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1, 1],$$

coordonatele centrului de greutate vor fi:

$$x_G = \frac{\int_{-1}^{1} x[g(x) - f(x)]\,dx}{\int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx} = \frac{2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx}{2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx} = 0$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [g^2(x) - f^2(x)]\,dx}{\int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)\,dx} = \frac{2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx}{2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx} = \frac{8}{3\pi}.$$

XI.1°. Notînd cu z_1, z_2, z_3 rădăcinile ecuației, rezultă că $z_1 = 2$, $z_2 + z_3 = 0$ și relațiile lui Viète sînt $z_1 + z_2 + z_3 = n - m$; $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 2m - 3n$; $z_1z_2z_3 = -m - 3n$. Obținem relațiile $n - m = 2$ și $9m - 7n + 8 = 0$ cu soluțiile $m = 3$, $n = 5$. Deci ecuația este $z^3 - 2z^2 - 9z + 18 = 0$ cu rădăcinile $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \pm 3$.

2°. Dacă polinomul P este polinom constant, adică $P = k \in \mathbf{R}$, rezultă că $X \cdot k = (X - 3)k$, deci $k = 0$ și P este polinomul nul. Fie P polinom de grad $n \geqslant 1$, $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, unde $a_i \in \mathbf{R}$, $a_0 \neq 0$. Relația din enunț devine

$$X[a_0(X-1)^n + a_1(X-1)^{n-1} + \ldots + a_n] = (X-3)\,(a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n).$$

Egalînd coeficienții lui X^n din cei doi membri, rezultă $-a_0 \cdot C_n^1 + a_1 = a_1 - 3a_0$, deci $a_0(n-3) = 0$ și cum $a_0 \neq 0$, rezultă $n = 3$. Luînd acum $P = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$ și identificînd coeficienții, obținem în final polinoamele cerute: $P = a_0(X^3 - 3X^2 + 2X)$, $a_0 \in \mathbf{R}$.

3°. Putem scrie $A = 2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

Se știe că $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și $\forall \theta \in \mathbf{R}$, (se demonstrează ușor prin inducție).
Atunci putem calcula:

$$A^{12} = 2^{12}\begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = 2^{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4°. Funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$ deoarece $f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Deci f este injectivă pe intervalul $(0, +\infty)$. Pentru $\forall y \in \mathbf{R}$ ecuația $f(x) = y$, adică $x - \frac{2}{x} = y$, $x^2 - y \cdot x - 2 = 0$ are o soluție $x \in (0, +\infty)$, și anume $x = \frac{y + \sqrt{y^2+8}}{2}$, deci f este surjectivă. Funcția f fiind bijectivă, iar inversa ei fiind $f^{-1} : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, $f^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2+8}}{2}$, rezultă că pentru $\forall y \in \mathbf{R}$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+8}}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Presupunem prin reducere la absurd că f admite o primitivă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; deci F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Restricția lui f la intervalul $(0, \infty)$ este o funcție continuă, deci admite o primitivă $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ și orice altă primitivă a restricției lui f la intervalul $(0, \infty)$ este de forma $g + C_1$, cu C_1 constantă reală oarecare. Restricția lui f la intervalul $(-\infty, 0)$ admite primitive și ele sînt de forma C_2, cu C_2 constantă reală oarecare. Rezultă că pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ putem scrie

$$F(x) = \begin{cases} C_2 & \text{dacă } x < 0 \\ g(x) + C_1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Funcția F este definită și în $x = 0$ fiind chiar derivabilă în acest punct. Rezultă că F este continuă în $x = 0$, deci $C_2 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (g(x) + C_1)$.

Prin urmare există $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = l \in \mathbf{R}$ și $C_2 = l + C_1$. Așadar,

$$F(x) = \begin{cases} l + C_1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ g(x) + C_1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Dar funcția F este derivabilă în $x = 0$, deci

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x}.$$

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - l}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos x \right) = -\infty$, deci am obținut o contradicție.

XII.1°. Triunghiurile BHD și ADC sînt asemenea deoarece sînt dreptunghice și $\widehat{BHD} = 90° - \widehat{HBD} = \widehat{ACD}$. Rezultă că $\frac{BH}{AC} = \frac{HD}{DC}$, deci $HD \cdot AC = BH \cdot DC$. Apoi, triunghiurile ABD și CHD sînt asemenea, deoarece sînt dreptunghice, și $\widehat{BAD} = 90° - \widehat{ABD} = \widehat{HCD}$. Rezultă că $\frac{AB}{CH} = \frac{AD}{DC}$, deci $AB = \frac{AD \cdot CH}{DC}$.

Înmulțind cele două relații obținute, avem $HD \cdot AB \cdot AC = \frac{AD \cdot CH}{DC} \cdot BH \cdot DC =$

$= AD \cdot BH \cdot CH$.

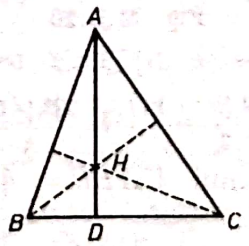


Fig. M.B.18

2°. Fie $I = MN \cap BC$. Avem $\widehat{MQC} = \widehat{ABC} \left(= \text{măs} \frac{\widehat{M\alpha C}}{2} \right)$ și $\widehat{MNQ} = \widehat{INC} =$

$= 90° - \widehat{ACB} = \widehat{ABC}$, deci $\widehat{MQC} = \widehat{MNQ}$. Atunci triunghiul MQN este isoscel, de unde $MQ = MN$. Dreapta MA este înălțime în triunghiul isoscel MQN, deci

Scanned with OKEN Scanner

$AQ = AN$ (MA este și mediană). Patrulaterul $BPNC$ este inscriptibil, prin urmare $\widehat{ANP} = 180° - \widehat{PNC} = \widehat{PBC}$, de unde $\widehat{MQA} = \widehat{ANP} (= \widehat{ABC})$. Rezultă că $MQ \parallel NP$ și că triunghiurile MAQ și PAN sînt egale. Atunci $MQ = NP$, deci $MNPQ$ este paralelogram; dar $MNPQ$ are și două laturi alăturate egale ($MQ = MN$), de unde rezultă că $MNPQ$ este romb (sau fiindcă are diagonalele perpendiculare).

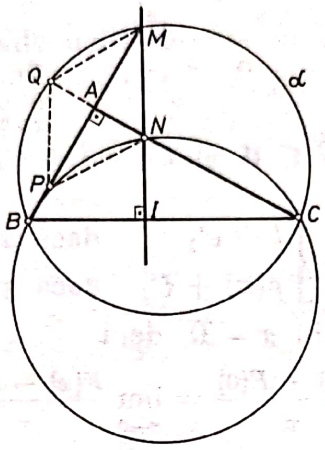


Fig. M.B.19

3°. Fie R raza cercului de bază al conului. Latura tetraedrului regulat $VABC$ este $a = BC = R\sqrt{3}$. Avem VO = înălțimea conului $= \sqrt{VA^2 - OA^2} = \sqrt{3R^2 - R^2} = R\sqrt{2}$, de unde volumul conului $= \frac{\pi R^2 \cdot VO}{3} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{3}$. Volu-

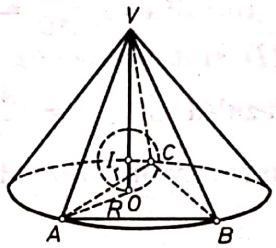


Fig. M.B.20

mul tetraedrului $VABC = \frac{\text{aria } ABC \cdot VO}{3} = \frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. Notînd cu r raza sferei înscrisă în tetraedru, rezultă volumul $VABC = 4 \cdot$ volumul $IABC$, deci

$$\frac{R^3\sqrt{6}}{4} = 4 \cdot \frac{\text{aria } ABC \cdot r}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot r, \text{ de unde } r = \frac{R\sqrt{2}}{4}.$$

Volumul sferei înscrise $= \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{24}$ și raportul cerut este 8.

4°. Fie $AB = a$. Triunghiurile BAD și BCD sînt egale (folosind ipotezele și BD comună), deci medianele AN și CN rezultă egale. Atunci triunghiul ANC

Scanned with OKEN Scanner

este isoscel și mediana MN va fi și înălțime, deci $MN \perp AC$. În mod similar triunghiurile ABC și ADC sînt egale, deci medianele BM și DM sînt egale și, în triunghiul isoscel BMD, mediana MN este și înălțime, adică $MN \perp BD$.

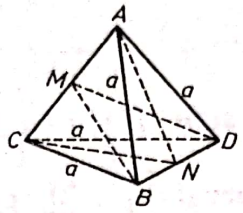


Fig. M.B.21

5°. Ecuația se scrie echivalent $\cos x - \cos 3x - (1 - \cos 2x) = 0$, $2 \sin 2x \sin x - 2 \sin^2 x = 0$ sau $2 \sin^2 x (2 \cos x - 1) = 0$. Din $\sin x = 0$ rezultă $x = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Din $\cos x = \frac{1}{2}$, rezultă $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$.

XIII.1°. Relațiile între rădăcini și coeficienți sînt $x_1 + x_2 = 2m - 3$; $x_1x_2 = m - 1$. Scriind relația din enunț sub forma $x_1 + 2(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 0$ și înlocuind suma și produsul, obținem $x_1 = m + 1$, deci $x_2 = m - 4$. Ținînd cont de relația $x_1x_2 = m - 1$, rezultă $(m + 1)(m - 4) = m - 1$, $m^2 - 4m - 3 = 0$, de unde $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$.

2°. Avem

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{\alpha + (\alpha + 1)i} = \frac{(1 - i\sqrt{3})[\alpha - (\alpha + 1)i]}{\alpha^2 + (\alpha + 1)^2} = \frac{\alpha - \alpha i\sqrt{3} - (\alpha + 1)i - (\alpha + 1)\sqrt{3}}{\alpha^2 + (\alpha + 1)^2} =$$

$$= \frac{\alpha - (\alpha + 1)\sqrt{3}}{\alpha^2 + (\alpha + 1)^2} + i\frac{-(\alpha\sqrt{3} + \alpha + 1)}{\alpha^2 + (\alpha + 1)^2}, \text{ unde } \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 \neq 0, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Condiția din enunț dă $\alpha\sqrt{3} + \alpha + 1 = 0$, de unde $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

3°. Avem $\dfrac{3^{3n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{3n}} = \dfrac{1}{\frac{(3n + 1)^{3n}}{n^{3n}} \cdot \frac{1}{3^{3n}}} = \dfrac{1}{\left(\frac{3n + 1}{3n}\right)^{3n}} = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}}$,

deci $$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{3n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{3n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}} = \frac{1}{e}.$$

4°. Deoarece $g(x) \neq 0$, pentru $\forall x \in [a, b]$ se poate defini funcția $h = \frac{f}{g}$, $h : [a, b] \to \mathbf{R}$. Din ipotezele problemei și din proprietățile funcțiilor continue, derivabile, rezultă că h este o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ și derivabilă pe intervalul (a, b). Relația $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$ se scrie $h(a) = h(b)$. Aplicînd teorema lui Rolle rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încît $h'(c) = 0$. Dar $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ pentru $\forall x \in (a, b)$ și relația $h'(c) = 0$ devine $f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$. Deoarece $g(c) \neq 0$ și $g'(c) \neq 0$ (din ipoteze) rezultă relația cerută

$$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5°. Restricția funcției f la intervalul $[1, 3]$ este definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{dacă } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \\ 3 - x & \text{dacă } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Funcția restricție se poate scrie $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 3 - x & \text{dacă } x[2, 3], \end{cases}$

și este o funcție continuă pe intervalul $[1, 3]$, pozitivă pe acest interval. Atunci funcția este integrabilă pe intervalul $[1, 3]$ și aria cerută este

$$A = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx + \int_2^3 (3-x)\,dx = \frac{7}{6}.$$

XIV. 1°. Fie R raza cercului și $a = OM = ON$. Avem $MA \cdot MB = -(R^2 - OM)^2 = -(R^2 - a^2)$ și $NA \cdot NC = -(R^2 - ON^2) = -(R^2 - a^2)$ (puterea punctului față de cerc).

Atunci $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{MA^2}{(R^2-a^2)^2} + \frac{NA^2}{(R^2-a^2)^2} = \frac{MA^2 + NA^2}{(R^2-a^2)^2}$.

În triunghiul MAN, AO este mediană deci putem scrie

$$MA^2 + NA^2 = 2AO^2 + \frac{1}{2}MN^2 = 2R^2 + 2a^2 = 2(R^2 + a^2).$$

În final, rezultă $\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{2(R^2+a^2)}{(R^2-a^2)^2} = \text{constant}$.

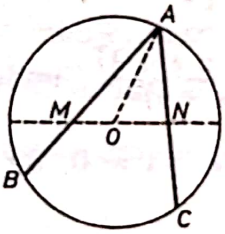


Fig. M.B.22

2°. Avem $AC \perp BB'$ și $MM' \perp BB'$, deci $MM' \parallel AC$, de unde $\widehat{M'MH} = \widehat{B'NH}$ (alterne interne). Patrulaterul $B'HN'N$ este inscriptibil având două unghiuri opuse de $90°$, deci $\widehat{B'N'H} = \widehat{B'NH}$. Patrulaterul $C'HM'M$ este inscriptibil având două unghiuri opuse de $90°$, deci $\widehat{M'C'H} = \widehat{M'MH}$. Din cele trei egalități de unghiuri obținem $\widehat{M'C'H} = \widehat{B'N'H}$, deci $C'M' \parallel B'N'$.

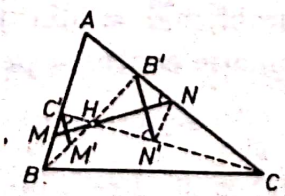


Fig. M.B.23

3°. Aria bazei $= \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ cm². Volumul piramidei $= \frac{\text{Aria bazei} \cdot VO}{3} = \frac{24 \cdot 4}{3} = 32$ cm³. Deoarece $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm, atunci $OA = OC = 4$ cm

și $OB = OD = 3$ cm. Latura rombului este $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$ cm, iar muchiile laterale sînt $VA = VC = \sqrt{VO^2 + OA^2} = 4\sqrt{2}$ și $VB = VD = \sqrt{VO^2 + OB^2} = 5$ cm. Fețele laterale sînt toate triunghiuri isoscele cu laturile 5 cm, 5 cm, $4\sqrt{2}$ cm. Aria unui astfel de triunghi este $2\sqrt{34}$ cm^2. Atunci aria totală a piramidei este $(24 + 8\sqrt{34})$ cm^2.

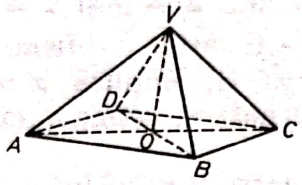


Fig. M.B.24

4°. Notăm cu a latura cubului. Atunci $FH = CH = a\sqrt{2}$ și în triunghiul isoscel HCF mediana HQ este și înălțime, deci $HQ \perp CF$. Apoi

$$HQ = \sqrt{HG^2 + GO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2},\quad PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ și } HP = \sqrt{HA^2 + PA^2} = \frac{3a}{2}.$$

Se observă că $HQ^2 + PQ^2 = HP^2$, deci $HQ \perp PQ$. Rezultă că $HQ \perp$ planul CFP. În triunghiul ABG, PQ este linie mijlocie deci $PQ \parallel AG$; atunci AG este paralelă cu planul CFP, fiind paralelă cu o dreaptă din plan.

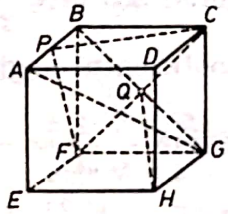


Fig. M.B.25

5°. Ecuația se scrie în mod echivalent

$$2\sin^2 x \cos x + 2\sin x = \sin\frac{x}{2} \text{ sau } 2\sin x(\cos x + 1) - \sin\frac{x}{2} = 0,$$

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0. \text{ Se obține } \sin\frac{x}{2}\left(8\cos^3\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

Din $\sin\frac{x}{2} = 0$ rezultă $x = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Din $8\cos^3\frac{x}{2} - 1 = 0$, rezultă

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2},\text{ deci } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k_2\pi,\ k_2 \in \mathbf{Z}.$$

XV. 1°. Trecem toți logaritmii în baza 10. Așadar,

$$a = \log_{40}100 = \frac{\lg 100}{\lg 40} = \frac{2}{\lg 10 + \lg 4} = \frac{2}{1 + 2\lg 2},\text{ deci } \lg 2 = \frac{2 - a}{2a}.$$

Atunci

$$\log_{16}25 = \frac{\lg 25}{\lg 16} = \frac{2\lg 5}{4\lg 2} = \frac{\lg 5}{2\lg 2} = \frac{\lg\frac{10}{2}}{2\lg 2} = \frac{1 - \lg 2}{2\lg 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În final, obținem:

$$\log_{16}25 = \frac{1 - \frac{2-a}{2a}}{2 \cdot \frac{2-a}{2a}} = \frac{3a-2}{4-2a}$$

(Calculele sînt posibile deoarece, evident, $a \neq 0$ și $a \neq 2$).

2°. Trebuie arătat că $\varphi : G \to G$ este morfism bijectiv. Aplicația φ este injectivă: dacă $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\forall\, x,\ y \in G$, implică $x = y$. Din definiția lui φ, $a^{-1}xa = a^{-1}ya$, deci $x = y$ (înmulțind la stînga cu a și la dreapta cu a^{-1} în grupul G).

Aplicația φ este surjectivă: pentru $\forall\, y \in G$ luăm $x = aya^{-1} \in G$ și rezultă că $\varphi(x) = a^{-1}(aya^{-1})a = y$.

Apoi $\varphi(xy) = a^{-1}(xy)a$ și $\varphi(x)\varphi(y) = (a^{-1}xa)(a^{-1}ya) = (a^{-1}x)(aa^{-1})(ya) = (a^{-1}x)e(ya) = a^{-1}(xy)a$, deci $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ (e este elementul neutru în grupul G).

3°. Putem scrie $f(x) = e^{ax} \cdot e^{bx} = e^{ax+bx} = e^{(a+b)x}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) = (a+b)e^{(a+b)x}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = (a+b)^2e^{(a+b)x}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și

$$f'''(x) = (a+b)^3e^{(a+b)x},\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

4°. Coeficientul unghiular al corzii AB este $\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} = -\frac{1}{2}$. Derivata funcției este $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Coeficientul unghiular al tangentei în punctul P este $-\frac{1}{a^2}$. Condiția din enunț devine $-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{2}$, cu soluțiile $a = \pm\sqrt{2}$. Problema are două soluții $P_1\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $P_2\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5°. Funcția rațională $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3+x^5} = \frac{1}{x^3(1+x^2)}$ se descompune în fracții simple:

$$f(x) = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1},\ \forall\, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

cu A, B, C, D, E constante reale. Identificînd coeficienții obținem valorile constantelor $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$, $E = 0$, deci

$$\frac{1}{x^3+x^5} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1},$$

pe orice interval care nu conține punctul $x = 0$. Atunci

$$\int \frac{1}{x^3+x^5}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

pe orice interval care nu conține punctul $x = 0$, unde $C \in \mathbf{R}$ este o constantă oarecare.

XVI. 1°. Triunghiurile AOD și BOC sînt asemenea ($AD \parallel BC$), deci raportul înălțimilor duse din O în cele două triunghiuri este egal cu raportul de asemănare, adică $\frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BC}$. Atunci triunghiurile ADE și BCE sînt asemenea, avînd $\hat{A} = \hat{B} = 90°$ și catetele proporționale. Rezultă că $\widehat{ADE} = \widehat{BCE}$. Din $EO \parallel AD$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că $\widehat{ADE} = \widehat{DEO}$, iar din $EO \parallel BC$ rezultă că $\widehat{CEO} = \widehat{BCE}$ (alterne interne). În final, obținem $\widehat{DEO} = \widehat{CEO}$, deci EO este bisectoarea unghiului $\widehat{DEC}$.

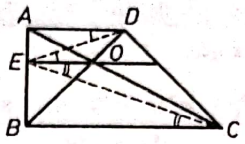


Fig. M.B.26

2°. Avem $BE = 2a + b$, $BD = a + b$. Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul BCE, rezultă

$$EC^2 = a^2 + (2a + b)^2 - 2a(2a + b)\cos 60° = 3a^2 + 3ab + b^2.$$

Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul BDE, rezultă

$$ED^2 = (a + b)^2 + (2a + b)^2 - 2(a + b)(2a + b)\cos 60° = 3a^2 + 3ab + b^2.$$

În concluzie, $EC = ED$.

Fig. M.B.27

3°. Fie r raza bazei conului, I înălțimea conului și G generatoarea conului. Atunci $A = \pi rG + \pi r^2$ și $V = \frac{1}{3}\pi r^2 I$. Triunghiurile VOD și VBC sînt asemenea, deci, cu notațiile anterioare rezultă: $\frac{I - R}{G} = \frac{R}{r} = \frac{G - r}{I}$. Atunci $G = \frac{r(I - R)}{R}$ și $G + r = r \cdot \frac{I}{R}$. Putem scrie $A = \pi r(G + r) = \pi r \cdot \frac{rI}{R} = \frac{\pi r^2 I}{R}$, deci $V = \frac{1}{3} A \cdot R$.

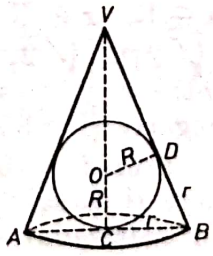


Fig. M.B.28

4°. Din relația dată rezultă $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$, deci $z = \cos\theta + i\sin\theta$ sau $z = \cos\theta - i\sin\theta$. Din formula lui Moivre, avem $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ sau $z^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$. În ambele situații rezultă că

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

5°. Avem $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ şi $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$, $\forall\,\alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$. Atunci

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}+$$

$$+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{2(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

XVII. 1°. Avem: $x_1+x_2=3$ şi $x_1x_2=p$, unde $x_1,\ x_2\in\mathbf{Z}$. Deoarece p este prim, rezultă că $x_1=1$, $x_2=p$ sau $x_1=-1$, $x_2=-p$. Înlocuind în $x_1+x_2=3$, în primul caz, obţinem: $1+p=3$, deci $p=2$ prim şi soluţiile ecuaţiei sînt $x_1=1$, $x_2=2$. Înlocuind în $x_1+x_2=3$, în al doilea caz, obţinem: $-1-p=3$, deci $p=-4$, care nu este prim. În concluzie, singura valoare acceptabilă este $p=2$.

2°. Se impun condiţiile $4^{x-2}+9>0$, $2^{x-2}+1>0$ şi rezultă $x\in\mathbf{R}$. Inegalitatea se scrie echivalent: $\log 2(4^{x-2}+9)\leqslant\log 10(2^{x-2}+1)$. Deoarece funcţia $\log_{10}:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ este crescătoare, rezultă inegalitatea: $2(4^{x-2}+9)\leqslant 10(2^{x-2}+1)$. Notînd $y=2^{x-2}$ avem: $2(y^2+9)\leqslant 10(y+1)$ sau $y^2-5y+4\leqslant 0$, deci $y\in[1,\ 4]$. Atunci $1\leqslant 2^{x-2}\leqslant 4$ sau $2^0\leqslant 2^{x-2}\leqslant 2^2$, deci $0\leqslant x-2\leqslant 2$, de unde soluţia $x\in[2,\ 4]$.

3°. Se impun condiţiile $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$. Scriind sistemul sub forma

$$y^2-2xy+2=0$$

$$z^2-2yz+2=0$$

$$x^2-2zx+2=0,$$

şi impunînd condiţiile $y\in\mathbf{R}$, $z\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$ rezultă: $x^2-2\geqslant 0$, $y^2-2\geqslant 0$, $z^2-2\geqslant 0$, deci $x,\ y,\ z\in(-\infty,\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\ +\infty)$. Din forma iniţială a sistemului se observă că dacă unul dintre $x,\ y,\ z$ este pozitiv, atunci şi celelalte două sînt pozitive, iar dacă unul este negativ şi celelalte două sînt negative. Să presupunem că $x>0$, $y>0$, $z>0$; atunci rezultă $x\geqslant\sqrt{2}$, $y\geqslant\sqrt{2}$, $z\geqslant\sqrt{2}$. Presupunem că $x,\ y,\ z$ sînt distincte şi fie $x<y<z$ (analog se tratează şi celelalte cazuri). Din forma iniţială a sistemului scădem ecuaţia a treia din prima ecuaţie: $2(x-z)=(y-x)\left(1-\frac{2}{xy}\right)$. Dar $x-z<0$, $y-x>0$, deci $1-\frac{2}{xy}<0$ sau $xy<2$, ceea ce vine în contradicţie cu $x\geqslant\sqrt{2}$, $y\geqslant\sqrt{2}$, adică $xy\geqslant 2$. Rezultă că $x,\ y,\ z$ nu pot fi toate distincte şi fie, de exemplu, $x=y$; atunci din ultima relaţie obţinută rezultă $x=z$, deci $x=y=z$. Dintr-una din ecuaţii obţinem $x=y=z=\sqrt{2}$. În mod similar, în cazul $x<0$, $y<0$, $z<0$, se obţine soluţia $x=y=z=-\sqrt{2}$. În concluzie, singurele soluţii reale ale sistemului dat sînt $(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$ sau $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Există determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, deci rang $(S) \geqslant 2$. Pentru ca rang $(S) = 2$ trebuie ca determinanţii $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & a \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 5 & -6 & b \end{vmatrix}$ să fie nuli, iar pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca şi determinantul caracteristic $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 5 & -6 & c \end{vmatrix}$ să fie nul.

Din aceste condiţii se obţin valorile $a = 2$, $b = -12$, $c = -2$.

Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} 2x - 3y = -1 - 4z + 5u \\ x + 9y = 3 - 2z - u \end{cases}$ şi are soluţiile

$$\begin{cases} x = 2\beta - 2\alpha \\ y = \dfrac{1-\beta}{3} \\ z = \alpha \\ u = \beta \end{cases} \quad \text{cu } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \text{ arbitrari.}$$

5°. Pentru ca legea de compoziţie să fie comutativă trebuie ca $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$, adică $xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx$, deci $b = 2a$. Pentru ca legea de compoziţie să fie asociativă trebuie ca $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$, adică $(xy + 2ax + 2ay)z + 2a(xy + 2ax + 2ay) + 2az = x(yz + 2ay + 2az) + 2ax + 2a(yz + 2ay + 2az)$.

Efectuînd calculele se obţine: $(2a - 4a^2)(z - x) = 0$, deci $2a = 4a^2$ cu soluţiile $a = 0$ sau $a = \dfrac{1}{2}$. Atunci $b = 0$ sau $b = 1$ şi se obţin legile: $x * y = xy$ în primul caz, sau $x * y = xy + x + y$ în al doilea caz.

XVIII. 1°. Putem scrie:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

2°. Adunînd ultimii doi termeni din expresia lui a_n avem:

$$\frac{n^2 - 2}{n!} + \frac{n+2}{n!} = \frac{n^2 + n}{n!} = \frac{n(n+1)}{n!} = \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{n-1+2}{(n-1)!}.$$

Acest fapt ne sugerează să folosim identitatea:

$$\frac{k^2 - 2}{k!} = \frac{(k-1) + 2}{(k-1)!} - \frac{k+2}{k!}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Făcînd $k = 2, 3, \ldots, n$ obţinem egalităţile:

$$\frac{2}{2!} = \frac{1+2}{1!} - \frac{2+2}{2!}$$

$$\frac{7}{3!} = \frac{2+2}{2!} - \frac{3+2}{3!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(n-1)^2 - 2}{(n-1)!} = \frac{(n-2) + 2}{(n-2)!} - \frac{(n-1) + 2}{(n-1)!}$$

$$\frac{n^2 - 2}{n!} = \frac{(n-1) + 2}{(n-1)!} - \frac{n+2}{n!}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd aceste egalităţi obţinem: $a_n = 3$, deci $(a_n)_{n\geq 2}$ este şir constant. Atunci $(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Pentru şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ folosim identitatea:

$$\ln\left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right) = \ln\frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Putem scrie

$$b_n = \ln\left(\frac{1\cdot 5}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 7}{5^2}\cdot\frac{5\cdot 9}{7^2}\cdots\frac{(2n-5)(2n-1)}{(2n-3)^2}\cdot\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)^2}\cdot\frac{(2n-1)(2n+3)}{(2n+1)^2}\right) =$$

$= \ln\dfrac{2n+3}{3(2n+1)}$, după simplificări. Atunci $b_n = \ln\dfrac{2+\frac{3}{n}}{3\left(2+\frac{1}{n}\right)}$ şi, deoarece $\frac{1}{n}$ este convergent şi tinde la zero, b_n rezultă convergent; obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ln\dfrac{2+0}{3(2+0)} =$

$= \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$.

3°. Presupunem că există $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbf{R}[X]$ astfel încît restricţia sa la $[0, 1]$ să coincidă cu funcţia f. Deoarece P este polinom de gradul n derivata sa de ordin $(n+1)$ este nulă, deci $P^{(n-1)}(x) = 0\ \forall\, x \in [0, 1]$. Să calculăm derivata de ordin $(n+1)$ a lui f. Avem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\quad \forall x \in [0, 1].$$

Presupunem că

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},\quad \forall\, x \in [0, 1]$$

şi mai derivăm o dată:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{(k-1)}\frac{(k-1)!\cdot(-k)}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^k\frac{k!}{(1+x)^{k+1}},\quad \forall\, x \in [0, 1] \text{ (inducţie).}$$

Deoarece $f(x) = P(x)$, $\forall\, x \in [0, 1]$ rezultă că $f^{(n+1)}(x) = P^{(n+1)}(x)$, $\forall\, x \in [0, 1]$, adică $(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}} = 0$, $\forall\, x \in [0, 1]$, contradicţie.

4°. În calculul limitei deosebim cinci cazuri.

a) Dacă $x \in (-\infty, -1)$ atunci $\frac{1}{x^n} \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n} + (x^2+4)}{x\left(1+\frac{1}{x^n}\right)} = \frac{x^2+4}{x}.$$

b) Dacă $x \in (-1, 0)$ atunci $x^n \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)} = \frac{1}{x}.$$

c) Dacă $x \in (0, 1)$ atunci $x^n \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1 + x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)} = \frac{1}{x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Dacă $x = 1$ atunci $x^n = 1 \to 1$ cînd $n \to \infty$, deci $f(1) = 3$.

e) Dacă $x \in (1, \infty)$ atunci $\frac{1}{x^n} \to 0$ cînd $n \to \infty$, deci

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x^n} + (x^2 + 4)}{x\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} = \frac{x^2 + 4}{x}.$$

Rezultă

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4}{x} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{x} & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 3 & \text{dacă } x = 1 \\ \frac{x^2+4}{x} & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală şi dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la ambele ramuri ($\pm\infty$). Derivata lui f este:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ -\frac{1}{x^2} & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ \frac{x^2-4}{x^2} & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Tabloul de variaţie:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4 M	↘	-5 ‖ -1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1 ‖ 3	↘	5 ‖ 4 m	↗	$+\infty$

Graficul:

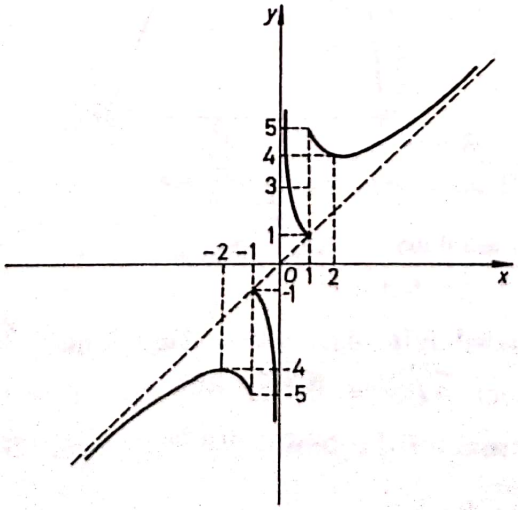


Fig. M.B.29

Scanned with OKEN Scanner

5°. Avem $\int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} = \ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\right) -$

$$- \ln\left(\frac{a}{b}+\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\right) = \ln\frac{(b+\sqrt{a^2+b^2})\,b}{(a+\sqrt{a^2+b^2})\cdot a}.$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} a+b=7 \\ \dfrac{(b+\sqrt{a^2+b^2})b}{(a+\sqrt{a^2+b^2})a} = \dfrac{b-1}{a-1}, \end{cases} \text{ cu } a, b \in \mathbf{R} \text{ şi } a>1,\ b>1.$$

Ecuaţia a doua se mai scrie:

$$\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab-a}{ab-b},$$

scăzînd numitorii din numărători şi adunînd numărătorii la numitori obţinem:

$$\frac{b-a}{a+b+2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b-a}{2ab-(a+b)}.$$

Rezultă $b-a=0$ cu soluţiile acceptabile $a=b=\frac{7}{2}$ sau $a+b+2\sqrt{a^2+b^2} = 2ab-(a+b)$. Din $a+b=7$ obţinem $a^2+b^2=49-2ab$, de unde: $7+2\sqrt{49-2ab}=2ab-7$, deci $\sqrt{49-2ab}=ab-7$ $(ab\geqslant 7)$. Rezultă că $ab=12$, $a+b=7$ cu soluţiile acceptabile $a=4, b=3$ sau $a=3, b=4$.

XIX. 1°. Ducem din A paralela la DC, care taie pe BF în G şi pe BC în H. Deoarece $AE \parallel HC$ şi $AH \parallel EC$, $AHCE$ este un paralelogram, deci $AH=CE$. La fel, deoarece $AG \parallel DF$ şi $AD \parallel GF$, $AGFD$ este un paralelogram, deci $AG=DF$. Avem $\widehat{AHB}=\widehat{DCB}$ (unghiuri corespondente făcute de secanta BC cu paralelele AH, DC) şi măs $\widehat{ABG}$ + măs $\widehat{BAD}=180°$ (unghiuri interne de aceeaşi parte a

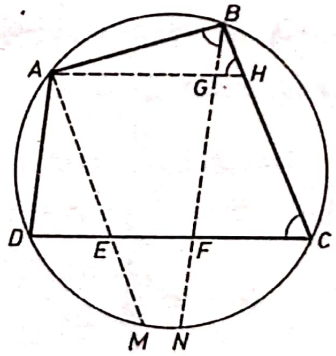


Fig. M.B.30

secantei AB ce taie paralelele AD, BF). Dar măs $\widehat{BAD}$ + măs $\widehat{DCB}=180°$ ($ABCD$ inscriptibil), deci $\widehat{ABG}=\widehat{DCB}$. Rezultă că triunghiurile ABG şi ABH sînt asemenea deoarece mai au şi unghiul $\widehat{BAH}$ comun. Obţinem: $\frac{AB}{AG}=\frac{AH}{AB}$ sau $\frac{AB}{FD}=\frac{CE}{AB}$, deci $AB^2=CE\cdot FD$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd secanta CE și paralelele AE, BC avem măs $\widehat{AEF}$ + măs $\widehat{DCB}$ = $= 180°$ (unghiuri interne). Dar am arătat că $\widehat{ABF} = \widehat{DCB}$, deci măs $\widehat{ABF}$ + + măs $\widehat{AEF} = 180°$, adică $ABFE$ este patrulater inscriptibil.

2°. Avem: măs $\widehat{BHC'} = 90°$ — măs $\widehat{HBC'}$ = măs $\hat{A}$, deci $\widehat{BHC'} = \hat{A}$ și analog $\widehat{AHC'} = \hat{B}$, $\widehat{AHB'} = \hat{C}$. Notăm $BC = a$, $AC = b$, $BA = c$. În triunghiul ABB' avem $AB' = c \cos A$, iar în triunghiul AHB' avem $AB' = HA \sin C$; rezultă că $HA = \frac{c}{\sin C} \cos A$. În triunghiul ABA' avem $BA' = c \cos B$, iar în triunghiul BHA' avem $BA' = HA' \operatorname{tg} C$; rezultă că $HA' = \frac{c}{\sin C} \cos B \cos C$. În

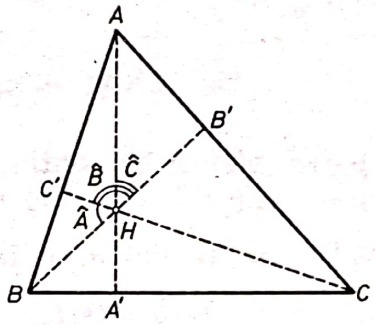


Fig. M.B.31

mod analog obținem că: $HB = \frac{a}{\sin A} \cos B$, $HC = \frac{b}{\sin B} \cos C$ și $HB' = = \frac{a}{\sin A} \cos C \cos A$, $HC' = \frac{b}{\sin B} \cos A \cos B$. Teorema sinusurilor dă $\frac{a}{\sin A} = = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Putem scrie: $HA' \cos A + HB' \cos B + HC' \cos C = = 2R \cos A \cos B \cos C + 2R \cos A \cos B \cos C + 2R \cos A \cos B \cos C = = 6R \cos A \cos B \cos C$.

Apoi avem:

$$\frac{HA}{HA'} + \frac{HB}{HB'} + \frac{HC}{HC'} = \frac{\cos A}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B}{\cos A \cos C} + \frac{\cos C}{\cos A \cos B} =$$

$$= \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{-\cos A \cdot \cos(B + C) - \cos B \cos(A + C) - \cos C \cos(A + B)}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$= \frac{-\cos A \cos B \cos C + \cos A \sin B \sin C - \cos A \cos B \cos C + \cos B \sin A \sin C}{\cos A \cos B \cos C} -$$

$$- \frac{\cos A \cos B \cos C + \cos C \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin C \sin A}{\cos C \cos A} -$$

$$- 3 = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

3°. Notăm raza cercului căutat (D) cu $\lambda > 0$ și dacă D este centrul său atunci $y_D = \lambda$, $x_D = 2 \pm DE$. În triunghiul dreptunghic CED avem $CD = 1 + \lambda$, $CE = |3 - \lambda|$ și atunci $DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 6\lambda - 9} = \sqrt{8\lambda - 8} = 2\sqrt{2(\lambda - 1)}$, cu condiția $\lambda \geqslant 1$. Rezultă $x_D = 2 \pm 2\sqrt{2(\lambda - 1)}$. Ecuațiile cercurilor căutate vor fi:

$$(x - 2 \mp 2\sqrt{2(\lambda - 1)})^2 + (y - \lambda)^2 - \lambda^2 = 0, \text{ unde } \lambda \in [1, +\infty)$$

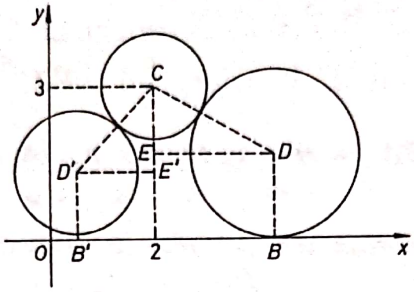


Fig. M.B.32

4°. Unind O cu cele patru vîrfuri se obțin patru tetraedre astfel încît Vol $(ABCD)$ = Vol $(OBCD)$ + Vol $(OCDA)$ + Vol $(ODBA)$ + Vol $(OABC)$. Dar, Vol $(ABCD) = \frac{1}{3}$ Aria $(BCD) \cdot a$ și Vol $(OBCD) = \frac{1}{3}$ Aria $(BCD)\alpha$; atunci $\frac{\text{Vol } (OBCD)}{\text{Vol } (ABCD)} = \frac{\alpha}{a}$. Analog obținem: $\frac{\text{Vol } (OCDA)}{\text{Vol } (ABCD)} = \frac{\beta}{b}$, $\frac{\text{Vol } (ODBA)}{\text{Vol } (ABCD)} = \frac{\gamma}{c}$ și $\frac{\text{Vol } (OABC)}{\text{Vol } (ABCD)} = \frac{\delta}{d}$.

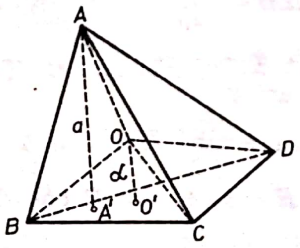


Fig. M.B.33

Adunînd cele patru relații avem:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = \frac{\text{Vol } (OBCD) + \text{Vol } (OCDA) + \text{Vol } (ODBA) + \text{Vol } (OABC)}{\text{Vol } (ABCD)} =$$

$$= \frac{\text{Vol } (ABCD)}{\text{Vol } (ABCD)} = 1.$$

XX. 1°. Deoarece:

$$|2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x, \text{ dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right); \\ 2x - 1, \text{ dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

și

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0); \\ x, & \text{dacă } x \in [0, \infty), \end{cases}$$

rezultă

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0); \\ 1, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ 4x - 1, & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Observînd că pe fiecare din cele 3 subintervale funcția este liniară și folosind, de pildă, următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	5	1	1	3	$+\infty$

se poate trasa graficul funcției date.

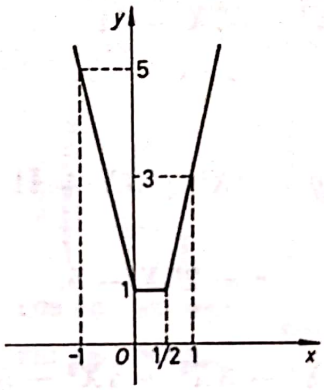


Fig. M.B.34

2°. Folosind metoda inducției matematice, avem:

a) pentru $n = 10$, inegalitatea este adevărată, deoarece:

$$1024 = 2^{10} > 10^3 = 1000;$$

b) presupunînd că pentru un $k \in \mathbf{N}$, k fixat, $10 \leqslant k < n$ are loc inegalitatea:

$$2^k > k^3,$$

să arătăm că:

$$2^{k+1} > (k+1)^3.$$

Observăm mai întîi că:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^3,$$

ultima inegalitate fiind adevărată în baza ipotezei de inducție. Pe de altă parte:

$$2k^3 > (k+1)^3,$$

echivalentă cu:

$$k^3 > 3k^2 + 3k + 1$$

este adevărată pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 10$, deoarece

$$k > 3 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2}, \quad (\forall)\, k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 10.$$

Aşadar:

$$2^{k+1} > 2k^3 > (k+1)^3$$

deci

$$2^{k+1} > (k+1)^3$$

prin urmare:

$$2^n > n^3, (\forall) n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 10.$$

3°. Efectuînd împărţirea găsim:

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 & X^2 - 3X + 1 \\ \cline{2-2} -2X^4 + 6X^3 - 2X^2 & 2X^2 + 3X + 11 \\ \cline{1-1} \quad 3X^3 + 2X^2 - 5X & \\ \quad -3X^3 + 9X^2 - 3X & \\ \cline{1-1} \quad\quad 11X^2 - 8X + 6 & \\ \quad\quad -11X^2 + 33X - 11 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 25X - 5 & \end{array}$$

prin urmare, cîtul este:

$$q = 2X^2 + 3X + 11$$

iar restul:

$$r = 25X - 5.$$

Notînd:

$$f = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$$

şi

$$g = X^2 - 3X + 1$$

avem

$$f = gq + r.$$

În plus,

$$\text{grad } r = 1 < 2 = \text{grad } g.$$

4°. Funcţia dată are numai o asimptotă orizontală la $\pm\infty$. Într-adevăr:
a) funcţia nu poate avea asimptotă verticală fiind definită pe $\mathbf{R}$:
b) cum:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

şi

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + x^2} = 0,$$

funcţia admite ca asimptotă pe

$$y = 0.$$

5°. Ţinînd seama că:

$$I = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{4 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}},$$

ultimele două integrale putînd fi calculate, prima direct iar a doua prin părţi, adică:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \left(-x\sqrt{4 - x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}dx\right) = \left(-\sqrt{3} + \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx\right)$$

Prin urmare:

$$I = 4\ \arcsin\frac{1}{2} + \sqrt{3} - I$$

adică:

$$2I = 4\cdot\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

deci

$$I = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

XXI. 1°. Deoarece $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ şi pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $\varphi \in \mathbf{R}$ $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$, ceea ce se verifică imediat prin inducţie, rezultă:

$$A^n = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4} \\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

Elementele lui A^n sînt $\frac{1}{3^n}\cos\frac{n\pi}{4}$, $\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{4}$, $-\frac{1}{3^n}\sin\frac{n\pi}{4}$, $\frac{1}{3^n}\cos\frac{n\pi}{4}$ şi au limita egală cu zero pentru $n \to \infty$ (se aplică faptul că dacă $a_n \to 0$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ este un şir mărginit, atunci $a_n \cdot b_n \to 0$).

2°. Legea este bine definită şi este comutativă, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$. Dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci

$$x*(y*z) = x*[a(y + z) - yz] = a[x + a(y + z) - yz] - x[a(y + z) - yz] = ax + a^2(y + z) - ayz - axy - axz + xyz;$$

de pe altă parte,

$$(x*y)*z = [a(x + y) - xy]*z = a[a(x + y) - xy + z] - z[a(x + y) - xy] = a^2(x + y) - axy + az - azx - azy + xyz.$$

Punînd condiția de asociativitate, rezultă că pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$, avem $ax + a^2(y + z) = a^2(x + y) + az$, adică $ax + a^2z = a^2x + az$, de unde $a^2 = a$. Rezultă $a = 0$ sau $a = 1$.

Pentru $a = 0$ legea este definită prin $x*y = -xy$ și are elementul neutru $e = -1$.

Pentru $a = 1$, $x*y = x + y - xy$ și elementul neutru este $e = 0$.

3°. Polinomul f este de forma

$$f(x) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n, \text{ cu } a_k \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Conform ipotezei, numerele $f(0) = a_n$ și $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ sînt impare. Dacă prin absurd f ar avea o rădăcină întreagă x_1 aceasta ar rezulta impară deoarece este un divizor al numărului impar a_n. Așadar, $x_1 = 2k + 1$ cu $k \in \mathbf{Z}$ și $f(2k + 1) = 0$. Dar $f(2k + 1) = a_0(2k + 1)^n + a_1(2k + 1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(2k + 1) + a_n = a_0(\mathfrak{M}2 + 1) + a_1(\mathfrak{M}2 + 1) + \ldots + a_{n-1}(\mathfrak{M}2 + 1) + a_n = \mathfrak{M}2 + a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$ par + impar = impar. Se ajunge la o contradicție cu faptul că $f(2k + 1) = 0 =$ par.

4°. Domeniul de definiție este indicat în enunț: $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Limitele în extremitățile domeniului de definiție sînt:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1 \text{ și } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Asimptotele: $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta, iar $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Deoarece $f'(x) = \dfrac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2}$, $x \in D$, rezultă tabloul de variație

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	$-\frac{1}{2}$	‖	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	‖	1	$\searrow$	0

Graficul este indicat în figura M.B. 35.

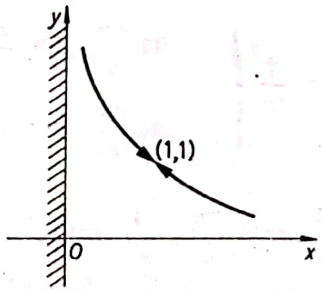


Fig. M.B.35

Soluțiile ecuației date sînt abscisele punctelor de intersecție ale graficului $y = f(x)$ cu dreapta $y - 1 = m(x - 1)$, $m \in \mathbf{R}$. Dacă $m \geqslant 0$, atunci ecuația nu are soluție; dacă $-\frac{1}{2} < m < 0$, ecuația are o unică soluție reală $x_1 > 1$, iar dacă $m < -\frac{1}{2}$ are o soluție între 0 și 1. În fine pentru $m = -\frac{1}{2}$ ecuația nu are soluții.

Discuția numărului de rădăcini reale ale ecuației se poate face și direct, fără ajutorul graficului. Anume, ecuația se scrie echivalent $\ln x - x + 1 - m(x - 1)^2 = 0$, $(x > 0, x \neq 1)$ și se folosește șirul lui Rolle.

5°. Avem

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & \text{dacă } x\in(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)\\ \sqrt{1-x^2} & \text{dacă } x\in(-1,\ 1).\end{cases}$$

Dar

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C,\ \text{pe intervalul } (-1,\ 1)\ \text{și}$$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C,\ \text{pe intervalul } (-\infty,-1]$$

și $[1,\ \infty)$.

Primitivele căutate sînt funcțiile F: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln(-x+\sqrt{x^2-1})+k, & x\in(-\infty,-1]\\ \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+k+\frac{\pi}{4}, & x\in(-1,\ 1)\\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+k+\frac{\pi}{2}, & x\in[1,\ \infty),\end{cases}$$

unde k este o funcție constantă oarecare.

XXII. 1°. Deoarece $\widehat{ABP}=90°$, punctul P este diametral opus lui A și $\widehat{ACP}=90°$. Așadar M este ortocentrul triunghiului APN și ca atare $NM\perp AP$.

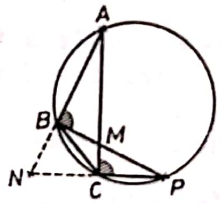


Fig. M.B.36

Punctele B și C sînt fixe, A este mobil și măs. $\widehat{BAC}=$ *constant*. Atunci măs. $\widehat{BNC}=$ *constant* și ca atare măs $\widehat{BMC}$ este *constantă*. Locul geometric al lui M este un arc de cerc trecînd prin B și C.

2°. Avem $QA\cdot QB=R^2-OQ^2$ și $PC\cdot PD=R^2-OP^2$ (R fiind raza cercului iar O centrul lui). Avem de arătat că $R^2-OQ^2-(R^2-OP^2)=PQ^2$, adică $OP^2=OQ^2+PQ^2$, ceea ce este evident.

3°. Presupunem mai întîi că fiecare sferă este tangentă la cîte trei fețe ale tetraedrului (figura M.B. 37a)).

Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele celor patru sfere; ele formează un tetraedru regulat cu latura $2r$, al cărui centru de greutate G coincide (din motive de simetrie) cu cel al tetraedrului regulat dat. Fie H proiecția lui G pe planul $O_2O_3O_4$. Avem $GA'=\frac{1}{4}h=\frac{l\sqrt{6}}{12}$, h fiind înălțimea tetraedrului dat. Apoi $GH=\frac{1}{4}h'=\frac{2r\sqrt{6}}{12}$ ($h'=$ înălțimea tetraedrului $O_1O_2O_3O_4$). Deoarece $GA'=GH+HA'=GH+r$, rezultă $\frac{l\sqrt{6}}{12}=\frac{2r\sqrt{6}}{12}+r$, de unde $r=\frac{l}{2(\sqrt{6}+1)}=\frac{l(\sqrt{6}-1)}{10}$.

Există și un al doilea caz, cel în care fiecare din fețele tetraedrului este tangentă la cîte o singură sferă (figura M.B. 37)b). Centrele celor patru sfere formează din nou un tetraedru regulat de latură $2r$, al cărui centru de greutate G coincide cu cel al tetraedrului regulat dat. Avem $GA' = \frac{1}{4}h = \frac{l\sqrt{6}}{12}$, $O_1G = \frac{3}{4}h' = \frac{r\sqrt{6}}{2}$; apoi $GA' = O_1G + O_1A' = O_1G + r$, deci $\frac{l\sqrt{6}}{12} = \frac{r\sqrt{6}}{2} + r$, de unde $r = \frac{3-\sqrt{6}}{6}\,l$.

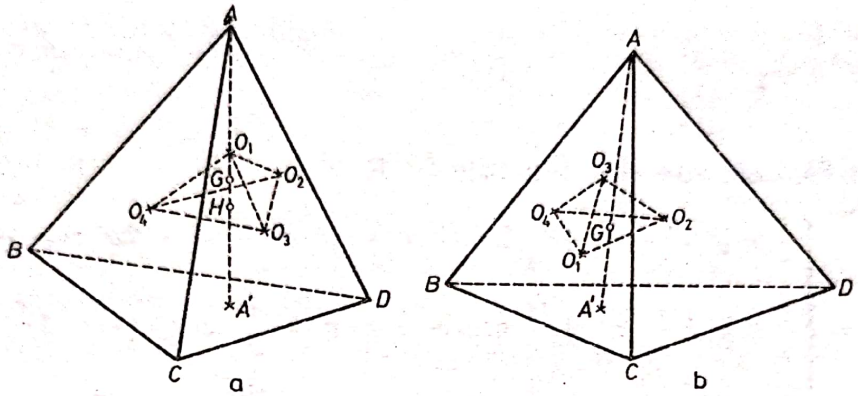


Fig. M.B.37

4°. Deoarece $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$ și $2R \geqslant a$, rezultă $R(b + c) \geqslant 2R\sqrt{bc} \geqslant a\sqrt{bc}$. Egalitatea termenilor extremi are loc dacă și numai dacă $b + c = 2\sqrt{bc}$ și $a = 2R$ deci dacă și numai dacă $b = c$ și $\hat{A} = 90°$. [O altă soluție se obține folosind teorema sinusurilor].

5°. Dacă $n = 0$ ecuația devine $z^{-1} = \bar{z}(z \neq 0)$ deci $|z| = 1$ și are o infinitate de soluții. Dacă $n = 1$, atunci $\bar{z} = 1$ deci $z = 1$ și dacă $n = 2$, se obține $z = \bar{z}$ și orice z real este soluție.

Presupunem acum $n \geqslant 3$ și fie $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \geqslant 0$. Ecuația devine

$$r^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta] = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

Pentru $r = 0$ se obține soluția $z = 0$ și pentru $r \neq 0$, din $r^{n-1} = r$ rezultă $r = 1$ și $n\theta = 2k\pi$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ecuația admite atunci soluțiile $z = 0$ și $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

XXIII. 1°. Fie α rădăcina dublă comună. Atunci $\alpha^4 + a\alpha^2 + b\alpha + 2 = 0$, $4\alpha^3 + 2a\alpha + b = 0$, $\alpha^3 - 3\alpha + 2c = 0$, $3\alpha^2 - 3 = 0 (12\alpha^2 + 2a \neq 0,\ 6\alpha \neq 0)$. Rezultă $\alpha = 1$ sau $\alpha = -1$. Pentru $\alpha = 1$ se obțin valorile $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$ și pentru $\alpha = -1$, valorile $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$. Soluțiile se determină imediat: în primul caz acestea sînt $x_{1,2} = 1$; $x_{3,4} = -1 \pm i$ și respectiv $x_{1,2} = 1$; $x_3 = -2$ iar în cazul secund $x_{1,2} = -1$; $x_{3,4} = 1 \pm i$ și respectiv $x_{1,2} = -1$; $x_3 = 2$.

2°. Avem $N = 5^{2n-1}(5^{3n+1} + 1 + 5^{3n+2}) = 5^{2n-1}(1 + 5 \cdot 125^n + 25 \cdot 125^n)$. Dar $125^n = (124 + 1)^n = (\mathfrak{M}31 + 1)^n = \mathfrak{M}31 + 1$ și atunci

$$N = 5^{2n-1}[1 + 5(\mathfrak{M}31 + 1) + 25(\mathfrak{M}31 + 1)] = 5^{2n-1}(\mathfrak{M}31 + 1 + 5 + 25) = \mathfrak{M}31 \text{ (multiplu de 31)}.$$

Se poate da și o soluție folosind inducția după n.

3°. Relația din enunț se scrie echivalent $xyxy = xxyy$; înmulțind la stînga cu x^{-1} rezultă $yxy = xyy$ și apoi înmulțind la dreapta cu y^{-1} se obține $yx = xy$, oricare ar fi $x, y \in G$. Așadar, grupul G este comutativ.

4°. Condiția necesară este ca $f'(1) = 0$ sau $f'(-1) = 0$. Dar

$$f'(x) = \frac{x^3 + 2x - a}{(x^2+1)^{3/2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Se găsesc valorile $a = +3$ și respectiv $a = -3$, ambele acceptabile.

Pentru $a = 3$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2+1}}$. Intersecțiile graficului cu axele sînt $(0, 0)$; $(3, 0)$. Limitele la capete $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, iar asimptotele sînt $y = x - 3$ (spre $+\infty$) și $y = -x + 3$ (spre $-\infty$). Tabloul de variație este următorul:

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	∞

iar graficul:

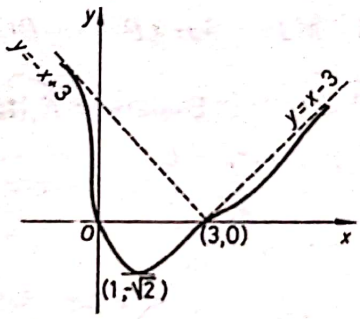


Fig. M.B.38

5°. Pe fiecare din intervalele deschise $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ funcția este continuă (fiind elementară). În punctele $x = -1$ și $x = 1$, funcția f nu este continuă, avînd limita $-\infty$. Rămîne de studiat continuitatea lui f în origine. Avem $f(0) = -2$ și $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = -2$, deci f este continuă în punctul $x = 0$.

Integrala cerută este

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx.$$

Deoarece

$$\int \frac{1}{x^2} \ln(x^2-1)\, dx = -\frac{1}{x} \ln(x^2-1) + \ln \frac{x-1}{x+1} + C \text{ pentru } x > 1 \text{ și}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \ln(x^2+1)\, dx = -\frac{1}{x} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C \text{ pentru } x > 1,$$

rezultă după calcule,

$$I = \frac{1}{2} \ln 5 + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 2 - \ln(2 - \sqrt{3}) - 2 \operatorname{arctg} 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

XXIV. 1°. Avem măs $\widehat{EAC} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} \cdot 2\pi\right) = \frac{2\pi}{5}$, măs $\widehat{AED} = \frac{3\pi}{5}$ deci $AF \parallel DE$ $\left(\text{deoarece } \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi\right)$. În mod similar, $DF \parallel AE$.

Deoarece $AE = DE$, rezultă că patrulaterul $AFDE$ este un romb.

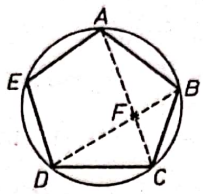


Fig. M.B.39

În triunghiul ABF avem măs $\widehat{BAF} = \frac{\pi}{5}$ și $AB = AF$.

Atunci $BF = 2AB \sin\frac{\pi}{10}$ și $\frac{DF}{BF} = \frac{AB}{BF} = \frac{AB}{2AB \sin\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2 \sin 18°}$.

2°. În triunghiul BCD, CA și DE sînt mediane deci M este centrul de greutate al triunghiului BCD. Ducînd $MP \parallel AB$ $(P \in |BC|)$, rezultă $\frac{PC}{BC} = \frac{MC}{AC} = \frac{2}{3}$ deci $PC = \frac{2}{3}BC$ și ca atare P este fix. Deoarece $\widehat{PMC} \equiv \widehat{BAC}$ $(= 90°)$, locul geometric al lui M este cercul de diametru PC.

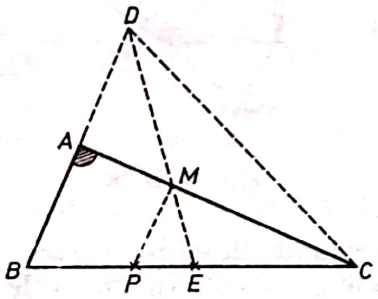


Fig. M.B.40

3°. Fie OO' înălțimea din O, $OM \perp AB$. Unim M cu C și M cu O'. Avem $OO' \perp (ABC)$ și $OM \perp AB$ deci $O'M \perp AB$. Apoi $OC \perp (OAB)$, deoarece $OC \perp OA$, $OC \perp OB$. Deci $OM \perp AB$ și ca atare $CM \perp AB$. deci $O' \in CM$. În mod similar O' aparține celorlalte înălțimi ale triunghiului ABC.

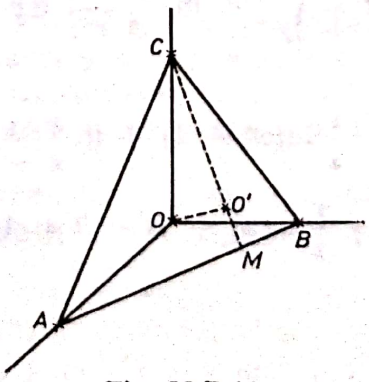


Fig. M.B.41

Scanned with OKEN Scanner

Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OM = \frac{a}{2}$, $O'M = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Prin urmare $OO'^2 = OM^2 - O'M^2 = \frac{a^2}{6}$ și $OO' = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Volumul cerut va fi $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

[Se putea de asemenea observa că $V = \frac{OA \cdot OB}{2} \cdot \frac{OC}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$].

4°. Din teorema sinusurilor, rezultă $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$, și relația din enunț devine $a + b + c = 2R\sqrt{2}$, adică $p = R\sqrt{2}$. Atunci $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a\sqrt{2}}{2p} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (deoarece $a < p$). Apar două cazuri:

I: $\hat{A} < \frac{\pi}{4}$. Deoarece $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$, rezultă $\hat{B} < \frac{\pi}{4}$ și $\hat{C} < \frac{\pi}{4}$, deci

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \frac{2\pi}{4}\text{; caz exclus.}$$

II: $\hat{A} > \frac{3\pi}{4}$ deci $\pi - (\hat{B} + \hat{C}) > \frac{3\pi}{4}$ de unde $\hat{B} + \hat{C} < \frac{\pi}{4}$.

[O altă soluție se obține folosind relația $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, de unde rezultă $4\cos^3\frac{A}{2} < \sqrt{2}$ deci $\cos\frac{A}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Așadar, $\hat{A} > \frac{\pi}{2}$. Pe de altă parte, raționînd ca mai sus, rezultă $\sin A < \frac{\sqrt{2}}{2}$ deci $\hat{A} > \frac{3\pi}{4}$].

5°. Pentru $n = 2$ rezultă $(\cos\alpha + z\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + z\sin 2\alpha$ deci $\cos^2\alpha + 2z\cos\alpha\sin\alpha + z^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2z\sin\alpha\cos\alpha$. Atunci $z^2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha$; cum α este arbitrar, rezultă în mod necesar $z^2 = -1$ și $z = \pm i$. Formula lui Moivre arată că aceste valori pentru z satisfac relația din enunț.

XXV. 1°. Se pun condițiile $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, $3 - x \geqslant 0$, obținîndu-se $x \in (-\infty, 2] \cup \{3\}$. Inecuația se scrie echivalent $x^2 - 5x + 6 \geqslant 3 - x$, de unde $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. În final, rezultă $x \in (-\infty, 1] \cup \{3\}$.

2°. Deoarece $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (pentru $n \geqslant p + 1$; $n, p \in \mathbf{N}$), rezultă relațiile

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^{k+1} &= C_n^{k+1} + C_n^k,\\
C_n^{k+1} &= C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^k\\
C_{n-1}^{k+1} &= C_{n-2}^{k+2} + C_{n-2}^k\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_{k+2}^{k+1} &= C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k
\end{aligned}$$

și adunînd aceste relații, rezultă relația din enunț.

3°. Avem $f(X + 2) = X^4 + 9X^3 + 30X^2 + (a + 44)X + 2a + b + 24$ și $f(X - 2) = X^4 - 7X^3 + 18X^2 + (a - 20)X + b - 2a + 8$. Restul împărțirii lui $f(X + 2)$ la $X + 1$ este valoarea lui $f(X + 2)$ pentru $X = -1$ adică $a + b + 2$. Restul împărțirii lui $f(X - 2)$ la $X - 1$ este $b - a$. Atunci condițiile din enunț se scriu $a + b + 2 = -18$, $b - a = -12$, de unde $a = -4$, $b = -16$. [Se pot pune și direct condițiile $f(x + 2)|_{x=-1} = -18$ și $f(x - 2)|_{x=1} = -12$ adică $f(1) = -18$, $f(-1) = -12$, fără a calcula explicit $f(X + 2)$ și $f(X - 2)$ etc.].

Scanned with OKEN Scanner

4°. Intersecțiile cu axele sînt: (0, 0), (4, 0). Graficul nu are asimptote. Apoi $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ și tabloul de variație este:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$(f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	∞

Graficul este de forma:

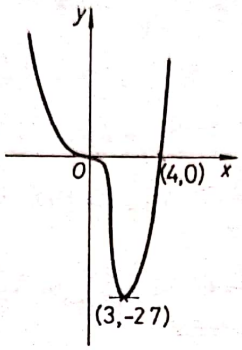


Fig. M.B.42

Intersectînd graficul cu dreapta $y = -m$ rezultă următoarea discuție: dacă $m < 0$ ecuația are două soluții reale; pentru $m = 0$, $x = 0$ este rădăcină triplă iar $x = 4$, simplă; pentru $0 < m < 27$ ecuația are două soluții reale. În fine, dacă $m = 27$, atunci $x = 3$ este rădăcină dublă (celelalte rădăcini fiind complexe), iar dacă $m > 27$, ecuația nu are soluții reale. [Se poate da și o soluție folosind șirul lui Rolle].

5°. Cele două grafice se intersectează în punctele $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$, (4, 3), (7, 0). Pentru $x \leqslant 0$, $0 < x < 3$, $3 < x < 4$, $x > 7$ se obțin regiuni nemărginite între curbele indicate; pentru $4 \leqslant x \leqslant 7$, rezultă $-1 + \frac{4}{x+3} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$ și aria respectivă este

$$A = \int_4^7 \left[-\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7) + 1 - \frac{4}{x-3} \right] dx = 9 - 8 \ln 2.$$

XXVI. 1°. Fie A' mijlocul lui BC și M, N intersecțiile lui PQ cu BC și cu paralela prin A la BC. Atunci $\frac{PC}{PA} = \frac{MC}{AN}$ (deoarece $\triangle PCM \sim \triangle PAN$); apoi $\frac{QB}{QA} = \frac{MB}{AN}$ ($\triangle QMB \sim \triangle QAN$) și $\frac{PC}{PA} + \frac{QB}{QA} = \frac{MB + MC}{AN} = \frac{2MA'}{AN} = \frac{2GA'}{AG} = 1$.

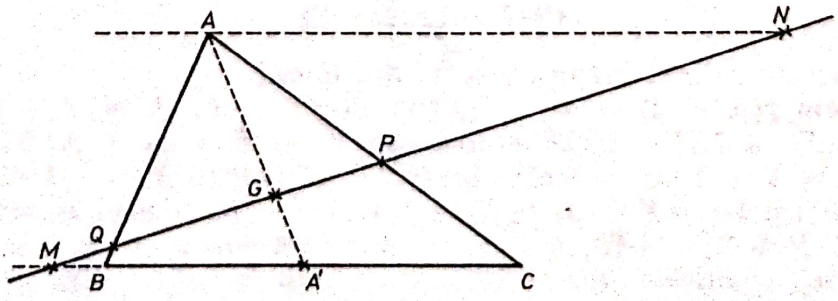


Fig. M.B.43

2°. Fie D intersecția înălțimii din A cu cercul circumscris triunghiului ABC. Avem $\widehat{HBC} \equiv \widehat{HAC}$ $(= 90° - \widehat{ACB})$ și $\widehat{CBD} \equiv \widehat{HAC}$ $\left(= \text{măs}\frac{\widehat{DC}}{2}\right)$. Atunci $\widehat{HBC} \equiv \widehat{CBD}$ și $\triangle HBA' \equiv \triangle DBA'$ de unde $HA' \equiv A'D$ și ca atare simetricul lui H față de BC este D.

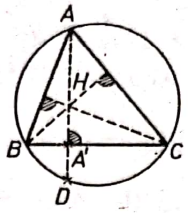


Fig. M.B.44

Apoi $A'B = c \cos B$ și $\dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \dfrac{\sin C}{\cos C} \cdot \dfrac{\cos B \cos C}{\sin (B + C)} = \dfrac{\sin C \cos B}{\sin A}$.

Relația de demonstrat devine

$$c \cos B = \frac{a \sin C \cos B}{\sin A} \quad \text{adică} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{și este evidentă.}$$

3°. Dreptele AM, AN determină un plan. Folosind puterea punctului A pentru cercul de intersecție al planului cu sfera, rezultă

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AO'^2} - \overline{O'Q^2}$$

și ca atare, $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AO^2} - \overline{OO'^2} - (r^2 - \overline{OO'^2}) = \overline{AO^2} - r^2$.

4°. Avem $\cos \hat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{m^2 + n^2 - (m + n - 1)^2}{2mn} = \dfrac{2m + 2n - 2mn - 1}{2mn}$

deci $\cos \hat{C} = \dfrac{1 - 2(m - 1)(n - 1)}{2mn}$.

Dacă $m \geqslant 2$ și $n \geqslant 2$, atunci $\cos \hat{C} < 0$ și unghiul $\hat{C}$ rezultă obtuz (iar $\hat{A}$ și $\hat{B}$ sînt ascuțite). Dacă $m = 1$ și $n \geqslant 1$, atunci $\cos \hat{C} = \dfrac{1}{2n}$; $a = 1$, $b = n$, $c = n$ și triunghiul rezultă isoscel cu toate unghiurile ascuțite. Iar dacă $m \geqslant 1$, $n = 1$, rezultă $a = m$, $b = 1$, $c = m$ și triunghiul este de asemenea isoscel cu toate unghiurile ascuțite.

5°. Deoarece $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ și notînd $\cos x = t$, ecuația devine $(2\lambda - 1)(2t^2 - 1) - 3t + \lambda - 2 = 0$, adică $2(2\lambda - 1)t^2 - 3t - (\lambda + 1) = 0$. Dacă $2\lambda - 1 = 0$, atunci $t = -\dfrac{1}{2}$ și $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$. Dacă $2\lambda - 1 \neq 0$, atunci se obțin pentru t două valori și anume $t_1 = -\dfrac{1}{2}$ $\left(\text{cu } x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$ și $t_2 = \dfrac{\lambda + 1}{2\lambda - 1}$. Dacă $-1 \leqslant \dfrac{\lambda + 1}{2\lambda - 1} \leqslant 1$, adică $\lambda \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ atunci ecuația admite și soluțiile $x = \pm \arccos \dfrac{\lambda + 1}{2\lambda - 1} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Dacă $\lambda \in (0, 2)$, atunci ecuația admite numai soluțiile $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, cu $k \in \mathbf{Z}$ arbitrar.

Scanned with OKEN Scanner

XXVII. 1°. Ecuația nu admite soluția $x = 0$ și este deci echivalentă cu

$$x^2 - (m-1)x + m - \frac{m-1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Punînd $x + \frac{1}{x} = y$ rezultă $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ și ecuația devine $y^2 - (m-1)y + m - 2 = 0$. Se obțin soluțiile $y_1 = 1$ și $y_2 = m - 2$. Pentru $y = 1$ se obține $x + \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$ deci $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Pentru $y = m - 2$ se obține $x + \frac{1}{x} = m - 2$ deci $x^2 - (m-2)x + 1 = 0$. Discriminantul este $\Delta = (m-2)^2 - 4 = m^2 - 4m$. Dacă $m \in (0, 4)$, atunci ecuația inițială are patru soluții complexe. Dacă $m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, atunci ecuația are două rădăcini complexe și două rădăcini reale. Pentru $m = 0$, ecuația are două rădăcini complexe și $x = -1$ dublă și în fine pentru $m = 4$, două rădăcini complexe și $x = 1$ dublă.

2°. Avem $n^2 + 2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3$ și $n^2 + 2$ este divizibil cu $n + 1$ dacă și numai dacă 3 este divizibil cu $n + 1$. Așadar, $n \in \{-4, -2, 0, 2\}$.

3°. Fie $Q(X)$ și $R(X)$ cîtul și respectiv restul împărțirii lui $f(X)$ la $(X-a)(X-b)$. Atunci $\operatorname{gr} R(X) = 1$ deci $R(X) = mX + n$ și rezultă egalitatea de polinoame

$$f(X) = (X-a)(X-b) \cdot Q(X) + mX + n.$$

Atunci $f(a) = ma + n$ și $f(b) = mb + n$, de unde

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \text{ și } n = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}.$$

4°. a) Fie $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Putem presupune că $a = \frac{a_1}{N}$, $b = \frac{b_1}{N}$, $c = \frac{c_1}{N}$ cu a_1, b_1, c_1, N întregi ($N \neq 0$). Dacă d este cel mai mare divizor comun al lui $|a_1|$, $|b_1|$, $|c_1|$, atunci $a_1 = d \cdot m$, $b_1 = d \cdot n$, $c_1 = d \cdot p$ cu m, n, p întregi fără nici un divizor prim comun. Se observă că $x = \frac{1}{N}(a_1 + b_1\sqrt[3]{2} + c_1\sqrt[3]{4}) = \frac{d}{N}(m + n\sqrt[3]{2} + p\sqrt[3]{4})$ și notăm $a' = \frac{d}{N}$.

b) Presupunem $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$. Dacă $c \neq 0$, atunci $b^2 - 4ac > 0$; rezultă $\sqrt[3]{4} = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\sqrt[3]{2}$ deci $4 = -\frac{a^3}{c^3} - 3\frac{a^2}{c^2}\frac{b}{c}\sqrt[3]{2} - 3\frac{a}{c}\cdot\frac{b^2}{c^2}\sqrt[3]{4} - 2\frac{b^3}{c^3}$ adică $4c^3 + a^3 + 2b^3 = -3a^2b\sqrt[3]{2} - 3ab^2\sqrt[3]{4} = 4c^3 + a^3 + 2b^3 = -3a^2b\sqrt[3]{2} + \frac{3ab^2}{c}(a + b\sqrt[3]{2})$ și în mod necesar $-3a^2b + \frac{3ab^3}{c} = 0$ (altminteri $\sqrt[3]{2}$ ar rezulta rațional). Așadar, $ab(b^2 - ac) = 0$ și se ajunge la o contradicție. Rămîne $c = 0$ deci $a + b\sqrt[3]{2} = 0$ și în mod necesar $a = 0$, $b = 0$. c) Se verifică ușor că tripletul $(K, +, 0)$ este grup abelian și $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ este monoid, iar înmulțirea este distributivă față de adunare. Rămîne de arătat doar că orice element nenul $x = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \in K$ (deci $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) admite un invers relativ la înmulțire. Se observă că există $u, v, w \in \mathbb{Q}$ astfel încît $(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})(u + v\sqrt[3]{2} + w\sqrt[3]{4}) = 1$ deoarece aceasta revine la faptul că sistemul liniar $au + 2cv + 2bw = 1$, $bu + av + 2cw = 0$, $cu + bv + aw = 0$ admite soluții, ceea ce se verifică ușor.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Fie $a \in \mathbf{Z}$ astfel încît $f(-a) = 0$. Atunci $f(X) = (X + a) \cdot g(X)$, unde $g(X)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Rezultă $f(0) = a \cdot g(0)$, $f(1) = (1 + a) \cdot g(1)$, ..., $f(n) = (n + a) \cdot g(0)$ și este suficient de arătat că $a(a + 1) \ldots (a + n)$ este divizibil cu $(n + 1)!$. Se știe că produsul oricăror $k (k \in \mathbf{N}^*)$ numere întregi consecutive este divizibil cu $k!$.

XXVIII. 1°. Deoarece $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$, rezultă

$$x_n = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2) \cdot n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}, \text{ pentru orice } n \geqslant 2.$$

Evident $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

2°. Se știe că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$, deci $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \alpha(x)$ unde $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x) = 0$. Limita din enunț devine

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x + \frac{x^3}{6} - x + x^3 \cdot \alpha(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + x^3 \cdot \alpha(x) - 2x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^n}.$$

Dacă $n = 0$, 1 sau 2, atunci limita există și este nulă. Dacă $n = 3$, limita există și este egală cu $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{6} + \alpha(x) - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$. Pentru $n \geqslant 4$ limita nu există.

3°. În punctele $x_0 \in \mathbf{R}$ unde $f(x_0) \neq 0$ rezultă că $f(x_0) > 0$ sau $f(x_0) < 0$ și funcția f păstrează semnul respectiv într-o vecinătate V a lui x_0 (deoarece f este continuă în x_0). Atunci $|f| = f$ sau $-f$ în V, deci $|f|$ rezultă derivabilă în punctele unde $f(x_0) \neq 0$. (Se folosește faptul că derivabilitatea într-un punct este o proprietate locală). Rămîne de studiat derivabilitatea lui f în punctele unde $f(x_0) = 0$, adică existența limitei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)| - |f(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{x - x_0}.$$

4°. Fie $\varphi(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbf{R}$; evident $\varphi'(x) = e^x - 1$ și funcția φ are tabloul de variație

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Se observă că $\varphi(x) \geqslant 0$, deci $e^x \geqslant x + 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Avem $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$ deci $e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și ca atare $\int_0^1 e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}$. De asemenea, pentru orice $x \in [0, 1]$ avem $e^{-x} \leqslant e^{-x^2}$ deci $1 - \frac{1}{e} = \int_0^1 e^{-x} dx \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dx$ și este suficient să observăm că $1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{e}$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Avem $I_n = \int_0^1 x^{2n} \cdot \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ și notînd $K_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, rezultă $I_n = K_n - K_{n+1}$.

Apoi $K_n = \int_0^1 x^{2n-1} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{2n-1} \cdot \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$= (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (2n-1)(K_{n-2} - K_n)$ deci $K_n = \frac{2n-1}{2n} K_{n-2}$, pentru orice $n \geqslant 2$. Deoarece $K_0 = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ și $K_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}$ unde s-a notat $x = \sin t$. Se calculează imediat K_n pentru orice n și apoi $I_n = K_n - K_{n+1}$.

XXIX. 1°. Notăm $\| AB \| = a$ și $\| AP \| = x$; deoarece triunghiurile APR, BPQ, CQR sînt congruente, rezultă $\| AR \| = a - x$. Atunci $PR^2 = AP^2 + AR^2 - 2\,AP \cdot AR \cos 60^\circ = x^2 + (a-x)^2 - x(a-x) = 3x^2 - 3ax + a^2$. Inegalitatea din enunț devine

$$4 \cdot \frac{(3x^2 - 3ax + a^2)\sqrt{3}}{4} \geqslant \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(deoarece aria unui triunghi de latură l este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$). Aceasta revine la $12x^2 - 12ax + 4a^2 \geqslant a^2$, adică $(2x-a)^2 \geqslant 0$ și este evidentă.

2°. Aplicînd teorema sinusurilor, rezultă

$\sin B + \sin A \sin C = \sin C + \sin B \sin A$ deci $\sin B - \sin C = \sin A (\sin B - \sin C)$ sau echivalent, $(\sin B - \sin C)(1 - \sin A) = 0$. Atunci sau $1 - \sin A = 0$

deci $A = \frac{\pi}{2}$, caz exclus; sau $\sin B - \sin C = 0$ deci $B = C$,

din nou exclus. Așadar propoziția considerată este falsă.

3°. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mijloacele muchiilor AB, BC, CD, BD, AC, AD respectiv. Avem $A_1A_2 \parallel A_3A_6$ și $A_1A_2 \equiv A_3A_6 \equiv \frac{1}{2}AC$ și $A_1A_2 \perp A_2A_3$ (deoarece $AC \perp BD$, conform ipotezei). Atunci patrulaterul $A_1A_2A_3A_6$ este un dreptunghi.

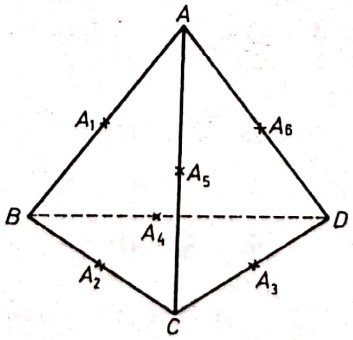


Fig. M.B.45

Notînd cu O mijlocul diagonalei A_1A_3, rezultă că O este egal depărtat de A_1, A_3, A_2, A_6. În mod similar, patrulaterul $A_1A_3A_4A_5$ este un dreptunghi și O este egal depărtat de A_1, A_3, A_4, A_5 și ca atare, există o sferă de centru O care trece prin toate punctele A_k, $1 \leqslant k \leqslant 6$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Aşadar, $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$, $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b$ deci $1=a^2+b^2=4\cos^2\frac{x-y}{2}$ de unde $\cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{1}{4}$; pe de altă parte, $ab=$ $=4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}=4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\frac{1}{4}=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ deci $2ab=\sin(x+y)$.

5°. Fixăm un sistem ortogonal de axe xOy. Orice două tangente perpendiculare la o parabolă $y^2=2px$ au ecuaţiile $y=mx+\frac{p}{2m}$, $y=-\frac{1}{m}x-\frac{pm}{2}$ (avînd coeficienţii unghiulari m şi $-\frac{1}{m}$ respectiv). Eliminăm m şi pentru aceasta, scădem ecuaţiile anterioare: $0=\left(m+\frac{1}{m}\right)x+\frac{p}{2}\left(\frac{1}{m}+m\right)$, de unde $x=-\frac{p}{2}$. Deci locul geometric al intersecţiei tangentelor perpendiculare la parabolă este dreapta $x=-\frac{p}{2}$, adică directoarea parabolei.

XXX. 1°. Folosind relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiilor date (relaţiile lui Viète), găsim:

$$\begin{cases} x_1+x_2=m+3 \\ x_1x_2=12m \end{cases}$$

şi, respectiv:

$$\begin{cases} y_1+y_2=m+1 \\ y_1y_2=m^2+11. \end{cases}$$

Prin urmare, relaţia considerată în enunţ devine:

$$\frac{12m+m^2+11}{m+1}\leqslant 2(m+3),$$

cu $m+1\neq 0$, de unde deducem că aceasta este adevărată pentru $m\geqslant 5$, adică pentru $m\in[5,\infty)$.

2°. *Metoda I.*

Ţinem seama că:

$$1(x+1)+2(x+2)+\ldots+n(x+n)=x+1+2x+2^2+\ldots+nx+n^2=$$
$$=x(1+2+\ldots+n)+1^2+2^2+\ldots+n^2$$

şi cum

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

rezultă egalitatea din enunţ.

Metoda a II-a

Notăm

$$P(x;\ n)=1(x+1)+2(x+2)+\ldots+n(x+n) \qquad (1)$$

şi, folosind inducţia matematică în raport cu n, arătăm că

$$P(x;\ n)=\frac{n(n+1)(2n+3x+1)}{6}. \qquad (2)$$

Pentru $n = 1$, găsim din (1):

$$P(x;\ 1) = x + 1$$

iar după (2):

$$P(x;\ 1) = \frac{2(3x + 3)}{6}$$

şi, evident:

$$x + 1 = \frac{2(3x + 3)}{6}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Presupunînd că (2) este adevărată pentru un k fixat, $k \in \mathbf{N}$, $k \leqslant n$, să arătăm că

$$P(x;\ k + 1) = \frac{(k + 1)\ (k + 2)\ [2(k + 1) + 3x + 1]}{6} \tag{3}$$

În baza lui (1), avem:

$$P(x;\ k + 1) = 1(x + 1) + 2(x + 2) + \ldots + k(x + k) + (k + 1)\ (x + k + 1) =$$

$$= \frac{k(k + 1)\ (2k + 3x + 1)}{6} + (k + 1)\ (x + k + 1) =$$

$$= \frac{(k + 1)\ (2k^2 + 3kx + k + 6x + 6k + 6)}{6} = \frac{(k + 1)\ (k + 2)\ (2k + 3x + 3)}{6}$$

deci (3) este adevărată, $\forall x \in \mathbf{R}$.
Prin urmare, egalitatea din enunţ are loc $\forall n \in \mathbf{N}$ şi $\forall x \in \mathbf{R}$.

3°. Deoarece:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rezultă că, pentru $a_1 = 1$ şi $b_1 = 0$, avem:

$$a_2 = 1 + a_1 = 1 + 1$$

şi

$$b_2 = a_1 + b_1 = 1 + 0.$$

Presupunînd:

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & a_k & b_k \\ 0 & 1 & a_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cu:

$$a_k = 1 + a_{k-1},\ b_k = a_{k-1} + b_{k-1},$$

să arătăm că:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{k+1} & b_{k+1} \\ 0 & 1 & a_{k+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

unde:

$$a_{k+1} = 1 + a_k,\ b_{k+1} = a_k + b_k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & a_k & b_k \\ 0 & 1 & a_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_k + 1 & a_k + b_k \\ 0 & 1 & 1 + a_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deci

$$a_{k+1} = 1 + a_k, \; b_{k+1} = a_k + b_k, \; \forall k \in \mathbf{N}.$$

Pentru calcularea lui a_{n+1} și b_{n+1}, ținem seama că:

$$a_{n+1} = 1 + a_n = 1 + 1 + a_{n-1} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}} + a_1 = n + a_1,$$

deci

$$a_n = n$$

și

$$b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + a_{n-1} + b_{n-1} = \ldots = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + b_1 =$$

$$= n + (n-1) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

deci

$$b_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Așadar:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și, pentru $n = 100$, găsim:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & \frac{(100-1)\cdot 100}{2} \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

adică

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 4950 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4°. Să arătăm că grupul G este comutativ, adică $xy = yx$, $\forall x, y \in G$. Fie $x, y \in G$. Atunci:

$$x^2 = a, \; y^2 = a$$

deci

$$x^2 \cdot y^2 = a \cdot a = a$$

sau

$$a = xx \cdot yy \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, $xy \in G$, deci:

$$(xy)^2 = a$$

sau

$$xy \cdot xy = a \tag{2}$$

Din (1) și (2) găsim:

$$xx \cdot yy = xy \cdot xy$$

și înmulțind ambii membri ai ultimei egalități, la stînga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1}, găsim:

$$xy = yx. \tag{3}$$

Cum x și y au fost aleși arbitrari din G, rezultă că pentru orice $x, y \in G$, are loc (3) și demonstrația este completă.

5°. a) Pentru a dovedi că f este bijectivă:

— *Metoda I*

Arătînd că f este strict crescătoare (deci strict monotonă) pe $[0, 3]$ deducem că f este injectivă și dovedind că f este continuă pe același interval rezultă că este surjectivă. Prin urmare, f este bijectivă.

— *Metoda a II-a*

Să arătăm că din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in [0, 3]$, adică f este injectivă.

i) dacă $x_1, x_2 \in [0, 1]$, atunci:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - x_1} = 1 - \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow \sqrt{1 - x_1} = \sqrt{1 - x_2} \Rightarrow x_1 = x_2;$$

ii) dacă $x_1, x_2 \in (1, 3]$, atunci:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{2} = \frac{x_2 + 1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2;$$

iii) dacă $x_1 \in [0, 1]$, $x_2 \in (1, 3]$ atunci:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - x_1} = \frac{x_2 + 1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{1 - x_1} = 1 - x_2$$

ceea ce este imposibil deoarece membrul din stînga este nenegativ iar cel din dreapta este negativ.

Prin urmare, f este injectivă.

Pentru a dovedi surjectivitatea, este suficient să arătăm că $\forall y \in [0, 2]$, $\exists x \in [0, 3]$, așa ca $f(x) = y$.

Fie $y \in [0, 1]$, fixat; atunci:

$$y = 1 - \sqrt{1 - x} \Rightarrow x = 1 - (1 - y)^2$$

și $x [\in 0, 1]$, deoarece:

$$y \in [0, 1] \Rightarrow 1 - y \in [0, 1] \Rightarrow (1 - y)^2 \in [0, 1] \Rightarrow x = 1 - (1 - y)^2 \in [0, 1].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $y \in (1, 2]$, atunci:

$$y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2y - 1$$

și $x \in (1, 3]$, deoarece:

$$y \in (1, 2] \Rightarrow 2y \in (2, 4] \Rightarrow x = 2y - 1 \in (1, 3].$$

Așadar, f este surjectivă.
Prin urmare f este bijectivă, fiind injectivă și surjectivă.
b) f fiind surjectivă, rezultă că $\exists\, f^{-1}$: $[0, 2] \to [0, 3]$ dată de:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - (1-y)^2, & y \in [0, 1]; \\ 2y - 1 \quad\quad , & y \in (1, 2], \end{cases}$$

sau

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - (1-x)^2, & x \in [0, 1]; \\ 2x - 1 \quad\quad , & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

c) Ținînd seama că:

$$f^2(x) = \begin{cases} 2 - x - 2\sqrt{1-x}, & x \in [0, 1]; \\ \frac{(x+1)^2}{4} \quad\quad , & x \in (1, 3] \end{cases}$$

găsim:

$$\int_0^3 f^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2 - x - 2\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{(x+1)^2}{4}\mathrm{d}x =$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - 2(-1)\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\,\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{29}{6}$$

deci

$$\int_0^3 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{29}{6}.$$

XXXI. 1°. Impunem condițiile necesare: $\frac{3-2x}{1-x} > 0$, $\log_2 \frac{3-2x}{1-x} \geqslant 0$; rezultă $\frac{3-2x}{1-x} \geqslant 1$, de unde $x \in (-\infty, 1) \cup [2, \infty)$. Inecuația se scrie echivalent sub forma $\log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1$, deci $\frac{3-2x}{1-x} < 2$. Rezultă $\frac{1}{1-x} < 0$, deci $x > 1$ și în final $x \in [2, \infty)$.

2°. Din relația a doua rezultă $xy + yz + zx = 0$. Notînd $xyz = b$, rezultă că x, y, z sînt rădăcinile ecuației $u^3 - b = 0$, conform relațiilor lui Viète: $x + y + z = 0$, $xy + yz + zx = 0$ și $xyz = b$. Din ecuație rezultă $x^3 = b$, $y^3 = b$, $z^3 = b$ și relația din enunț devine $3b^2 = ab^2$. Dar $b \neq 0$, deoarece $x, y, z \in \mathbb{C}/\{0\}$ și $b = xyz$, deci $a = 3$.

3°. Calculăm limita din enunț: $a_n = \lim_{x\to 0}(1 - x\sin nx)^{\frac{1}{-x\sin nx}\cdot\frac{-x\sin nx}{x^2}} =$

$$= \left[\lim_{x\to 0}(1 - x\sin nx)^{-\frac{1}{x\sin nx}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin nx}{nx}\cdot n} = e^{-n}.$$

Atunci $b_n = e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n}$, deci b_n este suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen $\frac{1}{e}$ și rația $\frac{1}{e}$. Rezultă $b_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}}$.

Deoarece $\frac{1}{e^n}$ este convergent și are limita zero, rezultă că b_n este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$.

4°. Avem: $x = 0$, $y = f(0) = 2a$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ asimptotă orizontală la ambele ramuri. Derivata întîia este $f'(x) = -\frac{16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Derivata a doua este $f''(x) = \frac{16a^3(3x^2-4a^2)}{(x^2+4a^2)^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{2a\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3a}{2}$	$\nearrow$	$2a$	$\searrow$	$\frac{3a}{2}$	$\searrow$	0
		$\cup$	i		M		i	$\cap$	

Graficul:

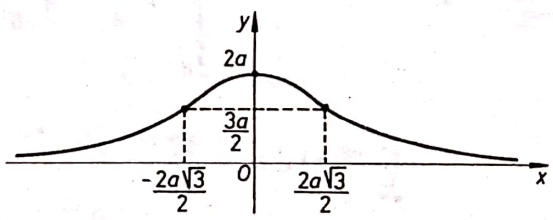


Fig. M.B.46

Avem: $\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^b \frac{8a^3}{x^2+4a^2}\mathrm{d}x = 16a^3\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4a^2} = 8a^2\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}$. Limita cerută este: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} 8a^2\operatorname{arctg}\frac{b}{2a} = 8a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi a^2$.

5°. Dacă $x, y \in G$, atunci $-1 < x < 1$ și $-1 < y < 1$, deci $|x| < 1$ și $|y| < 1$. Rezultă $|xy| = |x|\,|y| < 1$, adică $-1 < xy < 1$. Atunci avem $-1 < x * y < 1$; într-adevăr $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ conduce la inegalitățile $(1+x)(1+y) > 0$ și $(1-x)(1-y) > 0$, care sînt adevărate pentru $x, y \in (-1, 1)$. În concluzie operația $*$ este o operație algebrică internă pe G. Asociativitatea: $\forall x, y, z \in G$, $(x * y) * z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x * (y * z)$. Comutativitatea: $\forall\, x, y \in G$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy} = y * z$. Elementul neutru este $e = 0$: $\forall x \in G$, $x * 0 = 0 * x = x$. Orice element $x \in G$ este inversabil și inversul

este $-x$: $\forall x \in G,\ x * (-x) = \frac{x - x}{1 - x^2} = 0 = (-x) * x$. Am arătat că $(G, *)$ este grup comutativ. Dacă f este izomorfism, atunci $f(e) = e'$, deci în cazul nostru $f(1) = 0$; se obține $a = 1$. Funcția $f : \mathbf{R}_+ \to G$, $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, este bijectivă: $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) \in$ $\in (-1, 1)$, deoarece $-1 < \frac{x - 1}{x + 1} < 1$ conduce la inegalitățile evidente $-x < x$ și $-1 < 1$; $\forall y \in G = (-1, 1)$ există un unic $x = \frac{1 + y}{1 - y} \in \mathbf{R}_+$ astfel încît $f(x) = y$.

În sfîrșit, avem relația: $f(xy) = \frac{xy - 1}{xy + 1} = \frac{\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{y - 1}{y + 1}}{1 + \frac{x - 1}{x + 1} \frac{y - 1}{y + 1}} = f(x) * f(y)$,

$\forall x, y \in \mathbf{R}_+$, deci f este izomorfism.

XXXII. 1°. Patrulaterul $AMDB$ este inscriptibil dacă și numai dacă măs $\widehat{AMB} = 90°$. Scriind aria triunghiului ABC în două moduri, rezultă $BM = \frac{2ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. În final, $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}} =$ $= \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

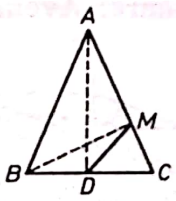


Fig. M.B.47

2°. Notăm cu x, y distanțele de la A și respectiv M la DE. Atunci $S_2 = \frac{DE \cdot x}{2}$, deci $DE = \frac{2S_2}{x}$.

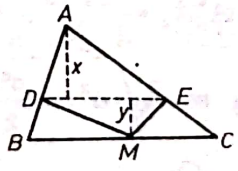


Fig. M.B.48

Aria $(ADME)$ = S_2 + aria $(DME) = S_2 + \frac{DE \cdot y}{2} = S_2 + S_2 \cdot \frac{y}{x} = S_2 \cdot \frac{x + y}{x}$.

Deoarece triunghiurile ADE și ABC sînt asemenea, rezultă $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{x}{x + y}\right)^2$.

Atunci $\frac{x + y}{x} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ și aria $(ADME) = S_2 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{S_1 S_2}$.

3°. Deoarece $AA'^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ (teorema medianei), din $\triangle ABA'$ rezultă: $c^2 + \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, deci $a^2 = b^2 + 3c^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-b^2-3c^2}{2bc} = -\frac{c}{b}$,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-\frac{a^2-b^2}{3}}{2ab} = \frac{a^2+2b^2}{3ab}, \text{ deci:}$$

$$\hat{A} = \arccos\left(-\frac{c}{b}\right) \text{ și } \hat{C} = \arccos\left(\frac{a^2+2b^2}{3ab}\right).$$

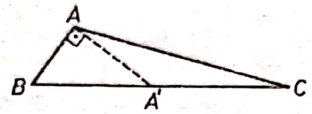


Fig. M.B.49

4°. Notăm cu O centrul de simetrie al cubului. Avem $A_2A_3 \parallel BD$, $A_1A_4 \parallel BD$, deci punctele A_1, A_2, A_3, A_4 sînt coplanare și notăm cu P_1 planul lor. În mod similar, punctele A_1, A_6, A_5, A_4 sînt conținute într-un plan P_2. Planele P_1, P_2 au în comun dreapta A_1A_4 care trece prin O și sînt perpendiculare pe AC' în O; într-adevăr $\widehat{AOA_1} = 90°$, $\widehat{AOA_2} = 90°$, etc. Atunci cele două plane coincid, deci punctele A_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, sînt coplanare. Avem $A_1A_2 = \frac{1}{2}CD' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; similar

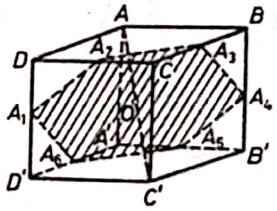


Fig. M.B.50

$A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Apoi în triunghiul $A_1A_2A_6$ avem: $A_1A_2 = A_1A_6 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și $A_2A_6 = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, deci $\cos \widehat{A_2A_1A_6} = \frac{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-\frac{3a^2}{2}}{2\frac{a^2}{2}} = -\frac{1}{2}$ și $\widehat{A_2A_1A_6} = 120°$. Similar $\widehat{A_1A_2A_3} = 120°$, etc.

În concluzie hexagonul $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ avînd toate laturile congruente și toate unghiurile congruente, este regulat.

5°. Ecuația se scrie echivalent: $3\sin^3 x = 2\sin x + \cos x(1-\cos^2 x)$, $3\sin^3 x = 2\sin x + \sin^2 x \cos x$ sau $\sin x(3\sin^2 x - 2 - \sin x \cos x) = 0$. Atunci $\sin x = 0$ cu soluțiile $x = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$ sau $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 = 0$. Putem scrie $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$; împărțind cu $\cos^2 x \neq 0$, rezultă ecuația: $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Atunci $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} x = -1$ cu soluțiile $x = \operatorname{arctg} 2 + k_2\pi$, $k_2 \in \mathbf{Z}$ și $x = -\frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_3 \in \mathbf{Z}$.

XXXIII. 1°. Impunem condițiile necesare: $3x-1\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$; $8-3x\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ și $5x\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$. Din primele două condiții rezultă $3x\in[2,\ 7]\cap\mathbf{N}$, deci $x=\frac{2}{3}$; $1;\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{7}{3}$. Numai valorile $x=1;\ 2$ verifică și a treia condiție. Apoi $x=1$ nu verifică ecuația și doar $x=2$ este soluție (verificînd ecuația).

2°. Avem relația: $b_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Rezultă

$$a_n=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Șirul a_n este convergent deoarece $\frac{1}{n+1}$ este convergent (are limita zero). Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

3°. Derivata funcției este $f'(x)=\frac{2(x^2-2x-4)}{(x^2+4)^2\sqrt{\frac{(x-2)^2+4}{x^2+4}}}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Rădăcinile derivatei sînt: $x_1=1-\sqrt{5}$ și $x_2=1+\sqrt{5}$. Din semnul derivatei rezultă:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$				$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ M	$\searrow$			$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ m	$\nearrow$	1

Deci valoarea maximă este $f(1-\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, iar valoarea minimă este $f(1+\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Altă metodă: notăm $f(x)=m\geqslant 0$; $\frac{(x-2)^2+4}{x^2+4}=m^2$ și obținem $(1-m^2)x^2-4x+4(2-m^2)=0$. Deoarece $x\in\mathbf{R}$ rezultă $\Delta\geqslant 0$, adică $m^4-3m^2+1\leqslant 0$. În final, $m\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$, deci valoarea minimă este $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, iar valoarea maximă este $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4°. Dacă $a\in(-\infty,\ -1]$, $I(a)=\int_1^3\frac{dx}{x-a+1}=\ln\frac{4-a}{2-a}$. Dacă $a\in(1,\ 3]$, $I(a)=\int_1^a\frac{dx}{a-x+1}+\int_a^3\frac{dx}{x-a+1}=\ln a(4-a)$. Dacă $a\in(3,\ +\infty)$, $I(a)=\int_1^3\frac{dx}{a-x+1}=\ln\frac{a}{a-2}$. Atunci $\lim\limits_{a\to\infty}I(a)=\lim\limits_{a\to\infty}\ln\frac{a}{a-2}=0$.

5°. Dacă legea $*$ este lege de compoziție internă și dacă este asociativă, atunci $\forall\ x,\ y,\ z\in A$ avem:
$(x*y)*z=4xyz-4(xy+xz+yz)+4x+4y+2(c-1)z-c=x*(y*z)=$
$=4xyz-4(xy+xz+yz)+2(c-1)x+4y+4z-c$. Rezultă $2(c-1)=4$, deci $c=3$ și atunci avem: $x*y=2xy-2x-2y+3=2(x-1)(y-1)+1$.

deci $x * y \neq 1$, deoarece $2(x-1)(y-1) \neq 0$ pentru $\forall\, x, y \in A$, adică $*$ este o lege de compoziţie internă pe $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Evident $x * y = y * x = 2xy - 2x - 2y + 3$, $\forall\, x, y \in A$, deci legea este comutativă. Notînd cu e elementul neutru, avem:

$$x * e = e * x = 2xe - 2x - 2e + 3 = x, \quad \forall\, x \in A; \text{ atunci } e = \frac{3}{2} \in A.$$

Notînd cu x' simetricul lui $x \in A$, avem: $x * x' = x' * x = e$, deci $2xx' - 2x - 2x' + 3 = \frac{3}{2}$. Rezultă $x' = \frac{4x-3}{4(x-1)}$, $\forall\, x \in A$. Avem $\frac{4x-3}{4x-4} \neq 1$, deci $x' \in A$. În concluzie, pentru $c = 3$, legea $*$ defineşte pe A o structură de grup abelian.

XXXIV. 1°. Relaţia din enunţ poate fi scrisă $QB^2(IC^2 - IP^2) = MB^2 \cdot IC^2$ sau, echivalent: $QB^2 \cdot PC^2 = MB^2 \cdot IC^2$.

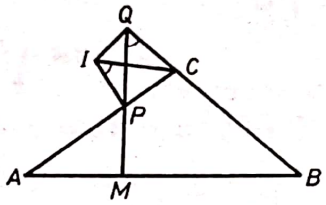


Fig. M.B.51

Patrulaterul $IQCP$ este inscriptibil deoarece măs $\widehat{IQC}$ + măs $\widehat{IPC} = 180°$. Triunghiurile PIC şi BMQ sînt asemenea deoarece $\widehat{PIC} = \widehat{PQC}$ şi măs $\widehat{IPC} =$ = măs $\widehat{BMQ} = 90°$. Rezultă: $\frac{IC}{QB} = \frac{PC}{MB}$, deci $QB^2 \cdot PC^2 = MB^2 \cdot IC^2$.

2°. Avem $AG = \frac{2}{3}\, m$; $GD = \frac{1}{3}\, m$, unde $m = AD = \sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}$ este lungimea medianei. Triunghiurile ABD şi CED sînt asemenea deoarece

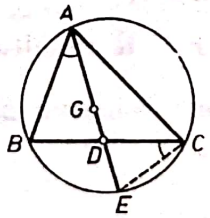


Fig. M.B.52

$\widehat{ADB} \equiv \widehat{CDE}$ (opuse la vîrf) şi măs $\widehat{BAD} =$ măs $\frac{\widehat{BE}}{2} =$ măs $\widehat{ECD}$. Rezultă:

$\frac{DE}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}$, deci $DE = \frac{a^2}{4m}$. Puterea punctului G este $\rho = -AG \cdot GE =$

$= -\frac{2}{3}\, m\left(\frac{1}{3}\, m + \frac{a^2}{4m}\right) = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

3°. Deoarece $EF \parallel BC$ triunghiurile AEM și ABD sînt asemenea, deci $\frac{AM}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{ME}{BD}$. Rezultă înălțimea calotei $MD = \frac{4}{5}$ și raza bazei mici a trunchiului de con $ME = \frac{12}{5}$. Atunci avem: aria calotei $= 2\pi RI = \frac{32\pi}{5}$. Aria laterală a trunchiului de con $= \pi G(R_1 + R_2) = \frac{27\pi}{5}$. Volumul trunchiului de con $= \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) = \frac{732\pi}{125}$.

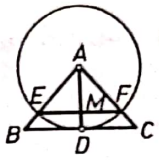


Fig. M.B.53

4°. Avem $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = a\sqrt{3}$. Ducem $EG \parallel AC$ și avem $FG = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $EF = \sqrt{EG^2 + FG^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. Apoi $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \frac{a\sqrt{22}}{2}$, iar $BF^2 = BE^2 + EF^2$, deci măs $\widehat{BEF} = 90°$. Din simetrie, rezultă că măs $\widehat{DEF} = 90°$, deci $EF \perp$ planul BED. Avem $OE = \sqrt{OA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$ și aria $(BED) = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$. Volumul $(FBDE) = \frac{\text{aria } (BED) \cdot EF}{3} = \frac{5a^3\sqrt{2}}{12}$.

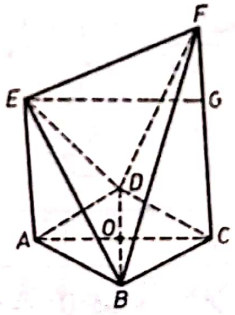


Fig. M.B.54

5°. Unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt în progresie aritmetică, deci $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$. Dar $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, deci $\hat{B} = 60°$ și $\hat{A} + \hat{C} = 120°$. Relația $\cos^2 B = \sin A \sin C$ devine $\sin A \sin C = \frac{1}{4}$ sau, echivalent: $\cos(A-C) - \cos(A+C) = \frac{1}{2}$. Rezultă $\cos(A - C) = 0$, $\hat{A} - \hat{C} = \pm 90°$, de unde, soluțiile $\hat{A} = 105°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 15°$ sau $\hat{A} = 15°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 105°$.

XXXV. 1°. Numerele reale x, y, z verifică următoarele condiții: $y^2 = xz$, $2(y + a) = x + z$, $(y + a)^2 = x(z + b)$. Din prima și a treia rezultă $y = \frac{bx - a^2}{2a}$ și, înlocuind în a doua, $z = \frac{a^2 + (b - a)x}{a}$. Din relația $y^2 = xz$, rezultă ecuația $(b-2a)^2x^2 - 2a^2(b+2a)x + a^4 = 0$, avînd rădăcinile reale (folosim ipoteza $ab > 0$) x_1, x_2,

unde $x_{1,2} = \frac{a^2(b+2a) \pm 2a^2\sqrt{2ab}}{(b-2a)^2}$. Soluțiile sistemului vor fi $\left(x_1, \frac{bx_1 - a^2}{2a}, \frac{a^2 + (b-a)x_1}{a}\right)$ sau $\left(x_2, \frac{bx_2 - a^2}{2a}, \frac{a^2 + (b-a)x_2}{a}\right)$. În cazul particular $a = 4$, $b = 32$ se obțin soluțiile (2, 6, 18) sau $\left(\frac{2}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{50}{9}\right)$.

2°. Impunem condițiile necesare: $\frac{4(y+1)}{y} > 0$; $\frac{2y}{y+1} > 0$; $\frac{(y+1)^2}{4y^2} > 0$. Rezultă $y \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Notînd $\log_2 \frac{y+1}{y} = m$, inecuația se scrie $(m+2)x^2 + 2(1-m)x + 2(m-1) > 0$. Condițiile pentru ca această inecuație să fie satisfăcută pentru orice $x \in \mathbf{R}$ sînt: $(1-m)^2 - 2(m+2)(m-1) < 0$ și $m + 2 > 0$. Rezultă $m > 1$, deci $\log_2 \frac{y+1}{y} > 1$, de unde, în final, $y \in (0, 1)$.

3°. Avem: $(1 - i) * (1 + i) = 2 - (1 - i^2) = 0$ și $i * 2 = i + 2 - 2i = 2 - i$. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$, atunci $z_1 * z_2 \neq 1$, deoarece $z_1 * z_2 - 1 = z_1 + z_2 - z_1z_2 - 1 = -(z_1-1)(z_2-1) \neq 0$, deci $z_1 * z_2 \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$. Asociativitatea: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$, $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3) = (z_1 + z_2 + z_3) - (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) + z_1z_2z_3$. Comutativitatea: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$, $z_1 * z_2 = z_2 * z_1 = z_1 + z_2 - z_1z_2$. Elementul neutru este $e = 0 : \forall z \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$, $z * 0 = 0 * z = 0 + z - 0 \cdot z = z$. Orice element $z \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$ are simetric $z' \in \mathbf{C}\setminus\{1\} : z * z' = z' * z = 0$, deci $z + z' - zz' = 0$, de unde $z' = \frac{z}{z-1} \in \mathbf{C}\setminus\{1\}$. În concluzie $(\mathbf{C}\setminus\{1\}, *)$ este grup abelian.

4°. Dreapta $x = 2$ este asimptotă verticală și punctele (0, 0), (2, 0), $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$ sînt pe grafic. Derivata întîia este

$$f'(x) = \frac{x(8x^2 - 33x + 36)}{4(x-2)^2}, \quad \forall x \neq 2.$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		2		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul:

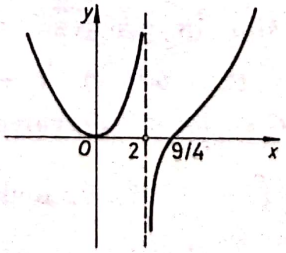


Fig. M.B.55

Avem: $\int_3^4 f(x)dx = \frac{1}{4}\int_3^4 \frac{4x^3 - 9x^2}{x-2}\,dx = \frac{1}{4}\int_3^4 \left(4x^2 - x - 2 - \frac{4}{x-2}\right)dx = \frac{263}{24} - \ln 2$.

5°. Vom folosi suma următoarei progresii geometrice:

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^k = \frac{1 - b^{k+1}}{1 - b} \quad (b \neq 1 \text{ și } k \in \mathbf{N}).$$ Atunci:

$$x_n = ac + ac^2(1 + b) + ac^3(1 + b + b^2) + \ldots + ac^{n+1}(1 + b + \ldots + b^n) =$$

$$= ac + ac^2 \frac{1 - b^2}{1 - b} + ac^3 \frac{1 - b^3}{1 - b} + \ldots + ac^{n+1} \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} =$$

$$= ac + \frac{a}{1 - b}[(c^2 + c^3 + \ldots + c^{n+1}) - (b^2c^2 + b^3c^3 + \ldots + b^{n+1}c^{n+1})] =$$

$$= ac + \frac{a}{1 - b}\left(c^2 \frac{1 - c^n}{1 - c} - b^2c^2 \frac{1 - b^nc^n}{1 - bc}\right).$$

Deoarece $|c| < 1$, $|bc| < 1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b^nc^n = 0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ac + \frac{a}{1 - b}\left(\frac{c^2}{1 - c} - \frac{b^2c^2}{1 - bc}\right) = \frac{ac}{(1 - c)(1 - bc)}.$$

XXXVI. 1°. Deoarece $BE \parallel AD$ avem $\widehat{ADF} \equiv \widehat{OBE}$; $\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOE}$ (opuse la vîrf) deci triunghiurile OAD și OBE sînt asemenea. Rezultă că $\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB}$. Analog, triunghiurile OAF și OBC sînt asemenea, deci $\frac{OA}{OC} = \frac{OF}{OB}$. Din cele două relații obținem $\frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OD}$, deci $EF \parallel CD$.

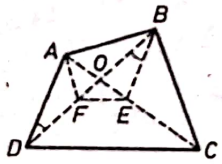


Fig. M.B.56

2°. Presupunînd $MA \geqslant MB$, $MA \geqslant MC$, avem de arătat că $MA = MB + MC$. Avem: măs $\widehat{AMC}$ = măs $\widehat{ABC} = 60°$, deci $AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \frac{1}{2}$.

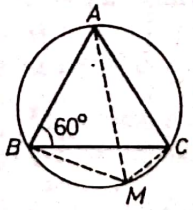


Fig. M.B.57

Similar, avem: $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \frac{1}{2}$. Scăzînd cele două relații obținem: $0 = MC^2 - MA \cdot MC - MB^2 + MA \cdot MB$, adică $(MC - MB)(MC + MB - MA) = 0$. Dacă $MB \neq MC$, rezultă $MA = MB + MC$, iar dacă $MB = MC$, atunci $MA = 2R$ și $MB = MC = R$, de unde obținem din nou $MA = MB + MC$.

3°. Deoarece $p \perp q$ și $CB \perp AB$, rezultă $CB \perp q$.

Atunci $CB \perp BD$, deci măs $\widehat{CBD} = 90°$. Apoi, $CB \perp q$, $BD \perp DA$, deci $CD \perp DA$ (conform teoremei celor trei perpendiculare), de unde măs $\widehat{CDA} = 90°$.

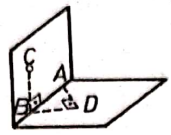


Fig. M.B.58

4°. Notăm cu r raza sferei înscrise în tetraedru și cu I centrul sferei. Aria bazei tetraedrului $ABCD$ este $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Înălțimea tetraedrului $ABCD$ este $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ și volumul tetraedrului este $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

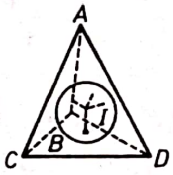


Fig. M.B.59

Tetraedrul $ABCD$ se descompune în patru piramide congruente $IBCD$, $IABD$, $IABC$, $IACD$ și volumul uneia din ele este $\text{vol}\,(IBCD) = \frac{r}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ra^2\sqrt{3}}{12}$. Dar $V = 4\,\text{vol}\,(IBCD)$, deci $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 4\frac{ra^2\sqrt{3}}{12}$, de unde $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

5°. Ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația:

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{2} + m \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{2} = \cos x,$$

sau $(m-1)(\cos 2x - \cos x) = 0$.

Deoarece $m \neq 1$, rezultă $\cos 2x = \cos x$ cu soluțiile $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, care, reprezentate pe cercul trigonometric, sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

XXXVII. 1°. Dacă $x \geqslant 0$ atunci ecuația se scrie: $x^2 - x = mx(x+1)$ sau $x[x(1-m) - (m+1)] = 0$, de unde $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{m+1}{1-m}$ $(m \neq 1)$. Impunem condiția $x_2 \geqslant 0$ și obținem $\frac{1+m}{1-m} \geqslant 0$, deci $m \in [-1, 1)$.

Dacă $x < 0$ atunci ecuația se scrie: $x^2 + x = mx(x+1)$ sau $x(x+1)(1-m) = 0$, de unde $x_3 = -1$ dacă $m \neq 1$. În concluzie, pentru $m \in (-1, 1)$ ecuația are trei rădăcini $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1+m}{1-m} > 0$, $x_3 = -1$, iar pentru $m = -1$ ecuația are rădăcinile $x_1 = x_2 = 0$ (dublă) și $x_3 = -1$.

2°. Din identitatea $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ avem $xy + yz + zx = 11$. Din identitatea: $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy + yz + zx) - 3xyz$ obținem $xyz = 6$. Rezultă că x, y, z sînt rădăcinile ecuației $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$, adică $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$. O soluție a sistemului este $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ și, deoarece sistemul este simetric rezultă că orice permutare a soluției $(1, 2, 3)$ este soluție a sistemului. În concluzie avem $3! = 6$ soluții.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Înmulțirea în $\mathbf{Z}_4[X]$ este asociativă și are elementul neutru 1, deci inversul $h(X)$ al polinomului $\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}$, dacă există, este unic. Fie $h(X)=a_0X^n+$ $+a_1X^{n-1}+a_2X^{n-2}+\ldots+a_n\in\mathbf{Z}_4[X]$; din egalitatea de polinoame $(\hat{2}X^2+\hat{2}X+$ $+\hat{3})h(X)=\hat{1}$ obținem relațiile:

$$\hat{2}a_0=\hat{0}$$
$$\hat{2}a_0+\hat{2}a_1=\hat{0}$$
$$\hat{3}a_0+\hat{2}a_1+\hat{2}a_2=\hat{0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{3}a_{k-1}+\hat{2}a_k+\hat{2}a_{k+1}=\hat{0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\hat{3}a_{n-2}+\hat{2}a_{n-1}+\hat{2}a_n=\hat{0}$$
$$\hat{3}a_{n-1}+\hat{2}a_n=\hat{0}$$
$$\hat{3}a_n=\hat{1}\ \text{(am presupus } n\geqslant 3).$$

Elementul $\hat{3}\in\mathbf{Z}_4[X]$ este inversabil și inversul său este $\hat{3}$. Din ultima relație obținem $a_n=\hat{3}$; din penultima relație rezultă $\hat{3}a_{n-1}=\hat{2}$, deci $a_{n-1}=\hat{2}$. Din următoarea relație obținem $\hat{3}a_{n-2}=\hat{2}$, deci $a_{n-2}=\hat{2}$ și apoi $\hat{3}a_{n-3}=\hat{0}$, de unde $a_{n-3}=\hat{0}$. Presupunem că $a_{k+1}=a_k=\ldots=a_{n-3}=\hat{0}$; atunci avem $\hat{3}a_{k-1}=\hat{0}$, de unde $a_{k-1}=\hat{0}$. Obținem în final $a_0=\hat{0}$, contradicție. Rezultă că $n\leqslant 2$ și pentru $n=2$ sistemul devine $\hat{2}a_0=\hat{0}$, $\hat{2}a_0+\hat{2}a_1=\hat{0}$, $\hat{3}a_0+\hat{2}a_1+\hat{2}a_2=\hat{0}$, $\hat{3}a_1+\hat{2}a_2=\hat{0}$, $\hat{3}a_2=\hat{1}$, cu soluția: $a_0=\hat{2}$, $a_1=\hat{2}$, $a_2=\hat{3}$, deci există $h(X)$ cu proprietatea cerută și anume $h(X)=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}$.

4°. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}_3)$ cu $A^2=I$. Obținem sistemul

$$\begin{cases}a^2+bc=\hat{1}\\ ab+bd=\hat{0}\\ ac+dc=\hat{0}\\ bc+d^2=\hat{1}\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}a^2+bc=\hat{1}\\ b(a+d)=\hat{0}\\ c(a+d)=\hat{0}\\ bc+d^2=\hat{1}.\end{cases}$$

$\mathbf{Z}_3$ este corp deci sistemul obținut conduce la sistemele:

$$\text{I}\begin{cases}a^2=\hat{1}\\ b=\hat{0}\\ c=\hat{0}\\ d^2=\hat{1}\end{cases}\quad\text{sau II}\begin{cases}a^2+bc=\hat{1}\\ a+d=\hat{0}\\ bc+d^2=\hat{1}.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din sistemul I obţinem soluţiile:

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

Din sistemul II obţinem: 1) $a = \hat{0}$, $d = \hat{0}$ sau 2) $a = \hat{2}$, $d = \hat{1}$ sau 3) $a = \hat{1}$ $d = \hat{2}$. Subcazul 1) conduce la relaţia $bc = \hat{1}$, de unde $b = c = \hat{1}$ sau $b = c = \hat{2}$ şi obţinem soluţiile $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

Subcazul 2) conduce la relaţia $bc = \hat{0}$ şi, pe lîngă soluţiile găsite din sistemul I, avem soluţiile: $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$. Subcazul 3) conduce la aceeaşi relaţie $bc = \hat{0}$ şi, pe lîngă soluţiile anterioare, avem: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$. În total avem 14 soluţii.

5°. Se verifică imediat că adunarea funcţiilor este asociativă şi comutativă. Elementul neutru la adunare este funcţia nulă $o(i) = 0$, $\forall i \in M$. Opusul unei funcţii $f \in A$ este funcţia $(-f)(i) = -f(i)$, $\forall i \in M$. Rezultă că A este grup abelian faţă de adunarea funcţiilor. Se verifică imediat că înmulţirea funcţiilor este asociativă şi comutativă. Apoi $\forall f, g, h \in A$ avem: $(f(g + h))(i) = f(i)((g + h)(i)) = f(i)(g(i) + h(i)) = f(i)g(i) + f(i)h(i) = (fg)(i) + (fh)(i)$, $\forall i \in M$, deci $f(g + h) = fg + fh$, adică înmulţirea este distributivă faţă de adunare. Elementul neutru la înmulţire este funcţia $1(i) = 1$, $\forall i \in M$. În concluzie, A este inel comutativ. Alegem funcţiile $f_1, f_2 \in A$ definite astfel: $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$ şi $f_2(0) = 1$, $f_2(1) = 0$. Atunci $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ şi $(f_1f_2)(0) = 0$. $1 = 0$, $(f_1f_2)(1) = 1 \cdot 0 = 0$, deci $f_1f_2 = 0$, adică inelul A are divizori ai lui zero.

XXXVIII. 1°. Avem $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ deci $f'(x) = P_1(x)e^{-x^2}$ cu $P_1(x)$ funcţie polinomială de gradul 1. Presupunem că $f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x)e^{-x^2}$ cu $P_{n-1}(x)$ funcţie polinomială de gradul $n - 1$. Atunci $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' = (P_{n-1}(x)e^{-x^2})' = P'_{n-1}(x)e^{-x^2} - 2x\,P_{n-1}(x)e^{-x^2} = (P'_{n-1}(x) - 2x\,P_{n-1}(x))e^{-x^2} = P_n(x)e^{-x^2}$, unde $P_n(x) = P'_{n-1}(x) - 2xP_{n-1}(x)$ este funcţia polinomială de gradul n, deoarece grad $P'_{n-1}(x) = n - 2$ şi grad $(-2xP_{n-1}(x)) = 1 + n - 1 = n$.

2°. Restricţia lui f la intervalele $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$ este continuă deoarece f este o compunere de funcţii elementare care sînt continue. Avem:

$$\lim_{\substack{x \to \frac{7}{2} \\ x < \frac{7}{2}}} f(x) = \left|\ln\left|\frac{7}{2} - 4\right|\right| = \ln 2; \quad \lim_{\substack{x \to \frac{7}{2} \\ x > \frac{7}{2}}} f(x) = a \sin 7\pi + b = b \text{ şi } f\left(\frac{7}{2}\right) = b.$$

Dacă $b = \ln 2$, f este continuă și în $x = \frac{7}{2}$; dacă $b \neq \ln 2$, f este discontinuă $x = \frac{7}{2}$. Avem: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{9}{2} \\ x < \frac{9}{2}}} f(x) = a \sin 9\pi + b = b$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{9}{2} \\ x > \frac{9}{2}}} f(x) = |\ln|\frac{9}{2} - 4\|| = \ln 2$ și $f\left(\frac{9}{2}\right) = b$. Dacă $b = \ln 2$, f este continuă și în $x = \frac{9}{2}$ dacă $b \neq \ln 2$, f este discontinuă în $x = \frac{9}{2}$. În concluzie $\forall\, a \in \mathbf{R}$, $b = \ln 2$, f este continuă pe $\mathbf{R}$ și $\forall a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq \ln 2$, f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$. Avem $\ln|X - 4| = 0$ dacă $|X - 4| = 1$, deci $x = 3$ și $x = 5$. Restricția lui f la intervalele $(-\infty, 3)$, $\left(3, \frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$, $(5, +\infty)$ este derivabilă deoarece f este o compunere de funcții elementare care sînt derivabile. Avem: $f'_s(3) = -1$, $f'_d(3) = +1$, deci în $x = 3$, f nu este derivabilă. Apoi: $f'_s(5) = -1$, $f'_d(5) = 1$, deci în $x = 5$, f nu este derivabilă. Dacă $b \neq \ln 2$, f nu este derivabilă în $x = \frac{7}{2}$ și nici în $x = \frac{9}{2}$ nefiind continuă în aceste puncte. Dacă $b = \ln 2$ avem: $f'_s\left(\frac{7}{2}\right) = 2$, $f'_d\left(\frac{7}{2}\right) = -2\pi a$. Dacă $a = -\frac{1}{\pi}$, f este derivabilă în $x = \frac{7}{2}$. Apoi $f'_s\left(\frac{9}{2}\right) = -2\pi a$, $f'_d\left(\frac{9}{2}\right) = -2$; dacă $a = \frac{1}{\pi}$ f este derivabilă în $x = \frac{9}{2}$.

În concluzie $\forall\, a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $b \neq \ln 2$, f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{3, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 5\right\}$; dacă $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right\}$, $b = \ln 2 f$ este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{3, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 5\right\}$; dacă $a = -\frac{1}{\pi}$, $b = \ln 2 f$ este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{3, \frac{9}{2}, 5\right\}$ și dacă $a = \frac{1}{\pi}$, $b = \ln 2$ f este derivabilă pe $\mathbf{R} \setminus \left\{3, \frac{7}{2}, 5\right\}$.

3°. Să stabilim mai întîi inegalitatea $e^{-1+t} > t$, $\forall\, t > 1$. Fie $f(t) = e^{-1+t} - t$, $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$. Avem $f'(t) = e^{-1+t} - 1 = 0$ pentru $-1 + t = 0$, deci $t = 1$. Obținem tabloul

t	1		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	$+$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Rezultă pentru $\forall\, t > 1$, $f(t) > 0$, adică $e^{-1+t} > t$.

Atunci $x_1 = e^{-1+a} > a = x_0$. Presupunem că $x_n > x_{n-1}$; atunci $x_{n+1} = e^{-1+x_n} > x_n$, deci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător.

Să presupunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ rezultă convergent și fie $l = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ (l finit). Trecînd la limită în relația de recurență $x_{n+1} = e^{-1+x_n}$ obținem $l = e^{-l+1}$, deci $l = 1$. Dar $x_n > x_0 = a > 1$, deci la limită obținem $l \geq a > 1$, contradicție. Rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit și atunci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Fie $x - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^3+x-2}{x^2+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$; deoarece $x^2+1>0$, $x^2+x+2>0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ rezultă că avem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Atunci

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2\operatorname{arctg} x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2\operatorname{arctg} 2 -$$

$$- 2\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}.$$

5°. Restricţia lui f la intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ este o funcţie continuă fiind o compunere de funcţii elementare continue. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = 1 \text{ şi } f(0) = 1,$$

deci f este continuă pe $\mathbf{R}$. Atunci f admite primitive. Putem scrie:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Dacă } x < 0 \\ 1 - x & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ x - 1 & \text{dacă } x \geqslant 1, \end{cases}$$

deci primitivele lui f au forma:

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1 & \text{dacă } x(-\infty, 0) \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \frac{x^2}{2} - x + C_3 & \text{dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Funcţia F fiind derivabilă pe $\mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$, deci rezultă condiţiile: $C_2 = C_1$ şi $C_3 = 1 + C_2$. Luînd $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} x + k & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ x - \frac{x^2}{2} + k & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \frac{x^2}{2} - x + k + 1 & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases} \qquad (k \in \mathbf{R})$$

se verifică uşor că F este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $F' = f$.

XXXIX. 1°. Cazul $b = c$ este evident deoarece înălţimea AD, bisectoarea AF şi mediana AE coincid. Analizăm doar cazul $c < b$ deoarece în cazul $c > b$ raţionamentul este perfect similar. Presupunem mai întîi că unghiul B este ascuţit; atunci D este între B şi C şi, deoarece oblicele AB, AC verifică relaţia $AB < AC$, rezultă că $BD < DC$. Dar $BD + DC = BC$, deci $BD < BE = \frac{BC}{2} < DC$, adică

D este între B și E. Din teorema bisectoarei avem $\frac{BF}{FC} = \frac{c}{b} < 1$, de unde $BF < FC$, deci $BF < BE = \frac{BC}{2} < FC$, adică F este între B și E. Rezultă că bisectoarea

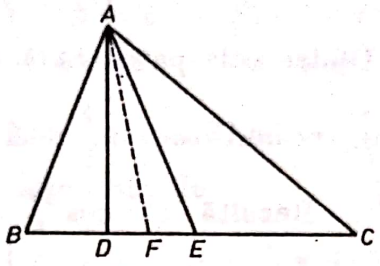


Fig. M.B.60

AF este între AB și AE. Avem: $\operatorname{tg} \widehat{BAD} = \frac{BD}{AD}$, $\operatorname{tg} \widehat{DAC} = \frac{DC}{AD}$, de unde $\operatorname{tg} \widehat{BAD} < \operatorname{tg} \widehat{DAC}$, deci $\widehat{BAD} < \widehat{DAC}$. Rezultă că $\widehat{BAD} < \frac{\hat{A}}{2} < \widehat{DAC}$, deci AD se află între AB și AF. În concluzie avem bisectoarea AF între AD și AE. Dacă unghiul B este obtuz sau drept atunci avem AB între AD și AE și cum am arătat că AF este între AB și AE (raționamentul nu se modifică) rezultă că AF este între AD și AE.

2°. Notînd $U_0 = 1$ avem: $U_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i \sin\frac{2k\pi}{6}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. Deoarece $|U_k| = 1$ rezultă că imaginile A_k ($k = 0, \ldots, 5$) în plan ale numerelor complexe U_k se află pe cercul de centru O și rază 1. Avem: $\widehat{A_1OA_0} = \arg(U_1) - \arg(U_0) = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{A_2OA_1} = \frac{\pi}{3}$; ...; $\widehat{A_0OA_5} = \frac{\pi}{3}$. Deci triunghiurile A_1OA_0, A_2OA_1, ..., A_0OA_5 sînt congruente și atunci $A_0A_1...A_5$ rezultă hexagon regulat avînd toate laturile congruente și toate unghiurile congruente; în plus, hexagonul este înscris în cercul de centru O și rază 1.

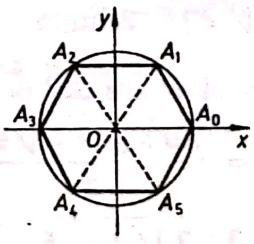


Fig. M.B.61

3°. Rădăcinile de ordinul cinci ale unității sînt $z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Cunoașterea rădăcinii $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$ ne-ar oferi valorile $\cos\frac{2\pi}{5}$ și $\sin\frac{2\pi}{5}$. Să calculăm rădăcina z_1 din ecuația $z^5 - 1 = 0$. Remarcăm că, în afara lui $z_0 = 1$, doar z_1 se află în primul cadran. Putem scrie $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, deci z_1 se află printre rădăcinile ecuației reciproce $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Scriem ecuația reciprocă sub forma $z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$ și notînd $z+\frac{1}{z}=t$ obținem: $t^2+t-1=0$ cu rădăcinile $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Atunci avem $z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și $z+\frac{1}{z}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, sau $2z^2-(\sqrt{5}-1)z+2=0$ și $2z^2+(\sqrt{5}+1)z+2=0$. Dintre cele patru rădăcini doar rădăcina $\frac{\sqrt{5}-1}{4}+$ $+\,i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ se află în primul cadran, deci $z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=$ $=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. Rezultă că $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ și atunci $\cos\frac{\pi}{5}=$ $=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4^2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4°. Din motive de simetrie perpendiculara $A'O$ pe plan $ABCD$ cade pe AC. Într-adevăr, ducem $A'E\perp AB$ și $A'F\perp AD$; din teorema celor trei perpendiculare rezultă $OE\perp AB$ și $OF\perp AD$.

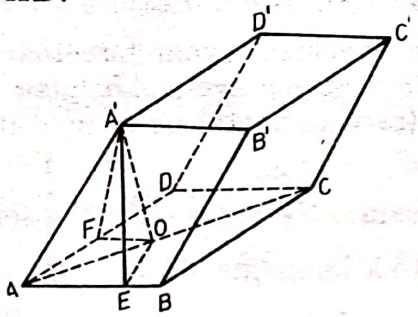


Fig. M.B.62

Din egalitatea romburilor $ABCD$, $ADD'A'$ rezultă $A'E\equiv A'F$, de unde triunghiurile $A'OE$ și $A'OF$ sînt congruente, deci $OE\equiv OF$, adică $O\in AC$. În rombul $ABCD$ avem $\hat{A}=30°$, $AC=2\,AB\,\sin 75°=6\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ și $BD=$ $=2\,AB\,\sin 15°=\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. Atunci aria $(ABCD)=\frac{AB\cdot BD}{2}=\frac{9}{2}$. În triunghiul $AA'E$ avem $AE=AA'\cos 30°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. În triunghiul AOE avem $AO=\frac{AE}{\cos 15°}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$. În sfîrșit în triunghiul $A'OA$ avem: $A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=3\sqrt{3\sqrt{3}-5}$. Atunci Vol $(ABCDA'B'C'D')=$ $=$ Aria $(ABCD)\cdot A'O=\frac{27}{2}\sqrt{3\sqrt{3}-5}$ cm^3.

5°. Calculăm lungimile laturilor celor două triunghiuri: $|AB|=3=|A'B'|$, $|AC|=4=|A'C'|$, $|BC|=5=|B'C'|$, deci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt congruente.

Izometria J este o transformare a planului care duce punctul $M(x,y)$ în punctul $M'(x',y')$, unde

$$\begin{cases} x'=ax+by+h \\ y'=cx+dy+k \end{cases}$$

cu $a, b, c, d, h, k \in \mathbf{R}$. Pentru a determina aceste constante impunem condițiile $J(A) = A'$, $J(B) = B'$, $J(C) = C'$ și obținem relațiile

$$\begin{cases} 7a + b + h = -\frac{2}{5} \\ 7a + 4b + h = 2 \\ 3a + b + h = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 7c + d + k = \frac{16}{5} \\ 7c + 4d + k = 5 \\ 3c + d + k = 0. \end{cases}$$

Rezultă soluțiile $a = -\frac{3}{5}$, $b = \frac{4}{5}$, $h = 3$ și $c = \frac{4}{5}$, $d = \frac{3}{5}$, $k = -3$. În concluzie izometria $J(M) = M'$ este dată de

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3. \end{cases}$$

XL. 1°. Ținînd seama că $3^{4x} - 3^{2x+1} + 3 > 0$ pentru orice x real și că

$$\log_9 7 = \frac{1}{2}\log_3 7,$$

rezultă că inecuația dată poate fi pusă sub forma

$$\log_3 (3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < \log_3 7 \tag{1}$$

și cum baza logaritmilor este supraunitară, deducem că (1) este echivalentă cu:

$$3^{4x} - 3^{2x+1} + 3 < 7$$

sau

$$(3^{2x})^2 - 3 \cdot 3^{2x} - 4 < 0. \tag{2}$$

Notînd:

$$3^{2x} = t > 0,$$

din (2), obținem:

$$t^2 - 3t - 4 < 0 \tag{3}$$

aceasta din urmă fiind adevărată pentru

$$t \in (-1, 4);$$

dar $t > 0$,

deci

$$t \in (0, 4)$$

adică

$$0 < 3^{2x} < 4$$

sau

$$2x \ln 3 < 2 \ln 2,$$

prin urmare

$$x < \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{4}$$

ceea ce arată că (1) este satisfăcută de acei $x \in \mathbf{R}$ care satisfac (4).

Scanned with OKEN Scanner

2°. Notăm cu A matricea dată. Deoarece determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ este nenul rezultă că rang $(A) \geqslant 2$. Calculăm determinanții:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 5\alpha - 7\beta - \gamma$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 5\alpha - 10\beta + 5\gamma$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 8\alpha - 10\beta + 6\gamma$$

Determinanții D_1, D_2, D_3 nu se anulează simultan decît pentru $\alpha = \beta = \gamma = 0$, deoarece sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 5\alpha - 7\beta - \gamma = 0 \\ 5\alpha - 10\beta + 5\gamma = 0 \\ 8\alpha - 10\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

are determinantul nenul.

În concluzie, dacă $\alpha = \beta = \gamma = 0$ avem rang $(A) = 2$; dacă cel puțin unul dintre parametrii α, β, γ este nenul avem rang $(A) = 3$.

3°. Ținînd seama că:

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, \text{ dacă } x < 1; \\ x - 1, \text{ dacă } x \geqslant 1, \end{cases}$$

rezultă:

$$f(x) = \begin{cases} (1 + x)e^{x-1}, \text{ dacă } x < 1; \\ (1 + x)e^{1-x}, \text{ dacă } x \geqslant 1. \end{cases} \tag{1}$$

Pentru studiul variației și trasarea graficului funcției date, parcurgem următoarele etape:

i) Domeniul de definiție:

$$x \in \mathbf{R},$$

fapt care rezultă din enunț.

ii) Intersecția cu axele:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

iii) Limitele la extremitățile domeniului de definiție:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 + x)e^{x-1} = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (1 + x)e^{1-x} = 0,$$

prin urmare, $y = 0$ este asimptotă orizontală.

Scanned with OKEN Scanner

iv) Graficul nu admite asimptote verticale, funcția fiind definită pe R. Asimptote oblice nu se mai caută, existînd asimptotă orizontală.

v) Studiul derivatei întîia:

Ținînd seama de (1), găsim

$$f'(x) = \begin{cases} (2+x)e^{x-1}, & \text{dacă } x < 1; \\ -x\,e^{1-x}, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$$

prin urmare:

x	$-\infty$			-2			0			1			$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\frac{2}{e}$	$+$	3	-1	$-$	$-$

și observăm că punctul de abscisă $x = -2$ este *punct de minim* al graficului funcției.

vi) Studiul derivatei a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} (3+x)e^{x-1}, & \text{dacă } x < 1; \\ (x-1)e^{1-x}, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$$

deci:

x	$-\infty$			-3				1			$+\infty$
f''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

și observăm că punctul de abscisă $x = -3$ este *punct de inflexiune* al graficului funcției.

vii) Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$-$	
f''		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{2}{e^4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

viii) Graficul funcției este prezentat în figura M.B.63.

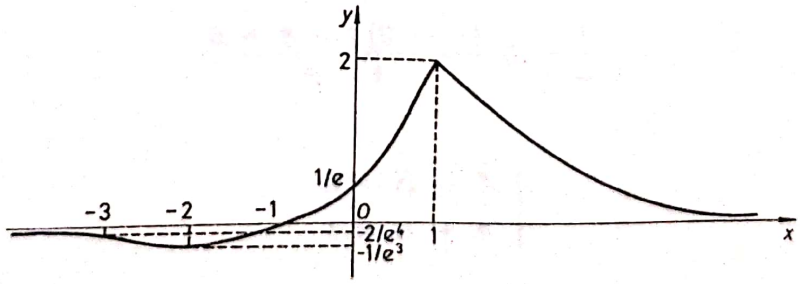


Fig. M.B.63

4°. Ținem seama că:

$$I(a) = \int_a^0 e^x(2x^2 - 3x)\,dx = 2\int_a^0 x^2 e\,dx - 3\int_a^0 xe^x\,dx$$

și pentru calculul celor două integrale procedăm prin metoda integrării prin părți.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd:

$$u = x^2;$$
$$dv = e^x\,dx,$$

găsim

$$du = 2x\,dx;\ v = e^x,$$

deci

$$\int_a^0 x^2e^x\,dx = x^2e^x\Big|_a^0 - 2\int_a^0 xe^x\,dx = -a^2e^a - 2\int_a^0 xe^x\,dx,$$

prin urmare:

$$I(a) = -2a^2e^a - 4\int_a^0 xe^x\,dx - 3\int_a^0 xe^x\,dx = -2a^2e^a - 7\int_a^0 xe^x\,dx$$

și

$$\int_a^0 xe^x\,dx = x\,e^x\Big|_a^0 - \int_a^0 e^x\,dx = -ae^a - e^x\Big|_a^0 = -ae^a - 1 + e^a$$

deoarece:

$$\left.\begin{array}{l} u = x; \\ dv = e^x\,dx \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} du = dx; \\ v = e^x \end{array}$$

Rezultă

$$\lim_{a\to-\infty} I(a) = 7.$$

5°. Calculăm mai întîi o primitivă a funcției f. Avem:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

sau

$$\frac{1}{1-t^2} \equiv \frac{(A-B)\,t + A + B}{1-t^2}$$

de unde

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases}$$

sau

$$A = B = \frac{1}{2},$$

prin urmare:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \int_0^x \frac{dt}{1+t}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar

$$f(x * y) = \int_0^{x*y} \frac{dt}{1-t^2} = \ln \sqrt{\frac{1+x*y}{1-x*y}} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}} = \ln \sqrt{\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}} = \ln \sqrt{\frac{(1+x)+y(1+x)}{(1-x)-y(1-x)}} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}} = \ln \left[\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right] = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} +$$

$$+ \ln \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + \int_0^y \frac{dt}{1-t^2} = f(x) + f(y).$$

Prin urmare

$$f(x * y) = f(x) + f(y)$$

ceea ce dovedeşte izomorfismul grupurilor $(G, *)$ şi $(\mathbf{R}, +)$.

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNȚURI

1. ALGEBRĂ

1°. Cu cîte zerouri se termină numărul C_{100}^{50}?

2°. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x(xy+y+1)=8 \\ y(xy+x+1)=5. \end{cases}$

3°. Să se arate că

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z|=1\} = \left\{\frac{k+\mathrm{i}}{k-\mathrm{i}} \mid k \in \mathbf{R}\right\}.$$

4°. Să se calculeze raportul $\frac{x}{y}$ știind că $2\lg x - \lg y = \lg\left(x+\frac{3y}{4}\right)$.

5°. Cîte rădăcini ale polinomului $P(X) = X^{1985} - 1$ — i sînt situate în primul cadran?

6°. Fie a, b, c, numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

7°. Pentru ce valori $x \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1} = 0,$$

cu $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, dat?

8°. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{mx^2-x+1} + \sqrt{mx^2+x+1} = x;$$

discuție după $m \in \mathbf{R}$.

9°. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + bX + c \in \mathbf{R}[X]$.

Să se arate că polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale, oricare ar fi b, $c \in \mathbf{R}$.

10°. Se consideră ecuația $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$, unde p este un parametru real. Să se determine p astfel încît rădăcinile reale x_1, x_2, x_3, x_4 ale ecuației să verifice relațiile:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$$ și apoi să se rezolve ecuația.

Scanned with OKEN Scanner

11°. Să se determine polinoamele $P = X^4 + mX^3 + nX^2 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$, care se divid cu derivata lor P'.

12°. Arătaţi că:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

13°. Să se determine m astfel încît mulţimea

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2mx + m + 2 = 0\} \cap (-\infty, 1]$$

să aibă două elemente.

14°. Să se arate că ecuaţia:

$$x^2 - a(a-2)x - (a-1)^2 = 0$$

are rădăcini reale pentru orice valori reale ale parametrului a şi să se determine a astfel încît:

$$x_1 + x_2 - 2a + 3 < 0.$$

15°. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 8x^2 + a = 0,$$

ştiind că rădăcinile sînt în progresie geometrică.

16°. Utilizînd o transformare de tipul $x = y + \alpha$, să se precizeze în ce condiţii ecuaţia:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se poate pune sub forma unei ecuaţii binome.

17°. Să se scrie sub formă algebrică (precizînd deci partea reală şi partea imaginară) rădăcinile complexe ale ecuaţiei:

$$x^4 - 4x^2 + 5 = 0.$$

18°. Să se rezolve inecuaţia:

$$\sqrt{x^2 + x} > 2x - 1.$$

19°. Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24},$$

pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

20°. Dacă x şi y sînt numere reale nenule, demonstraţi că:

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geqslant 0.$$

21°. Să se rezolve ecuaţia:

$$3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6.$$

22°. Să se rezolve ecuaţia exponenţială:

$$9 \cdot 2^{2x+2} + 4 \cdot 3^{2x+2} = 97 \cdot 6^x.$$

23°. Să se rezolve ecuaţia:

$$3^{2-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

24°. Să se determine toate perechile de numere reale (x, y) care verifică relaţiile:

$$|x-2|+|y-5|=2,$$
$$y=3+|x-2|.$$

25°. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3&=0\\
x_2+2x_3+3x_4&=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_8+2x_9+3x_{10}&=0\\
x_9+2x_{10}+3x_1&=0\\
x_{10}+2x_1+3x_2&=0.
\end{aligned}$$

26°. Să se arate că toate graficele funcţiilor de gradul al doilea

$$f_\alpha : \mathbf{R}\to\mathbf{R}(\alpha\in\mathbf{R}),$$
$$f_\alpha(x)=\alpha x^2-(8\alpha-1)x+7\alpha-1$$

trec prin două puncte fixe. Să se găsească coordonatele acestor puncte.

27°. Să se demonstreze că dacă rădăcinile polinomului:

$$X^2+pX+q$$

sînt reale, atunci şi rădăcinile polinomului:

$$X^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)pX+q\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

sînt reale, p, q, a fiind numere reale $(a\neq 0)$.

28°. Să se găsească restul împărţirii polinomului:

$$X^{2n}-X^n+X^4+1,$$

prin $(X-1)^2$.

29°. Arătaţi că:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -a & b & x & y\\ -a & -b & c & z\\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8\,abcd.$$

30°. Se dă matricea:

$$X=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Să se determine X^n, $n\in\mathbf{N}$.

31°. Să se determine parametrul α astfel încît matricea

$$\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&\alpha\end{pmatrix}$$

să fie inversabilă şi, în acest caz, să se găsească inversa.

Scanned with OKEN Scanner

32°. Într-o clasă sînt 26 de elevi și 15 eleve. În cîte moduri se poate forma cu aceștia o echipă de șah, care să cuprindă cinci jucători și în care să fie reprezentați și elevii și elevele.

33°. Să se arate că polinomul:

$$f = X^3 + 2$$

este ireductibil peste $\mathbf{Q}$. Să se scrie descompunerile lui f în factori ireductibili peste $\mathbf{R}$ și $\mathbf{C}$.

34°. Fie $G = \{E, A, B, C\}$, unde:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(Z)$ în raport cu înmulțirea matricilor și că formează grup comutativ în raport cu operația indusă.

2. GEOMETRIE

35°. Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trei versori avînd suma nulă. Să se arate că $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} \neq 0$.

36°. Să se arate că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ astfel încît $\hat{A} = 90°$, $\hat{A'} = 90°$ și $a^2b'c' = a'^2bc$ sînt asemenea.

37°. Într-o sferă se consideră un plan de secțiune astfel încît raportul ariilor celor două calote formate să fie egal cu k. Să se calculeze raportul volumelor celor două calote.

38°. Fie o sferă de diametru AB și α, β planele tangente la sferă în punctele A și B respectiv. Se consideră puncte $M \in \alpha$, $N \in \beta$ astfel încît dreapta MN să fie tangentă în T la sferă. Să se arate că punctul T este egal depărtat de planele ABM și ABN.

39°. Se consideră o piramidă $VABCD$ în care baza este un pătrat $ABCD$ cu lungimea laturii a, iar înălțimea este VA, avînd lungimea h. Să se calculeze razele sferelor înscrise și circumscrise piramidei.

40°. Arătați că, într-un patrulater inscriptibil cu diagonalele perpendiculare, perpendiculara din mijlocul unei laturi pe latura opusă trece prin intersecția diagonalelor.

41°. Fie O centrul unui cerc de rază R dată și d_1, d_2 două drepte paralele tangente la cerc. Tangenta dusă într-un punct variabil M de pe cerc (diferit de punctele de tangență ale dreptelor d_1, d_2) taie dreptele d_1, d_2 în punctele A_1, A_2. Să se arate că $MA_1 \cdot MA_2 = \text{const.}$

42°. În triunghiul oarecare ABC se înscrie dreptunghiul variabil $MNPQ$ astfel încît $M \in AB$, $N \in AC$, P și $Q \in BC$. Să se determine locul geometric al centrului dreptunghiului $MNPQ$.

43°. Fie Ox, Oy, Oz, trei semidrepte concurente în spațiu astfel încît $\widehat{xOy} = 45°$, $\widehat{xOz} = 60°$ și $\widehat{yOz} = 30°$. Să se afle unghiul diedru al planelor xOy și xOz.

44°. În tetraedrul regulat $ABCD$ fie α unghiul diedru dintre două fețe și β unghiul dintre o muchie și o față care nu conține acea muchie. Să se arate că $\cos^2 \beta = \cos \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

45°. Dintr-un punct A exterior unui plan se duc perpendiculara AO și oblicele AB, AC față de acest plan (O, B, C aparțin planului și nu sînt coliniare). Fie H și H' ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv OBC. Să se arate că dreapta HH' este perpendiculară pe planul ABC.

46°. Să se arate că orice plan dus prin mijloacele a două muchii opuse într-un tetraedru împarte acesta în două corpuri de volume egale.

47°. Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația $\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{1 + \cos 2x} = m$ admite soluții în intervalul $I = [0, \pi]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ să se determine soluțiile acestei ecuații care se găsesc în intervalul I.

48°. Să se arate că triunghiul în care:

$$3(\cos B + 2 \sin C) + 4 (\sin B + 2 \cos C) = 15,$$

este dreptunghic.

49°. Fie ABC un triunghi neisoscel și $D \in |BC|$ piciorul medianei din A. Să se arate că dacă:

$$\text{măs } \widehat{ABD} + \text{măs } \widehat{DAC} = 90°,$$

atunci triunghiul este dreptunghic în A.

50°. Într-un triunghi ABC înălțimea, bisectoarea și mediana împart unghiul A în patru unghiuri congruente. Să se calculeze unghiurile triunghiului.

51°. Să se arate că aria unui patrulater inscriptibil, avînd lungimile laturilor egale cu a, b, c și d, este dată de formula:

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d),$$

unde

$$2p = a + b + c + d.$$

52°. Două cercuri O_1 și O_2 sînt tangente exterioare în A. Prin acest punct se duce o secantă BAC. Prin punctele B și C se duc coardele paralele BD și CE. Să se arate că punctele D, A, E sînt coliniare.

53°. Se dau două cercuri C_1 și C_2 secante în A și B. Tangenta în A la cercul C_2 se intersectează cu cercul C_1 în D, iar tangenta în A la cercul C_1 se intersectează cu cercul C_2 în E. Să se arate că:

$$\overline{AD}^2 \cdot \overline{BE} = \overline{AE}^2 \cdot \overline{BD}.$$

54°. Fie $|AB|$ o coardă fixată într-un cerc dat, A', simetricul lui A față de centrul cercului, iar M un punct variabil pe arcul $\widehat{BA'A}$. Mediatoarea segmentului $|BM|$ taie dreapta AM în punctul P. Prin punctul de intersecție C al tangentelor în A și B la cerc se duce paralela cu tangenta în M la cerc, care taie dreapta AM în punctul Q.

i) Se cere locul geometric al punctului P cînd M descrie arcul $\widehat{BA'}$.

ii) Să se determine locul geometric al punctului Q cînd M descrie arcul $\widehat{BA'}$.

55°. Să se arate că:

$$4 \cos 20° \cos 80° \cos 63° + \sin 13° = \frac{\sin 53°}{2 \cos 40°}.$$

56°. Să se arate că:

$$E = \cos 10° \cos 100° - \cos 50° \cos 200° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

57°. Ştiind că:

$$\sin t + \cos t = m,$$

să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \sin^5 t + \cos^5 t.$$

58°. Să se determine valoarea lui a pentru care expresia:

$$E = \frac{4\cos^2 x + \cos 2x + \cos 2a}{\cos 2a - \cos 2x}$$

nu depinde de x.

59°. Să se arate că dacă una din egalităţile:

i) $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\sin(c+d)}{\sin(c-d)}$;

ii) $\dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}$;

iii) $\dfrac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \dfrac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)}$,

este adevărată, atunci şi celelalte două sînt adevărate.

60°. Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3 kx - \sin^3\left(\frac{\pi}{3} - kx\right)}{\sin kx + \sin\left(kx - \frac{\pi}{3}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^3 kx - \cos^3\left(\frac{2\pi}{3} - kx\right)}{\cos kx + \cos\left(\frac{\pi}{3} - kx\right)}.$$

61°. Să se determine soluţiile ecuaţiei:

$$\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} 4\theta = -1.$$

62°. Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei:

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{2}.$$

63°. Să se determine valorile lui $x \in [0, 2\pi]$ care satisfac ecuaţia:

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} = 0.$$

64°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1} = \frac{\pi}{4}.$$

65°. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$k(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

66°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg}(15° - x)\operatorname{tg}(35° - x)\operatorname{tg}(45° - x)\operatorname{tg} nx \operatorname{tg}(45° + x) \cdot \operatorname{tg}(55° + x)\operatorname{tg}(75° + x) = 1.$$

67°. Să se rezolve ecuaţia:

$(1 + \operatorname{tg} mx \operatorname{tg} nx)\operatorname{tg}(m+n)x = \operatorname{tg} mx + \operatorname{tg} nx$, unde $m, n \in \mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

68°. Pentru un unghi x, avem:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0.$$

Care este ecuația de gradul al doilea satisfăcută de $\cos 2x$? Să se compare relația dată cu cea obținută, pentru $a = c = 1$ și $b = 2$.

69°. Să se determine parametrul real t, astfel încît ecuația:

$$x^2 - \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}} x + \sin t \cdot \cos t = 0$$

să aibă rădăcini reale, în care caz să se precizeze soluțiile reale ale ecuației date.

70°. Să se găsească toate soluțiile reale ale ecuației:

$$x^2 - 2x \cos xy + 1 = 0.$$

71°. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} y \\ \sin^3 x = \cos \frac{\pi}{3} \sin y. \end{cases}$$

72°. Să se rezolve inecuația:

$$\sin^2 x < |1 - 2 \cos x|.$$

73°. Să se găsească toate valorile reale ale lui x pentru care are loc inegalitatea:

$$(\sin x)^{\log_{\cos x}(x^2 - 2)} < 1.$$

74°. Fie z_1, z_2, z_3, z_4 soluțiile ecuației:

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^4 = \frac{1 + ai}{1 - ai},$$

unde a este un număr real pozitiv. Să se arate că:

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = 1.$$

75°. Vîrfurile A, B, C ale unui triunghi au afixele 1, $1 + z$, $1 + z + z^2$, unde $z = \rho\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$, $\rho < 1$. Să se verifice că originea O (0, 0) se află în afara triunghiului.

76°. Să se calculeze mărimea unghiului diedru într-un tetraedru regulat. Să se exprime aria sferei circumscrise și volumul sferei înscrise, în funcție de latura l a tetraedrului regulat.

77°. Între două plane paralele sînt cuprinse o perpendiculară de 4 m și o oblică de 6 m. Distanțele dintre capetele lor în fiecare plan sînt egale cu 3 m. Să se afle distanța între mijlocul perpendicularei și mijlocul oblicei.

78°. Să se determine volumul unei piramide triunghiulare regulate, în funcție de unghiul plan de la vîrf α și de raza R a cercului circumscris unei fețe laterale.

79°. Un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ are toate muchiile congruente și $\sphericalangle A'AB \equiv \sphericalangle A'AD \equiv \sphericalangle BAD = \varphi$. Dacă a este lungimea unei muchii, să se calculeze volumul paralelipipedului în funcție de a și φ.

80°. Se dă un tetraedru $ABCD$, în care:

$$\|AB\| + \|CD\| = \|AC\| + \|BD\| = \|AD\| + \|BC\|.$$

Să se arate că cercurile înscrise în triunghiurile $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ sînt două cîte două tangente.

Scanned with OKEN Scanner

81°. Se consideră cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și parabola $y^2 = 2x$. Dreapta $y = mx$, $(m \neq 0)$ întîlnește, în afară de origine, cercul în punctul M și parabola în punctul N. Să se găsească coordonatele punctului de intersecție a tangentei M la cerc cu tangenta în N la parabolă.

82°. Printre perechile (x, y) de numere reale care satisfac inegalitățile:

$$y - x \leqslant 1,\ y + x \leqslant 1,\ y \geqslant x^2 - 1,$$

să se determine acelea pentru care y este maxim sau minim.

3. ANALIZĂ MATEMATICĂ

83°. Se consideră funcția

$$f : (0, \infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = e^{-2|\ln x|}.$$

Să se determine $k \in \mathbf{R}$ astfel încît funcția

$$g : (0, 1) \cup (1, \infty) \to \mathbf{R},\ g(x) = \frac{x^2 f''(x) + kxf'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

84°. Fie intervalul $I = [1, 10]$ și funcția $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - \pi)\cos\frac{x}{2}$. Să se indice semnul lui f pe I și să se arate că pentru orice $x, y \in I$ avem $|f(x) - f(y)| \leqslant 5|x - y|$.

85°. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbf{N}$ pentru funcția $f : (-1, 1) \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \ln(1 - x^2).$$

86°. Să se calculeze

$$I_1 = \lim_{a \to \infty} \int_1^a (x - 1)e^{-x}dx \text{ și } I_2 = \lim_{\substack{b \to 0 \\ b > 0}} \int_b^1 (x - 1)\ln x\, dx.$$

87°. Să se afle $a \in \mathbf{R}$ astfel încît

$$\int_0^\pi (x^2 - ax) \cdot \sin 2nx\, dx = \frac{\pi^2}{n},$$

pentru orice $n \geqslant 1$ natural.

88°. Să se arate că șirul $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $n \geqslant 1$, este monoton crescător și să se afle limita sa.

89°. Să se determine parametrul real m pentru care funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - mx$, este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$.

90°. Se dă funcția $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ cu proprietățile: $f(0) = 0$; f este derivabilă $\forall x \in [0, \infty)$ și $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0, \infty)$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Să se arate că $f \equiv 0$.

91°. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ să se stabilească inegalitatea:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x}\, dx \leqslant \frac{1}{2n + 1},$$

și să se calculeze $\lim_{n \to 0} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x}\, dx$.

92°. Să se precizeze un interval $[a, b]$ pe care funcţia definită prin $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ este o primitivă a funcţiei $f:[a, b] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}. \text{ Să se calculeze } \int_0^2 \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

93°. Fie $a \in (0, 1)$ şi $(a_n)_{n \geqslant 0}$ şirul dat prin recurenţă, de:

$$a_0 = a \text{ şi } a_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_{n-1})}, \text{ pentru } n \geqslant 1.$$

Se notează:

$$b = \sqrt{1 - a^2},\ b_0 = b,\ b_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - a_{n-1})} \text{ şi } c_n = 2^n b_n.$$

Să se arate că:

i) $2\, a_k b_{k+1} < a_{k+1} b_k$, pentru $k \geqslant 0$;

ii) şirul $(c_n)_{n \geqslant 0}$ este monoton şi convergent.

94°. Pentru ce valori ale lui x, valorile lui y dat de:

$$y = \lg \sqrt{1 - x^2}, + \arcsin\left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}\right)$$

vor fi numere reale?

95°. Este posibilă egalitatea:

$$\cos t = \lg \cos t?$$

Justificaţi răspunsul.

96°. Să se determine mulţimea $A \subset \mathbf{R}$ astfel încît pentru orice $a \in A$ şi pentru orice $x \in \mathbf{R}$ să avem

$$ax^2 + x + 3 \geqslant 0.$$

Pentru fiecare $a \in A$, să se calculeze:

$$\lim_{x \to \infty} (x + 1 - \sqrt{ax^2 + x + 3}).$$

97°. Să se arate că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, avem:

$$2 \leqslant 2x \arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2} - x^2 < \pi - 1.$$

98°. Să se găsească valorile maxime şi minime ale funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată de:

$$f(x) = 2 \cos x - \cos 2x.$$

99°. Să se determine punctele de extrem şi punctele de inflexiune pentru funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = \ln(1 + 2x + 2x^2).$$

100°. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

101°. Fie α un număr real și $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ funcția dată de:

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{cînd } x\neq 0,\\ 0, & \text{cînd } x=0.\end{cases}$$

Indicați toate valorile lui α pentru care f este de două ori derivabilă în punctul $x=0$.

102°. Fie $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\in\mathbf{R}$ fixate și fie $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ funcția definită prin:

$$f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1, & \text{dacă } 0\leqslant x<1,\\ a_2x^2+b_2x+c_2, & \text{dacă } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

Să se arate că dacă f este derivabilă în $x=1$, atunci:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2+(c_1-c_2)(x-1)^2.$$

103°. Să se găsească punctele în care $f:[0,3]\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x)=\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x},$$

nu este derivabilă.

104°. Se consideră funcția reală definită prin:

$$f(x)=\frac{x^3+6(m+1)x+9m+8}{(x+3)^2(mx^2+1)},$$

unde m este un parametru real, $m\geqslant 0$;

i) Să se determine polinoamele M, N, P, Q astfel încît să aibă loc identitatea:

$$f(x)=\frac{M(x)}{P(X)}+\frac{d}{dx}\left(\frac{N(x)}{Q(x)}\right),$$

iar P să aibă numai rădăcini simple;

ii) Să se găsească $m\in\mathbf{R}$ astfel încît f să admită ca primitivă o funcție rațională;

105°. Să se calculeze o primitivă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x)=x-2+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}.$$

106°. Să se calculeze:

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$$

unde $\alpha\in(-\pi,\pi)$ este un număr dat.

107°. Să se arate că:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{1-x^2}dx\leqslant 1+e.$$

Scanned with OKEN Scanner

1°. Avem $C_{100}^{50} = \frac{100!}{(50!)^2}$. Dar $100! = 5^{24} \cdot N$, $50! = 5^{12} \cdot N_1$ unde N, N_1 sînt numere naturale prime cu 5. Atunci $C_{100}^{50} = \frac{N}{N_1^2}$ și deoarece N, N_1 sînt prime cu 5, numărul C_{100}^{50} nu este divizibil cu 5 deci se termină cu o cifră nenulă.

2°. Notînd $xy = t$, sistemul se scrie $xt + t + x = 8$, $yt + t + y = 5$. Atunci $x = \frac{8-t}{t+1}$, $y = \frac{5-t}{t+1}$ și se obține ecuația $\frac{8-t}{t+1}\,\frac{5-t}{t+1} = t$, adică $t^3 + t^2 + 14t - 40 = 0$. O soluție este $t_1 = 2$ și rezultă $x_1 = 2$; $y_1 = 1$. Se acceptă și celelalte două soluții complexe.

3°. Egalitatea de mulțimi respectivă se verifică prin dublă incluziune. Fie $z \in \mathbf{C}$, $|z| = 1$ deci $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Avem de arătat că există $k \in \mathbf{R}$ astfel încît $\cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{k+i}{k-i}$; această relație este echivalentă cu $k = \frac{\sin\alpha - i - i\cos\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2i\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Invers, dacă $z = \frac{k+i}{k-i}$, atunci evident $|z| = \frac{|k+i|}{|k-i|} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = 1$.

4°. Așadar $x > 0$, $y > 0$ și relația din enunț este echivalentă cu $\frac{x^2}{y} = x + \frac{3y}{4}$ sau $4x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$, adică $(2x + y)(2x - 3y) = 0$. Deoarece $2x + y > 0$, rezultă $2x - 3y = 0$ și $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

5°. Ecuația $z^{1985} = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ are 1985 rădăcini și anume $z_k = \sqrt[1985]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{1985} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{1985}\right)$, unde $0 \leqslant k \leqslant 1984$. Punînd condiția

$$0 < \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{1985} < \frac{\pi}{2},$$

rezultă $k \geqslant 0$ și $1 + 8k < 2.\ 1985$ deci $0 \leqslant k < \frac{3969}{8}$ și ca atare, în primul cadran există 497 rădăcini ale polinomului.

6°. Adunînd 3 la ambii membri ai inegalității obținem:

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{a+c}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{2} \text{ sau}$$

$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$. Notăm $b + c = x$, $a + c = y$, $a + b = z$ și putem scrie: $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqslant 9$.

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniacovski obținem:

$$((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geqslant \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 9,$$

ceea ce trebuia arătat.

7°. Se impun condițiile: $a^2 - x^2 \geqslant 0$, $\frac{a^2 - x^2}{x^2} \geqslant 0$, $x \neq 0$, deci $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$. Egalitatea devine:

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} = 0 \text{ sau } \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\,(|x| - x)}{x|x|} = 0.$$

rezultă $\sqrt{a^2 - x^2} = 0$ sau $|x| = x$, deci $x = \pm a$ sau $x \in [0, \infty)$. Ținînd seamă de condițiile impuse obținem soluțiile $x \in \{-a\} \cup (0, a]$.

8°. Se impun condițiile: $mx^2 - x + 1 \geqslant 0$, $mx^2 + x + 1 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$; fiind complicate nu vom rezolva aceste inecuații, ci vom rezolva ecuația și apoi vom ține seamă de ele. Introducem și următoarea notație: $mx^2 + 1 = y$, deci ecuația devine: $\sqrt{y - x} + \sqrt{y + x} = x$. Ridicînd la pătrat obținem: $2\sqrt{y^2 - x^2} = x^2 - 2y$ și impunem condiția $x^2 - 2y \geqslant 0$. Ridicăm din nou la pătrat: $x^4 + 4x^2 - 4x^2y = 0$ și înlocuind $y = mx^2 + 1$, avem: $x^4(1 - 4m) = 0$, deci $x = 0$ sau $m = \frac{1}{4}$. Valoarea $x = 0$ nu verifică ultima condiție impusă, deci nu este soluție. Pentru $m = \frac{1}{4}$ cele patru condiții impuse dau soluțiile $x \in [2, +\infty)$.

9°. Primele două relații ale lui Viète ne dau $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 3$ și calculăm:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 +$$
$$+ x_2x_4 + x_3x_4) = 4 - 6 = -2.$$

Dacă toate rădăcinile ecuației sînt reale atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 0$, contradicție.

10°. Relațiile date arată că rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 sînt în progresie aritmetică și vom folosi notațiile simetrice $x_1 = u - 3r$, $x_2 = u - r$, $x_3 = u + r$, $x_4 = u + 3r$. Prima relație a lui Viète dă $4u = 0$, deci $u = 0$, adică $x_1 = -3r$, $x_2 = -r$, $x_3 = r$, $x_4 = 3r$. Din celelalte relații Viète obținem sistemul $10r^2 = 3p + 2$; $9r^4 = p^2$. Atunci $r^2 = \frac{3p + 2}{10}$ și $19p^2 - 108p - 36 = 0$ cu soluțiile: $p_1 = 6$ $p_2 = -\frac{6}{19}$.

Pentru $p_1 = 6$ se obţin rădăcinile $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, iar pentru $p_2 = -\frac{6}{19}$ se obţin rădăcinile $-3\sqrt{\frac{2}{19}}$, $-\sqrt{\frac{2}{19}}$, $\sqrt{\frac{2}{19}}$, $3\sqrt{\frac{2}{19}}$.

11°. Dacă derivata P' are 3 rădăcini simple x_1, x_2, x_3, atunci P are rădăcinile duble x_1, x_2, x_3, deci grad $P \geqslant 6$, contradicţie. Dacă derivata P' are rădăcina dublă x_1 şi rădăcina simplă x_2, atunci P are rădăcina triplă x_1 şi rădăcina dublă x_2, deci grad $P \geqslant 5$, contradicţie. Rezultă că P' are rădăcina triplă $x_1 = a$ şi P are rădăcina $x_1 = a$ de multiplicitate patru. Atunci $P = (X - a)^4 = X^4 - 4aX^3 + 6a^2X^2 - 4a^3X + a^4$; cu $a \in \mathbf{C}$, oarecare.

12°. Deoarece $(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$ şi $(2 - \sqrt{2})^3 = 20 - 14\sqrt{2}$ rezultă $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

13°. Se impun condiţiile $\Delta > 0$, $a \cdot P(1) \geqslant 0$, $\frac{x_1 + x_2}{2} < 1$ şi se obţine sistemul de inecuaţii: $m^2 - m - 2 > 0$, $3 - m \geqslant 0$, $m < 1$ cu soluţiile $m \in (-\infty, -1)$.

14°. Avem $\Delta = a^2(a-2)^2 + 4(a-1)^2 > 0$, $\forall a \in \mathbf{R}$. Se obţine inecuaţia $a(a-2) - 2a + 3 < 0$, adică $a^2 - 4a + 3 < 0$ cu soluţiile $a \in (1, 3)$.

15°. Folosim notaţiile simetrice $x_1 = \frac{u}{q^3}$, $x_2 = \frac{u}{q}$; $x_3 = u \cdot q$, $x_4 = u \cdot q^3$ şi scriem relaţiile lui Viète:

$$\begin{cases} u\left(q^3 + \frac{1}{q^3} + q + \frac{1}{q}\right) = 0 \\ u^2\left[2 + \left(q^3 + \frac{1}{q^3}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right)\right] = -8 \\ u^2\left(q^3 + \frac{1}{q^3} + q + \frac{1}{q}\right) = 0 \\ u^4 = a \end{cases}$$

Notînd $q + \frac{1}{q} = t$ obţinem ecuaţia $t^3 - 2t = 0$ cu soluţiile $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{2}$, $t_3 = -\sqrt{2}$. Pentru $t_2 = \sqrt{2}$ şi $t_3 = -\sqrt{2}$ în relaţia a doua a lui Viète obţinem $0 = -8$, deci contradicţie. Rămîne $t =$ o singura soluţie acceptabilă, care conduce la $q^2 = -1$, $u^2 = -4$, $a = 16$ şi ecuaţia dată are soluţiile $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

16°. Înlocuind $x = y + \alpha$ ecuaţia dată devine $y^3 + (3\alpha + a)y^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha + b)y + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$. Pentru ca aceasta să fie o ecuaţie binomă trebuie să avem $3\alpha + a = 0$ şi $3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0$. Rezultă $\alpha = -\frac{a}{3}$ şi $a^2 = 3b$.

17°. Notăm $x^2 = t$ şi obţinem ecuaţia $t^2 - 4t + 5 = 0$ cu soluţiile $t_1 = 2 + i$, $t_2 = 2 - i$, deci $x^2 = 2 + i$ şi $x^2 = 2 - i$.

Notăm $x = a + bi$ cu $a, b \in \mathbf{R}$ şi din ecuaţia $x^2 = 2 + i$ deducem $a^2 - b^2 + 2abi = 2 + i$, de unde sistemul $a^2 - b^2 = 2$, $2ab = 1$. Rezultă soluţiile reale $a = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}$ şi atunci avem rădăcinile

$$x_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{2} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observînd că polinomul $x^4 - 4x^2 + 5$ are coeficienți reali (sau rezolvînd ecuația $x^2 = 2 - i$) se obțin rădăcinile

$$x_3 = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{2} - i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+4}}{2} + i\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}{2}.$$

18°. Impunem condiția $x^2 + x \geqslant 0$, deci $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$. Dacă $2x - 1 < 0$ atunci inegalitatea este evidentă și avem soluțiile $x \in (-\infty, -1] \cup \cup \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Dacă $2x - 1 \geqslant 0$, adică $x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, inecuația se scrie echivalent sub forma $x^2 + x > 4x^2 - 4x + 1$ sau $3x^2 - 5x + 1 < 0$. Rezultă soluțiile $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$ și în final, obținem $x \in (-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$.

19°. Vom demonstra prin inducție după n. Pentru $n = 2$ avem $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$. Notăm $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ și presupunem că $S_n > \frac{13}{24}$. Trebuie să demonstrăm că $S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}$.

Dar $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > \frac{13}{24}$.

20°. Notăm $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = u$ și avem $u^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$, deci inegalitatea devine:

$$3(u^2 - 2) - 8u + 10 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad 3u^2 - 8u + 4 \geqslant 0.$$

De aici rezultă $u \leqslant \frac{2}{3}$ sau $u \geqslant 2$. Dar $u = \frac{x^2+y^2}{xy}$, deci dacă $xy > 0$ atunci $u \geqslant 2$ deoarece $\frac{x^2+y^2}{xy} \geqslant 2$ conduce la $(x-y)^2 \geqslant 0$, care este adevărată; dacă $xy < 0$ atunci $u \leqslant \frac{2}{3}$ deoarece $\frac{x^2+y^2}{xy} < 0 < \frac{2}{3}$ (evident).

21°. Se impune condiția $x + 2 \neq 0$, deci $x \neq -2$. Putem scrie $3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2 \cdot 3$ sau $3^{x-1} \cdot 2^{\frac{2(x-1)}{x+2}} = 1$. Logaritmăm în baza 10 și obținem:

$(x-1)\lg 3 + \frac{2(x-1)}{x+2} \cdot \log 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -2 - \frac{2\lg 2}{\lg 3}$, ambele acceptabile.

22°. Împărțind cu 6^x ecuația devine:

$$36\left(\frac{2}{3}\right)^x + 36\left(\frac{3}{2}\right)^x - 97 = 0.$$

Notăm $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ și obținem $36y^2 - 97y + 36 = 0$, cu soluțiile $y_1 = \frac{9}{4}$, $y_2 = \frac{4}{9}$. Rezultă soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

23°. Impunem condiția $x \geqslant 0$, deci $x \in [0, +\infty)$ și scriem $3^{2-x} = 3^{-\sqrt{x}}$ de unde obținem: $\sqrt{x} = x - 2$. Atunci $x - 2 \geqslant 0$, deci $x \in [2, +\infty)$ și ecuația devine $x^2 - 5x + 4 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Singura soluție acceptată este $x = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

24°. Obținem $|x-2| = y-3 \geqslant 0$, deci $y \in [3, +\infty)$ și înlocuim în prima ecuație: $y-3+|y-5| = 2$. Pentru $y \in [3, 5]$ avem $y-3+5-y = 2$ sau $2 = 2$, deci orice $y \in [3, 5]$ este soluție. Pentru $y \in (5, +\infty)$ obținem $y-3+y-5 = 2$ sau $y = 5$ care nu aparține intervalului considerat. Din $|x-2| = y-3$ rezultă $x = y-1$ sau $x = 5-y$, deci avem perechile $(y-1, y)$, $(5-y, y)$ cu $y \in [3, 5]$.

25°. Din ultima ecuație avem $x_{10} = -2x_1 - 3x_2$ și substituind în penultima ecuație obținem $x_9 = x_1 + 6x_2$ ș.a.m.d. În final, obținem soluția $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 0$.

26°. Scriem ecuația parabolei sub forma $\alpha(x^2 - 8x + 7) + (x - y - 1) = 0$ și obținem punctele fixe din sistemul $x^2 - 8x + 7 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Rezultă punctele $(1, 0)$ și $(7, 6)$.

27°. Prin ipoteză avem $\Delta_1 = p^2 - 4q \geqslant 0$. Calculăm $\Delta_2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 p^2 - 4q\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 p^2 - 4q\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 p^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 p^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 (p^2 - 4q) + 4p^2 \geqslant 0$, deci rădăcinile polinomului al doilea sînt reale.

28°. Dacă $Q(X)$ este cîtul și $R(X) = aX + b$ este restul împărțirii, putem scrie relația:

$$X^{2n} - X^n + X^4 + 1 = (X-1)^2 \cdot Q(X) + aX + b.$$

Înlocuind X cu 1 obținem $1 - 1 + 1 + 1 = 0 \cdot Q(1) + a + b$, deci $a + b = 2$. Derivînd relația de mai sus avem:

$$2nX^{2n-1} - nX^{n-1} + 4X^3 = 2(X-1) \cdot Q(X) + (X-1)^2 \cdot Q'(X) + a.$$

Înlocuind și aici X cu 1 obținem

$2n - n + 4 = 0 \cdot Q(1) + 0 \cdot Q'(1) + a$, deci $a = n + 4$ și atunci $b = -n - 2$.

Rezultă restul $R(X) = (n+4)X - n - 2$.

29°. Adunăm prima linie la fiecare dintre celelalte linii și obținem determinantul egal cu cel dat:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & c+x & d+y \\ 0 & 0 & 2c & d+z \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d = 8abcd.$$

30°. Calculăm: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Presupunem că

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și avem: } X^{n+1} = X^n \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+a_n & 2+3a_n \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $a_{n+1} = 1 + a_n$, $b_{n+1} = 2 + 3a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $a_1 = 1$ rezultă $a_n = n$ și $b_n = 3n - 1$ deci

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 3n-1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

31°. Dacă A este matricea dată atunci $\det A = 3 - 4\alpha \neq 0$ conduce la $\alpha \neq \frac{3}{4}$. În acest caz obținem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{4\alpha-3} & \frac{2\alpha-6}{4\alpha-3} & \frac{-3}{4\alpha-3} \\ \frac{\alpha}{4\alpha-3} & -\frac{2\alpha+3}{4\alpha-3} & \frac{-3}{4\alpha-3} \\ \frac{-1}{4\alpha-3} & \frac{6}{4\alpha-3} & \frac{4}{4\alpha-3} \end{pmatrix}.$$

32°. Numărul de echipe este $C_{26}^4 \cdot C_{15}^1 + C_{26}^3 \cdot C_{15}^2 + C_{26}^2 C_{15}^3 + C_{26}^1 C_{15}^4$.

33°. Presupunem că $f = X^3 + 2$ este reductibil peste $\mathbf{Q}$. Atunci f are cel puțin un factor de gradul întîi, adică de forma $aX + b$ cu $a, b \in \mathbf{Q}$ și $a \neq 0$. Rezultă că f are o rădăcină rațională $x_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ cu $m, n \in \mathbf{Z}$ și $n \neq 0$. Înlocuind pe x_1 în f obținem $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, contradicție, deci f este ireductibil peste $\mathbf{Q}$. Descompunerea lui f peste $\mathbf{R}$ este $f = (X + \sqrt[3]{2})(X^2 - \sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4})$, iar descompunerea lui f peste $\mathbf{C}$ este

$$f = (X + \sqrt[3]{2})\left(X - \sqrt[3]{2}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \sqrt[3]{2}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

34°. Scriem tabla de înmulțire:

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

și din tablă rezultă toate proprietățile cerute.

35°. Așadar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ deci $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ și $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}(\vec{u}+\vec{v}) - \vec{u}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} - v^2 - u^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} = -\vec{u}\cdot\vec{v} - u^2 - v^2 = -1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) - 1 - 1 = -2 - \cos(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0.$

36°. Avem $b = a \sin B$, $c = a \cos B$ și $b' = a' \sin B'$, $c' = a' \cos B'$. Relația din enunț devine $a^2 a'^2 \sin B' \cos B' = a'^2 a^2 \sin B \cos B$ deci $\sin 2B = \sin 2B'$, adică $\sin(B - B')\cos(B + B') = 0$. Rezultă atunci $B = B'$ sau $B + B' = \frac{\pi}{2}$ (deci $B = C'$) și ca atare, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

37°. Notăm cu R raza sferei și fie I și $2R - I$ înălțimile celor două calote. Așadar,

$$\frac{2\pi RI}{2\pi R(2R-I)} = k$$

de unde $I = \frac{2kR}{k+1}$. Atunci raportul volumelor este

$$\frac{\frac{\pi I^2}{3}(3R-I)}{\frac{4\pi R^3}{3} - \frac{\pi I^2}{3}(3R-I)} = \frac{I^2(3R-I)}{4R^3 - I^2(3R-I)} \text{ și înlocuind } I = \frac{2kR}{k+1}$$

rezultă în final $\frac{k^3+3k^2}{3k+1}$.

38°. Fie $TT' \perp \beta$, $T' \in \beta$ și $MM' \perp \beta$, $M' \in \beta$. Deoarece punctele M, T, N sînt coliniare, rezultă că M', T', N sînt de asemenea coliniare. Dar $BM' \equiv AM \equiv TM$ și $NB \equiv NT$. Apoi $\frac{NT}{MT} = \frac{NT'}{M'T'}$ (conform teoremei lui Thales) și rezultă $\frac{BM'}{BN} = \frac{MT}{NT} = \frac{M'T'}{NT'}$. În triunghiul $BM'N$ rezultă că BT este bisectoare. Atunci T aparține planului bisector al diedrului format de planele ABM și ABN.

39°. Deoarece $\widehat{VAC} = \widehat{VBC} = \widehat{VDC} = \frac{\pi}{2}$, rezultă că piramida este înscrisă în sfera de diametru VC. Raza acestei sfere va fi $\frac{1}{2}\sqrt{h^2+2a^2}$. Pentru raza r a sferei înscrise se poate aplica $r = \frac{3 \text{ Volumul}}{\text{Aria totală}}$.

40°. Datorită unicității perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă este suficient să arătăm că dreapta care unește mijlocul E al laturii CD cu punctul de intersecție G al diagonalelor este perpendiculară pe latura AB. În triunghiul dreptunghic DGC mediana $GE \equiv EC$, deci $\widehat{GCE} \equiv \widehat{CGE}$. Dar $\widehat{AGF} \equiv \widehat{CGE}$ (opuse la vîrf) și $\widehat{GCE} \equiv \widehat{ABG}$ (deoarece $ABCD$ este inscriptibil). Rezultă că $\widehat{AGF} \equiv \widehat{ABG}$. Atunci măs$\widehat{FAG}$ + măs$\widehat{AGF}$ = măs$\widehat{FAG}$ + măs$\widehat{ABG}$ = 90°, deci măs$\widehat{AFG}$ = 90°, adică $EG \perp AB$.

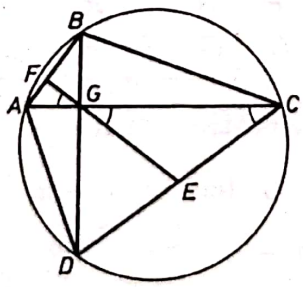


Fig. M.C.1

41°. Fie BC perpendiculara dusă din centrul O pe cele două tangente paralele d_1, d_2. Triunghiurile dreptunghice OBA_1 și OMA_1 sînt congruente deoarece $OB = OM = R$ și OA_1 este comună; atunci $\widehat{A_1OB} \equiv \widehat{A_1OM}$. Analog, triunghiurile dreptunghice OCA_2 și OMA_2 sînt congruente deoarece $OC = OM = R$ și OA_2

Scanned with OKEN Scanner

este comună; atunci $\widehat{A_2OC} \equiv \widehat{A_2OM}$. Rezultă că $2\,\text{măs}\widehat{A_1OA_2} = \text{măs}\widehat{BOM} + \text{măs}\widehat{MOC} = 180°$, deci $\text{măs}\widehat{A_1OA_2} = 90°$. Aplicînd teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic A_1OA_2 obținem: $MA_1 \cdot MA_2 = OM^2 = R^2 = \text{constant}$.

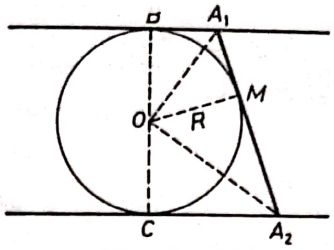


Fig. M.C.2

42°. Ducem înălțimea $AT \perp BC$. În triunghiul ABT segmentul MQ variabil rămîne paralel cu latura AT deci mijlocul D al lui MQ descrie mediana BF a triunghiului ABT (rezultă imediat din asemănări de triunghiuri). În triunghiul ACT segmentul NP variabil rămîne paralel cu latura AT, deci mijlocul E al lui NP descrie mediana CF a triunghiului ACT. În triunghiul BFC segmentul variabil DE rămîne paralel cu latura BC, deci mijlocul O al lui DE (care este centrul dreptunghiului) descrie mediana FA' a triunghiului BFC. Cu alte cuvinte, locul geometric al centrului dreptunghiului $MNPQ$ este segmentul de dreaptă care unește mijlocul F al înălțimii AT cu mijlocul A' al laturii BC.

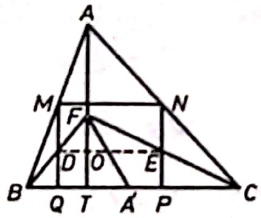


Fig. M.C.3

43°. Fie $A \in Ox$ și $OA = a$. Ducem $AC \perp Ox$ în planul xOz și $AB \perp Ox$ în planul xOy ($C \in Oz$, $B \in Oy$). Atunci $\widehat{BAC} = \alpha$ este unghiul diedru căutat. Avem $AC = OA \operatorname{tg} 60° = a\sqrt{3}$, $OC = 2OA = 2a$; $AB = OA = a$ și $OB = a\sqrt{2}$.

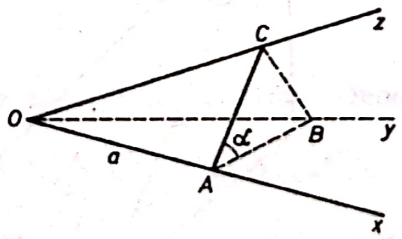


Fig. M.C.4

În triunghiul OBC avem $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos 30° = 6a^2 - 2a^2\sqrt{6} = 2a^2(3 - \sqrt{6})$. Din triunghiul ABC obținem:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4a^2 - 6a^2 + 2a^2\sqrt{6}}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3},$$

deci

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

44°. Dacă l este muchia tetraedrului regulat atunci apotemele

$$AE = DE = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

În triunghiul ADE avem:

$$\cos\alpha = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2AE \cdot DE} = \frac{\frac{3l^2}{4} + \frac{3l^2}{4} - l^2}{2\frac{3l^2}{4}} = \frac{1}{3}$$

și

$$\cos\beta = \frac{AD^2 + DE^2 - AE^2}{2AD \cdot DE} = \frac{l^2 + \frac{3l^2}{4} - \frac{3l^2}{4}}{2\frac{l^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

deci

$$\cos^2\beta = \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

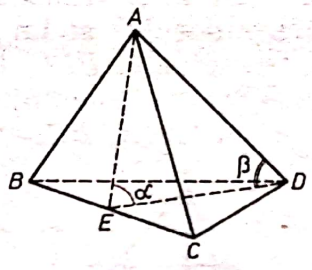


Fig. M.C.5

45°. Ducem $OD \perp BC$; avem $AO \perp$ planul OBC, deci din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $AD \perp BC$. Ducem $CE \perp OB$ și $CF \perp AB$; avem $HH' = (AOD) \cap (CEF)$. Din $BC \perp OD$ și $BC \perp AD$ rezultă $BC \perp$ planul AOD;

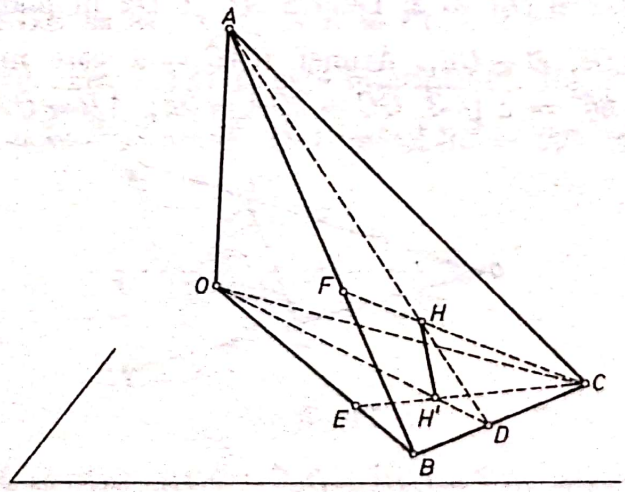


Fig. M.C.6

atunci planul $ABC \perp$ planul AOD (deoarece planul ABC trece prin BC). Avem $AO \perp CE$ și $CE \perp OB$, deci $CE \perp$ planul AOB. Rezultă că $CE \perp AB$, dar avem $CF \perp AB$, deci $AB \perp$ planul CEF. Atunci planul $ABC \perp$ planul CEF (deoarece planul ABC trece prin AB). În concluzie $HH' =$ (planul AOD) $\cap$ planul (CEF) este perpendiculară pe planul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

46°. Planul care trece prin mijloacele E și F ale muchiilor BC și respectiv AD, taie muchiile CD și AB în H și respectiv G, iar prelungirea muchiei AC în M. Deoarece planul ADE împarte tetraedrul în două tetraedre de volume egale (acestea au aceeași înălțime și bazele BED, CED de arii egale) este suficient să arătăm că $V_{EFDH} = V_{EGAF}$. Din teorema lui Menelaos în triunghiurile ABC și respectiv ACD obținem: $\frac{MC}{MA}\cdot\frac{GA}{GB}\cdot\frac{EB}{EC}=1$ și $\frac{MC}{MA}\cdot\frac{FA}{FD}\cdot\frac{HD}{HC}=1$. Împărțind relațiile obținem: $\frac{GA}{GB}=\frac{HD}{HC}$ sau $\frac{GA}{AB}=\frac{HD}{CD}=k$. Atunci rezultă:

$$S_{AGF}=\frac{AG\cdot AF\cdot\sin\widehat{BAD}}{2}=\frac{k\cdot AB\cdot\frac{AD}{2}\cdot\sin\widehat{BAD}}{2}=\frac{k}{2}S_{ABD},$$

deci

$$V_{EAGF}=\frac{S_{AGF}\cdot h_1}{3}=\frac{\frac{k}{2}S_{ABD}\cdot\frac{h}{2}}{3}=\frac{k}{4}V_{ABCD}.$$

Un calcul analog ne dă:

$$V_{EFDH}=\frac{k}{4}V_{ABCD}=V_{EAGF}.$$

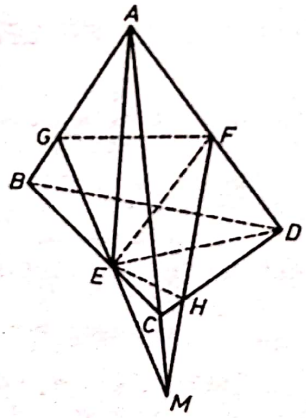


Fig. M.C.7

47°. Fie $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ o soluție a ecuației. Deoarece $\sin x\geqslant 0$, $\cos x\geqslant 0$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, putem scrie: $\sqrt{2\sin^2 x}+\sqrt{2\cos^2 x}=m$, $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x=m$ sau $\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{m}{\sqrt{2}}$, de unde obținem $2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{m}{\sqrt{2}}$, deci $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{m}{2}$. Dar $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, deci $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, de unde $m\in[\sqrt{2},2]$.

Fie $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ o soluție a ecuației. Deoarece $\sin x\geqslant 0$, $\cos x\leqslant 0$, $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem: $\sin x-\cos x=\frac{m}{\sqrt{2}}$ și apoi $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{m}{2}$. Dar $x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

Scanned with OKEN Scanner

deci $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, de unde $m \in [\sqrt{2}, 2]$. Pentru $m = \sqrt{2}$ se obțin soluțiile: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \pi$.

48°. Ridicăm la pătrat relația dată și aplicăm inegalitatea Cauchy-Schwartz-Buniacovski:

$$225 = [3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C)]^2 \leqslant (3^2 + 4^2)[(\cos B + 2\sin C)^2 + (\sin B + 2\cos C)^2] = 25(\cos^2 B + 4\sin C\cos B + 4\sin^2 C + \sin^2 B + 4\sin B\cos C + 4\cos^2 C).$$

Rezultă inegalitatea $9 \leqslant 5 + 4\sin(B + C)$, adică $\sin A \geqslant 1$, deci $\sin A = 1$, și atunci $\hat{A} = 90°$.

49°. Fie M celălalt punct de intersecție al medianei AD cu cercul circumscris triunghiului ABC. Avem măs $\widehat{ACM} = 2$ măs $\widehat{ABD} + 2$ măs $\widehat{DAC} = 180°$, deci AM este diametru. Deoarece AM taie pe BC la mijloc și AM nu este perpendicular pe BC (astfel triunghiul ABC ar fi isoscel) rezultă că BC este diametru, deci $\hat{A} = 90°$.

50°. Fie α unul din cele patru unghiuri congruente. Atunci avem $\hat{A} = 4\alpha$, $\hat{B} = 90° - \alpha$ și $C = 90° - 3\alpha$. Dar $\hat{B} + \alpha = 90°$ este chiar ipoteza din problema 49° și cum ABC nu poate fi isoscel (cu $AB \equiv AC$) rezultă că $\hat{A} = 90°$. Atunci $\alpha = 22°30'$, $\hat{B} = 67°30'$ și $\hat{C} = 22°30'$.

51°. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD al patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Folosim notațiile vectoriale: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{d}_1$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}_2$, $\overrightarrow{AO} = \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\delta}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{\beta}$ (cu a, b, c, ... notăm lungimile vectorilor respectivi) și fie φ unghiul diagonalelor (presupus ascuțit). Avem $\vec{d}_2 = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{d}_1 = \vec{\gamma} + \vec{\delta}$ și $\vec{a} = \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$, $\vec{b} = \vec{\alpha} + \vec{\delta}$, $\vec{c} = -\vec{\delta} + \vec{\beta}$, $\vec{d} = -\vec{\gamma} - \vec{\beta}$, deci calculînd obținem că $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b}\vec{d}$. Putem scrie $2\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$, $2\vec{d}_2 = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{d}$ și calculînd obținem că $4\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = b^2 + d^2 - a^2 - c^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d})$, de unde $2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$. Dar $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = d_1 d_2 \cos\varphi$, deci $\cos\varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2d_1 d_2}$. Se știe că aria este $S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$ deci putem scrie

$$4S^2 = d_1^2 d_2^2 \sin^2\varphi = d_1^2 d_2^2 (1 - \cos^2\varphi) = d_1^2 d_2^2 - \frac{(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}{4}$$

sau încă

$$16S^2 = (2d_1 d_2)^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 = (2d_1 d_2 - b^2 - d^2 + a^2 + c^2) \cdot (2d_1 d_2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2).$$

Teorema lui Ptolomeu ne dă relația $d_1 d_2 = ac + bd$, de unde obținem că

$$16S^2 = [(2ac + a^2 + c^2) - (b^2 + d^2 - 2bd)] \cdot [(b^2 + d^2 + 2bd) - (a^2 + c^2 - 2ac)] = (a + c + b - d)(a + c - b + d)(b + d + a - c)(b + d - a + c),$$

deci $S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$.

Scanned with OKEN Scanner

52°. Fie TAT' tangenta comună celor două cercuri. Avem

$$\text{măs}\,\widehat{ABD} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AD}}{2} = \text{măs}\,\widehat{TAD} \text{ și } \text{măs}\,\widehat{ACE} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AE}}{2} = \text{măs}\,\widehat{T'AE}.$$

Dar $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACE}$ (alterne interne), deci $\widehat{TAD} \equiv \widehat{T'AE}$, de unde rezultă că D, A, E sînt coliniare.

53°. Avem $\text{măs}\,\widehat{ADB} = \text{măs}\,\widehat{BAE} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AB}}{2}$ (în cercul C_1) și

$$\text{măs}\,\widehat{AEB} = \text{măs}\,\widehat{BAD} = \text{măs}\,\frac{\widehat{AB}}{2} \text{ (în cercul } C_2).$$

Atunci triunghiurile ABD și ABE sînt asemenea și putem scrie că

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}},$$

deci $\overline{AD}^2 \cdot \overline{BE} = \overline{AD}\,\overline{AE}\,\overline{AB} = \overline{AE}^2\,\overline{BD}$.

54°. Fie O centrul cercului. Avem $\text{măs}\,\widehat{OPA} = 90° - \text{măs}\,\widehat{AMB} = \text{constant}$. Cum O și A sînt fixe P se află pe arcul capabil de unghiul constant obținut; mai precis, deoarece M descrie numai arcul $\widehat{BA'}$, P descrie arcul $\widehat{OB}$ de pe arcul capabil de unghiul respectiv. Avem $\text{măs}\,\widehat{CAQ} = \text{măs}\,\frac{\widehat{ABM}}{2} = \text{măs}\,\widehat{AMT}$ (MT este tangenta în M la cerc), dar $\widehat{AQC} = \widehat{AMT}$ (corespondente), deci triunghiul ACQ este isoscel. Atunci $\overline{CQ} \equiv \overline{CA} = \text{constant}$, deci Q descrie un arc din cercul de centru C și rază CA, mai precis arcul $\widehat{AB}$ din acest cerc.

55°. Scriem relația sub forma echivalentă:

$$8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° \cos 63° + 2 \sin 13° \cos 40° = \sin 53°$$

sau

$$8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° \sin 27° + \sin 53° - \sin 27° = \sin 53°,$$

de unde obținem: $8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° - 1 = 0$, pe care o înmulțim cu $\sin 20° \neq 0$ (și $\sin 27° \neq 0$). Atunci rezultă $4 \sin 40° \cos 40° \cos 80° - \sin 20° = 0$ sau $2 \sin 80° \cos 80° - \sin 20° = 0$, sau încă $\sin 160° - \sin 20° = 0$, ceea ce este evident.

56°. Putem scrie: $2 \cos 10° \cos(90° + 10°) - 2 \cos 50° \cos(180° + 20°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $-2 \sin 10° \cos 10° + 2 \cos 50° \cos 20° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau încă: $-\sin 20° + \cos 70° + \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rezultă $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ceea ce este evident.

57°. Avem: $\sin^5 t + \cos^5 t = (\sin t + \cos t)(\sin^4 t - \sin^3 t \cos t + \sin^2 t \cos^2 t - \sin t \cos^3 t + \cos^4 t) = (\sin t + \cos t)[(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - \sin^2 t \cos^2 t - \sin t \cos t(\sin^2 t + \cos^2 t)] = (\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t - \sin^2 t \cos^2 t)$. Din $\sin t + \cos t = m$ obținem $\sin t \cos t = \frac{m^2 - 1}{2}$, deci avem $\sin^5 t + \cos^5 t = m\left[1 - \frac{m^2 - 1}{2} - \frac{(m^2 - 1)^2}{4}\right] = \frac{m(5 - m^4)}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

58°. Avem: $E = \frac{2(\cos 2x + 1) + \cos 2x + \cos 2a}{-2\cos 2x + \cos 2a} = \frac{3\cos 2x + \cos 2a + 2}{-\cos 2x + \cos 2a}$, de unde, folosind ipoteza, rezultă proporționalitatea coeficienților: $-3 = \frac{\cos 2a + 2}{\cos 2a}$, deci $\cos 2a = -\frac{1}{2}$, $a = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

59°. Folosim proporții derivate și i) este echivalentă cu $\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)} = \frac{\sin(c+d)+\sin(c-d)}{\sin(c+d)-\sin(c-d)}$, adică cu $\frac{2\sin a\cos b}{2\cos a\sin b} = \frac{2\sin c\cos d}{2\cos c\sin d}$, deci echivalentă cu ii) $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}$. Analog se arată că iii) este echivalent cu ii).

60°. Avem $\sin^3 kx = \frac{3}{4}\sin kx - \frac{1}{4}\sin 3kx$ și $\sin^3\left(\frac{\pi}{3} - kx\right) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - kx\right) - \frac{1}{4}\sin(\pi - 3kx)$, deci $\sin^3 kx - \sin^3\left(\frac{\pi}{3} - kx\right) = \frac{3}{4}\left(\sin kx + \sin\left(kx - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Atunci $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3 kx - \sin^3\left(\frac{\pi}{3} - kx\right)}{\sin kx + \sin\left(kx - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3n}{4}$. Analog se arată că a doua sumă este tot $\frac{3n}{4}$.

61°. Impunem condițiile $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$. Deoarece $\operatorname{tg}\theta \neq 0$ putem scrie $\operatorname{tg} 4\theta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$ sau $\operatorname{tg} 4\theta = -\operatorname{ctg}\theta$, sau încă $\operatorname{tg} 4\theta + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$. Rezultă $\sin\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, deci $\theta = \frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$. Ținînd seama de condiții rezultă restricția $n \neq 3k+2$, cu $k \in \mathbf{Z}$.

62°. Avem $2\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1$ sau $\sin 2x\cos 2x = -1$. Rezultă $\sin 4x = -2$, ecuație imposibilă.

63°. Impunem condiția $\sin x \neq 0$, deci $x \neq 0$, $x \neq \pi$ și $x \neq 2\pi$. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă ecuația $2\cos x = 0$ cu soluția $x = \frac{\pi}{2}$. Dacă $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă identitatea $-\cos x + \cos x = 0$. Dacă $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ rezultă ecuația $-2\cos x = 0$ cu soluția $x = \frac{3\pi}{2}$ și dacă $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ rezultă identitatea $\cos x - \cos x = 0$. În concluzie soluțiile sînt $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

64°. Impunem condițiile $x \neq 1$, $x \neq -1$ și calculăm tangenta sumei din ecuația $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$. Obținem $\frac{2x}{x^2-2} = \frac{x^2}{x^2-2}$, deci $x^2 - 2x = 0$ cu condiția $x^2 - 2 \neq 0$. Rezultă soluțiile $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$.

65°. Evident $k \neq 0$ și scriem $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \frac{1}{k}$, deci $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{k}$, de unde $4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{4k-4}{3k}$ sau $\sin^2 2x = \frac{4k-4}{3k}$. În final rezultă $\cos 4x = \frac{8-5k}{3k}$ cu condiția $\frac{8-5k}{3k} \in [-1, 1]$. Obținem soluțiile $x = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{1}{4}\arccos\frac{8-5k}{3k}$ cu $n \in \mathbf{Z}$, unde $k \in [1, 4]$.

Scanned with OKEN Scanner

66°. Se impun condițiile de existență ale tangentelor $\cos(15° - x) \neq 0$, etc. și se observă că $\operatorname{tg}(15° - x)\operatorname{tg}(75° + x) = \operatorname{tg}(15° - x)\operatorname{ctg}(15° - x) = 1$, etc... Obținem ecuația $\operatorname{tg} nx = 1$ cu soluțiile $x = \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4n}$, $k \in \mathbf{Z}$.

67°. Impunem condițiile $\cos mx \neq 0$, $\cos nx \neq 0$, $\cos(m+n)x \neq 0$, adică $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2m}$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2(m+n)}$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Avem:

$(1 + \operatorname{tg} mx \operatorname{tg} nx) \cdot \frac{\operatorname{tg} mx + \operatorname{tg} nx}{1 - \operatorname{tg} mx \operatorname{tg} nx} - (\operatorname{tg} mx + \operatorname{tg} nx) = 0$, deci $\operatorname{tg} mx + \operatorname{tg} nx = 0$ sau $\operatorname{tg} mx \operatorname{tg} nx = 0$. Se obțin soluțiile $x = \frac{k_1\pi}{m}$, $x = \frac{k_2\pi}{n}$, $x = \frac{k_3\pi}{m+n}$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}$ și se impun restricțiile date de condiții.

68°. Avem $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ și înlocuim în ecuația dată: $\pm b\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = -c - a\cdot\frac{1 - \cos 2x}{2}$. Ridicînd la pătrat obținem: $a^2\cos^2 2x - 2(a^2 + 2ac - b^2)\cos^2 2x + a^2 + 4c^2 + 4ac - 2b^2 = 0$. În cazul particular considerat cele două ecuații cu aceiași coeficienți.

69°. Calculăm: $\Delta = \frac{\left(\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin t}\right)^2}{2} - 4\sin t\cos t = \frac{1}{2\sin^2 t\cos^2 t} - 4\sin t\cos t = \frac{1 - 8\sin^3 t\cos^3 t}{2\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 2t}{2\sin^2 t\cos^2 t} \geqslant 0$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$ cu $\sin t \neq 0$, $\cos t \neq 0$, deoarece $1 \geqslant \sin^2 2t$. Rezultă valorile $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$ și apoi se rezolvă ecuația în x.

70°. Impunem condiția $\Delta \geqslant 0$ și obținem $\cos^2 xy - 1 \geqslant 0$, deci $\cos^2 xy \geqslant 1$, adică $\cos^2 xy = 1$. Dacă $\cos xy = 1$ atunci $x^2 - 2x + 1 = 0$, de unde rezultă $x = 1$ pentru $y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dacă $\cos xy = -1$ atunci $x^2 + 2x + 1 = 0$, de unde rezultă $x = -1$ pentru $y = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

71°. Impunem condițiile $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, deci $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Din ecuația a doua avem $\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y$ și înlocuind în prima ecuație obținem: $\sin y\left(\frac{\frac{1}{2}}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos y}\right) = 0$, deci $\sin y = 0$ și $\sin x = 0$ cu soluțiile $x = n\pi$, $y = m\pi$, $m, n \in \mathbf{Z}$ sau $\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y$ și $\cos^3 x = \frac{1}{2}\cos y$. Ridicăm la pătrat ecuațiile și le adunăm: $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$, de unde $\cos 4x = -1$ cu soluțiile $x = \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $y = \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$ (x și y se află în același cadran).

72°. Avem inecuațiile: $1 - 2\cos x > \sin^2 x \geqslant 0$ sau $1 - 2\cos x < -\sin^2 x \leqslant 0$. Obținem: $\cos x(\cos x - 2) > 0$, deci $\cos x < 0$ cu soluțiile $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)$ sau $\cos^2 x + 2\cos x - 2 > 0$; rezultă $\sqrt{3} - 1 < \cos x \leqslant 1$ cu soluțiile $x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(-\arccos(\sqrt{3} - 1) + 2k\pi, \arccos(\sqrt{3} - 1) + 2k\pi)$.

Scanned with OKEN Scanner

73°. Avem condițiile: $0 < \cos x < 1$, $\sin x > 0$, $x^2 - 2 > 0$, $\log_{\cos x}(x^2-2) > 0$. Ultima devine $x^2 - 2 < 1$, deci $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ și $x \in \bigcup_{k\in Z}\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. În final rezultă soluțiile $x \in \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

74°. Avem: $(1 - ai)(1 + 4iz - 6z^2 - 4iz^3 + z^4) = (1 + ai)(1 - 4iz - 6z^2 + 4iz^3 + z^4)$. Ne interesează numai primul și ultimul coeficient al polinomului, deci $a_0 = 2ai$ și $a_4 = 2ai$, de unde $z_1z_2z_3z_4 = \frac{2ai}{2ai} = 1$.

75°. Avem $x_A = 1 > 0$; $x_B = 1 + \rho\cos\frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{\rho}{2} > 0$; $x_C = 1 + \rho\cos\frac{2\pi}{3} + \rho^2\cos\frac{4\pi}{3} = 1 - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^2}{2} > 0$, deoarece $1 > \frac{\rho}{2}(1-\rho)$, $(0<\rho<1)$. Rezultă că punctele A, B, C se află în semiplanul $x > 0$, deci triunghiul ABC se află în acest semiplan și O $(0, 0)$ se află în afara triunghiului.

76°. Apotema este $\frac{l\sqrt{3}}{2}$, înălțimea tetraedrului este $\frac{l\sqrt{6}}{3}$, raza sferei circumscrise este $\frac{l\sqrt{6}}{4}$ și raza sferei înscrise este $\frac{l\sqrt{6}}{12}$. Rezultă unghiul diedru $\arccos\frac{1}{3}$, aria sferei circumscrise $\frac{3\pi l^2}{2}$ și volumul sferei înscrise $\frac{\pi l^3\sqrt{6}}{216}$.

77°. Distanțele de la mijloacele perpendicularei și oblicei la unul din plane sînt egale cu $2m$. Rezultă din teorema lui Pitagora că jumătate din proiecția oblicei pe unul din plane este $\sqrt{5}$ și apoi că distanța cerută este $2m$.

78°. Latura bazei este $2R\sin\alpha$, apotema este $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$ și înălțimea piramidei rezultă $\frac{2R\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}{3}\sqrt{1+2\cos\alpha}$. Se obține volumul $\frac{2R^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}}{3}$.

79. Proiecția lui $A'A$ pe latura AB este $a\cos\varphi$. Proiecția lui $A'A$ pe planul $ABCD$ se află pe AC și are mărimea $\frac{a\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. Atunci înălțimea paralelipipedului din A' este $\frac{a}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\varphi}$. În final se obține volumul paralelipipedului $2a^3\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\varphi}$.

80°. Notăm $\|AB\| = x$, $\|AC\| = y$, $\|AD\| = z$, $\|BC\| = c$, $\|CD\| = a$, $\|BD\| = b$. Prin ipoteză avem relațiile $x + a = y + b = z + c = l$. Notăm cu u, v, w segmentele pe care le determină pe laturi cercul înscris în triunghiul ACD astfel încît să avem: $u + v = a$, $v + w = z$, $w + u = y$.

Obținem: $u = \frac{a+y-z}{2} = \frac{l-x+y-z}{2}$, $v = \ldots$, etc. Notăm cu u', v', w' segmentele determinate pe laturi de cercul înscris în triunghiul BCD astfel încît să avem: $u' + v' = a$, $v' + w' = b$, $w' + u' = c$. Obținem: $u' = \frac{a+c-b}{2} = \frac{l-x+y-z}{2} = u$, deci cele două cercuri înscrise au același punct de tangență cu latura CD, ș.a.m.d.

Scanned with OKEN Scanner

81°. Dreapta $y = mx$ mai taie cercul dat în $M\left(\frac{2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$ și parabola dată în $N\left(\frac{2}{m^2}, \frac{2}{m}\right)$. Tangenta în M la cerc are ecuația $2x+2my-x(1+m^2)-2=0$, iar tangenta în N la parabolă are ecuația $2my=m^2x+2$. Obținem $x=0$ și $y=\frac{1}{m}$. deci punctul de coordonate $\left(0, \frac{1}{m}\right)$.

82°. Punctele de coordonate (x, y) care îndeplinesc inegalitățile date se află în plan între cele două drepte și parabola respectivă. Există o singură pereche cu y maxim $(0, 1)$ și o singură pereche cu y minim $(0, -1)$.

83°. Așadar dacă $x > 1$, atunci $|\ln x| = \ln x$ și $f(x) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$. Iar dacă $0 < x < 1$, atunci $|\ln x| = -\ln x$, $f(x) = e^{2\ln x} = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Prin urmare

$$g(x) = \begin{cases} 2 + 2k \text{ dacă } 0 < x < 1 \\ 6 - 2k \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$$

Funcția g este constantă pe domeniul ei de definiție dacă $2 + 2k = 6 - 2k$ deci $k = 1$.

84°. Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ în I sînt π (dublă) și 3π simplă. Rezultă că $f(x) \leqslant 0$ pe intervalul $[1, 3\pi]$ și $f(x) > 0$ pe $(3\pi, 10]$. Apoi $f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'(c)$, conform formulei creșterilor finite și este suficient să observăm că pentru $c \in I$ avem $|f'(c)| \leqslant 5$.

85°. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$. Dar $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+a)^{k+1}}$ și ca atare $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$. În concluzie $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)![1 + (-1)^n]$. Dacă n este par, atunci $f^n(0) = -2(n-1)!$; iar dacă n este impar, atunci $f^n(0) = 0$.

86°. Integrînd prin părți, rezultă

$$\int_1^a (x-1)e^{-x}\,dx = -(x-1)e^{-x}\Big|_1^a - e^{-x}\Big|_1^a = -(a-1)e^{-a} - e^{-a} + e^{-1} \text{ și } I_1 = \frac{1}{e}.$$

Similar,

$$\int_b^1 (x-1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\Big|_b^1 - \int_b^1 \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{b^2}{2} + b\right)\ln b - \frac{1}{4} + 1 + \frac{b^2}{4} - b$$

și deoarece $\lim\limits_{\substack{b\to 0 \\ b>0}} b \ln b = 0$, se obține $I_2 = \frac{3}{4}$.

87°. Integrînd prin părți, rezultă $\frac{a\pi - \pi^2}{2n} + \frac{1}{2n}\int_0^\pi (2x - a)\cos 2nx\,dx = \frac{\pi^2}{n}$ deci $\int_0^\pi (2x - a)\cos 2nx\,dx = 3\pi^2 - a\pi$. Integrala din membrul stîng al ultimei relații este nulă și prin urmare, $a = 3\pi$.

Scanned with OKEN Scanner

88°. Avem $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$ și presupunem că $a_{n-1} < a_n$; atunci $2a_{n-1} < 2a_n$, deci $\sqrt{2a_{n-1}} < \sqrt{2a_n}$, adică $a_n < a_{n+1}$ (evident $a_1 > 0$ și din presupunerea $a_n > 0$ rezultă $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > 0$). Am arătat că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton crescător, deci $\sqrt{2} = a_1 \leqslant a_n$, $\forall n \geqslant 1$. Să arătăm că $a_n < 2$, $\forall n \geqslant 1$. Evident $a_1 = \sqrt{2} < 2$ și presupunem că $a_n < 2$; atunci $2a_n < 4$, de unde $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < 2$. Rezultă că $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent fiind monoton și mărginit ($\sqrt{2} \leqslant a_n < 2$). În plus, dacă $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, rezultă $\sqrt{2} \leqslant l \leqslant 2$. Trecem la limită în relația de recurență și obținem $l = \sqrt{2l}$, de unde $l = 0$ sau $l = 2$. În concluzie rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

89°. Pentru ca functia să fie monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$ trebuie să avem $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Avem $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - m = \dfrac{-mx^2 + 2x - m}{1+x^2}$. Rezultă condiția $-mx^2 + 2x - m \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $-m > 0$ și $\Delta \leqslant 0$, de unde obținem sistemul de inecuații: $m < 0$ și $1 - m^2 \leqslant 0$ cu soluțiile $m \in (-\infty, -1]$.

90°. Deoarece $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0, \infty)$, rezultă că f este monoton crescătoare pe $[0, \infty)$, deci $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$, adică f este pozitivă pe $[0, \infty)$. Presupunem că f nu este identic nulă pe $[0,\infty)$, adică există $a > 0$ astfel încît $f(a) > 0$. Alegem un șir crescător $(x_n)_{n\geqslant 0}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ și $x_0 = a$. Atunci din $a = x_0 \leqslant x_n$ rezultă că $f(a) \leqslant f(x_n)$, $\forall n \geqslant 0$, deci, la limită, obținem $0 < f(a) \leqslant 0$, contradicție. În concluzie rezultă că $f \equiv 0$.

91°. Avem, evident, pentru $x \in [0, 1]$ inegalitatea $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, de unde obținem $\dfrac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$, $\forall x \in [0, 1]$. Atunci rezultă că $\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{2n}\,dx = \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2n+1}$. Deoarece $\dfrac{x^{2n}}{1+x} \geqslant 0$ pentru $x \in [0, 1]$, rezultă că $\int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\,dx \geqslant 0$, deci $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Trecînd la limită obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{x^{2n}}{1+x}\,dx = 0$.

92°. Domeniul de definiție al lui F este $\mathbf{R} \setminus \left\{x \in \mathbf{R} \mid \cos\dfrac{x}{2} = 0\right\} = \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Pe orice interval $[a, b] \subset ((2k+1)\pi, (2k+3)\pi)$ avem:

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{x}{2}}}{1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{3}} = \frac{1}{3\cos^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2+\cos x} = f(x)$$

deci F este o primitivă a lui f. Pentru a calcula $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x}$ vom scrie $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x}$. Vom calcula $\int_0^a \dfrac{dx}{2+\cos x}$ pentru $0 < a < \pi$ și vom face $a \to \pi$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\int_0^a \frac{dx}{2+\cos x} = F(a) - F(0) = F(a)$; atunci $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x} = \lim\limits_{\substack{a\to\pi\\ a<\pi}} F(a) =$

$= \lim\limits_{\substack{a\to\pi\\ a<\pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Analog, calculăm $\int_b^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ pentru $\pi < b < 2\pi$ şi vom face $b \to \pi$. Avem $\int_b^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = F(2\pi) - F(b) = -F(b)$; atunci $\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = -\lim\limits_{\substack{b\to\pi\\ b>\pi}} F(b) =$

$$= -\lim_{\substack{b\to\pi\\ b>\pi}} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

În concluzie $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

93°. Se notează $a_0 = \cos\theta$ cu $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deci $b = \sin\theta$. Atunci $a_1 =$ $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$ şi $b_1 = \sin\frac{\theta}{2}$ $a_2 = \cos\frac{\theta}{2^2}$, $b_2 = \sin\frac{\theta}{2^2}$, etc. Prin inducţie se verifică uşor că $a_n = \cos\frac{\theta}{2^n}$, $b_n = \sin\frac{\theta}{2^n}$. Inegalitatea i) revine la $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2^{k+1}} <$ $< \operatorname{tg}\frac{\theta}{2^k}$ şi este evidentă (deoarece funcţia tg este strict crescătoare în cadranul I); apoi $c_n = 2^n \cdot b_n = 2^n \cdot \sin\frac{\theta}{2^n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \theta = \arccos a$.

94°. Condiţiile impuse sînt $1 - x^2 > 0$; $-1 \leqslant \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \leqslant 1$ şi trebuie îndeplinite simultan; condiţia secundă revine la $-1 \leqslant \frac{2x}{x^2-1} \leqslant 1$ sau echivalent $\frac{4x^2}{(x^2-1)^2} \leqslant 1$, adică $x^4 - 6x^2 + 1 \geqslant 0$. În final $x \in \left[-\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right]$.

95°. Aşadar, $\cos t > 0$ şi notînd $\cos t = x$ egalitatea din enunţ devine $x =$ $= \lg x$, adică $10^x = x (x > 0)$. Această egalitate nu poate avea loc deoarece $10^x > x$ pentru orice $x > 0$ (ceea ce se constată din tabloul de variaţie al funcţiei

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = 10^x - x.$$

96°. Deoarece pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $ax^2 + x + 3 \geqslant 0$ rezultă în mod necesar (şi suficient) că 1—12 $a \leqslant 0$, $a > 0$ deci $A = \left[\frac{1}{12}, \infty\right)$. Nedeterminarea este de tipul $\infty - \infty$ şi limita cerută devine $l = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1-a)x^2 + x - 3}{x + 1 + \sqrt{ax^2 + x + 3}}$. Dacă $a = 1$, atunci $l = \frac{1}{2}$; dacă $a > 1$, atunci $l = -\infty$ şi dacă $\frac{1}{12} \leqslant a < 1$, atunci $l = +\infty$.

97°. Notăm $f(x) = 2x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} - x^2$ şi studiem variaţia $f\colon(-1, 1) \to \mathbf{R}$. Din tabloul de variaţie rezultă $2 \leqslant f(x) < \pi - 1$.

98°. Este suficient de completat tabloul de variaţie al funcţiei pe un interval de lungime cît perioada principală a lui f (care este 2π). De exemplu, pentru intervalul $I = [0, 2\pi]$ avem $f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x$, pentru orice $x \in I$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația $f'(x) = 0$ adică $\sin 2x = \sin x$ deci $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$ are în I soluțiile $0,\ \pi,\ 2\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$. Tabloul de variație este

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

și ca atare, $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = -3$, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \frac{3}{2}$.

O altă metodă consta în a nota $\cos x = y$ deci $f(x) = g(y) = 2y - (2y^2 - 1)$ și a determina valorile extreme ale funcției $g(y)$ pentru $y \in [-1, 1]$.

99°. Punctele de extrem sînt printre soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ deci $x = -1/2$ (punct de minim), iar pentru punctele de inflexiune se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$ etc.

100°. Graficul nu are asimptote verticale și nici orizontale. Admite asimptotă oblică spre $+\infty$, anume $y = x$ și asimptota oblică $y = -x$ spre $-\infty$.

101°. Mai întîi f trebuie să fie derivabilă în punctul $x = 0$, deci să existe limita

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}.$$

Pentru aceasta este necesar și suficient ca $\alpha - 1 > 0$ deci $\alpha > 1$; în plus,

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și ca f să fie de două ori derivabilă în $x = 0$ trebuie că $\alpha > 1$ și să existe

$$\lim_{\substack{x\to x\\ x>0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\alpha x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-3}\cos\frac{1}{x}\right), \text{ adică } \alpha > 3.$$

102°. Condiția ca f să fie derivabilă în $x = 1$ este echivalentă cu faptul că f să fie continuă în $x = 1$ și $f'_s(1) = f'_d(1)$ adică $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$ și $2a_1 + b_1 = 2a_2 + b_2$. De aici rezultă $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 - c_1$, $2a_1 + b_1 = 2a_2 + b_2$, de unde $a_1 = a_2 + c_2 - c_1$, $b_1 = b_2 - 2(c_1 - c_2)$ și se obține egalitatea de polinoame din enunț.

103°. Funcția arcsin este derivabilă pe intervalul $(-1, 1)$ iar funcția $x \to \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ este derivabilă pentru $x > 0$. Atunci punctele în care funcția f ar putea să nu fie derivabilă sînt $x = 0$ și punctele unde $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 1$ sau $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = -1$, adică $x = 0$, $x = 1$. Funcția f este continuă pe $[0, 3]$ și pentru $x \neq 0,\ 1$ avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x) - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)|x-1|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că f nu este derivabilă în $x = 0$ și $x = 1$ deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \infty$, $f'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \frac{1}{2}$ și $f'_d(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

104°. i) Mai întîi se determină constantele reale A, B, C, D astfel încît pentru orice $x \neq -3$,

$$\frac{x^2 + 6(m+1)x + 9m + 8}{(x+3)^3(mx^2+1)} = \frac{Ax + B}{mx^2 + 1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2} \text{ deci}$$

$$f(x) = \frac{(Ax + B)(x+3) + C(mx^2+1)}{(x+3)(mx^2+1)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{-D}{x+3}\right).$$

Ca f să admită o primitivă rațională trebuie ca $A = B = C = 0$ și rezultă $m = -1$.

105°. Așadar,

$$f(x) = x - 2 + |x-1| + |x-3| = \begin{cases} 2 - x & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ x & \text{dacă } 1 < x \leqslant 3 \\ 3x - 6 & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$$

și f este o funcție continuă; primitivele lui f sînt de forma $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$F(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 3 \\ \frac{3x^2}{2} - 6x + C_3 & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$$

unde C_1, C_2, C_3 sînt constante; punînd condiția ca F să fie continuă rezultă $C_1 + \frac{3}{2} = C_2 + \frac{1}{2}$ și $C_2 + \frac{9}{2} = C_3 + \frac{27}{2} - 18$ iar notînd $C_1 = C$, rezultă $C_2 = C + 1, C_3 = C + 10$ deci toate primitivele lui F sînt definite prin

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x + C & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ \frac{x^2}{2} + C + 1 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 3 \\ \frac{3x^2}{2} - 6x + C + 10 & \text{dacă } x > 3. \end{cases}$$

106°. Așadar, $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{(x + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$. Pentru $\alpha = 0$, $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}$. Pentru $\alpha \neq 0$, rezultă $I(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x + \cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_0^1 =$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\alpha)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} u)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-u & \text{pentru } 0<u<\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}-u & \text{pentru } -\pi<u<0\end{cases}$$

şi

rezultă în final $I(\alpha)=\dfrac{\alpha}{2\sin\alpha}$ pentru $\alpha\in(-\pi,\pi)$, $\alpha\neq 0$.

107°. Avem de arătat că

$$\int_0^1 (e^{x^2}+e^{1-x^2})\,dx\leqslant 1+e.$$

Considerînd funcţia $f\colon [0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$, din tabloul ei de variaţie, rezultă $f(x)\leqslant 1+e$ pentru orice $x\in[0,1]$ deci

$$\int_0^1 f(x)dx\leqslant\int_0^1(1+e)dx=1+e.$$

Scanned with OKEN Scanner

FIZICĂ

Scanned with OKEN Scanner

A. BREVIAR

1. MECANICĂ

a. Mecanica clasică nerelativistă, elaborată de Isaac Newton (1643—1727), se bazează pe următoarele principii:

α) Principiul inerţiei: „Un punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, dacă asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe starea respectivă".

β) Principiul fundamental al dinamicii: „Experienţele efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mişcare, cărora li s-au aplicat diferite forţe, arată că vectorul forţă este proporţional cu produsul dintre masă şi vectorul acceleraţie, $\bar{F} = m\bar{a}$".

Principalele tipuri de forţe întîlnite în mecanica elementară sînt:

— greutatea G a unui corp de masă m într-un cîmp gravific de acceleraţie g:

$$G = mg;$$

— forţa elastică determinată de deformaţia $x = \Delta l$ (în domeniul de elasticitate) a unui resort de constantă k:

$$F_e = kx = \frac{EA}{l}\,\Delta l \qquad \text{(legea lui Hooke)}$$

(l şi A sînt lungimea şi, respectiv, aria secţiunii transversale în stare nedeformată, iar E este modulul de elasticitate al barei elastice);

— forţa de frecare între un corp „apăsat" cu forţa F pe o suprafaţă şi respectiva suprafaţă

$$F_{fr} = \mu F_n,$$

unde μ este coeficientul de frecare, iar F_n este componenta normală pe suprafaţă a forţei de apăsare;

— forţa inerţială de tip centrifug, acţionînd în direcţia şi sensul razei vectoare (în raport cu centrul circumferinţei parcurse), asupra unui corp aflat în mişcare de rotaţie:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega v = m\omega^2 r,$$

unde m este masa corpului, ω şi v sînt vitezele unghiulară şi, respectiv, liniară ale mişcării de rotaţie, iar r este raza circumferinţei parcurse.

γ) Principiul acţiunilor reciproce: „Dacă un corp exercită asupra altui corp forţa F_{12}, atunci cel de-al doilea corp exercită asupra primului corp forţa F_{21},

egală și de sens contrar cu F_{12}, deci $F_{12} = -F_{21}$" sau „Acțiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime și dirijate în sensuri opuse".

δ) Principiul suprapunerii forțelor: „Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație, independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale":

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow m\vec{a} = m \sum_i \vec{a}_i.$$

ε) Principiul relativității în mecanica newtoniană: „Legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale". Invarianța legilor mecanicii față de sistemele de referință inerțiale este asigurată de transformările lui Galileo Galilei. Dîndu-se două sisteme de referință inerțiale S și S', S' mișcîndu-se cu viteza constantă $\vec{v}$ față de S, $\vec{v}$ fiind paralelă atît cu axa Ox, cît și cu axa $O'x'$, între coordonatele spațio-temporale $\vec{r}$ și t, față de S, ale unui eveniment, și coordonatele spațio-temporale $\vec{r}'$ și t', față de S', ale aceluiași eveniment, există relațiile lui Galileo Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t', \\ t = t', \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' = t, \end{cases}$$

sau, în coordonate carteziene,

$$\begin{aligned} x &= x' + vt', & x' &= x - vt, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= t', & t' &= t. \end{aligned}$$

Toate celelalte rezultate ale mecanicii newtoniene se deduc din aceste principii ca teoreme.

b. Dacă la momentul inițial t_0, al mișcării, coordonata de poziție inițială este x_0, iar viteza inițială este v_0, atunci spațiul parcurs de mobil are următoarele expresii, în funcție de tipul de mișcare:

— Pentru mișcarea rectilinie uniformă:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0)$$

și

$$v = v_0.$$

— Pentru mișcarea rectilinie uniform variată:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

și

$$v = v_0 + a(t - t_0).$$

Eliminînd timpul t între expresiile vitezei și coordonatei se obține formula lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Sub formă vectorială, ecuațiile mișcării rectilinii uniform variate sînt:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

și

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0).$$

— Pentru mișcarea corpurilor sub acțiunea greutății, alegînd axa Oy orientată vertical în sus, rezultă

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

și

$$v = v_0 - g(t - t_0).$$

Dacă se alege axa Oy cu sensul pozitiv în jos, atunci se înlocuiește $-g$ cu g.

c. În cazul mișcării circulare uniforme, pentru unghiul la centru, format de raza vectoare a mobilului cu raza de referință, pentru viteza liniară și pentru accelerația centripetă ale mobilului avem, respectiv, următoarele expresii:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0),$$

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2 \frac{R}{T^2}.$$

d. Pentru mișcarea oscilatorie, ecuația elongației este

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Viteza de mișcare a punctului care efectuează o mișcare oscilatorie este

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

iar accelerația

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Faza mișcării oscilatorii este $\varphi = \omega t + \varphi_0$; faza inițială φ_0 și perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Perioada oscilatorului liniar armonic depinde de masa m și de constanta elastică k, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, iar pentru pendulul gravitațional, de lungime l, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

e. Legea atracției universale a lui Newton exprimă dependența forței de atracție dintre două corpuri în funcție de masele m_1 și m_2 ale acestor corpuri și de distanța r dintre ele. Corpurile sînt considerate punctiforme în raport cu distanța dintre ele, iar forța de atracție acționează de-a lungul liniei care unește corpurile și este dată de expresia:

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

K fiind o constantă universală.

Scanned with OKEN Scanner

f. Lucrul mecanic al unei forţe constante a cărei direcţie formează un unghi cu direcţia deplasării este dat de expresia $L = Fd \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{d}$; în cazul forţei de greutate, $L = mgh$; pentru o forţă elastică, $L = -\frac{kx^2}{2}$ etc...

Prin definiţie puterea este $P = \frac{L}{t}$.

Energia cinetică a unui punct material este $E_c = \frac{1}{2} mv^2$, iar variaţia energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra punctului material în timpul acestei variaţii:

$$L = E_{c_2} - E_{c_1}.$$

Principalele expresii ale energiei potenţiale întîlnite în mecanica elementară corespund:

a) energiei potenţiale a unui corp de masă m, aflat într-un cîmp gravific de acceleraţie constantă g şi situat într-un punct de coordonată h (după o axă avînd direcţia acceleraţiei g, dar sensul opus acesteia):

$$E_p = mgh,$$

b) energiei potenţiale corespunzătoare unei deformaţii longitudinale x (alungire sau comprimare) a unui resort de constantă elastică k:

$$E_p = \frac{k}{2} x^2.$$

Energia mecanică a unui punct material aflat într-un cîmp conservativ de forţe este

$$E = E_p + E_c.$$

Într-un cîmp conservativ de forţe energia mecanică a unui sistem izolat este constantă (se conservă), adică:

$$E_p + E_c = E_{p_0} + E_{c_0}.$$

De exemplu, în cazul mişcării oscilatorii armonice

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kA^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2.$$

În cazul unui sistem de puncte materiale, energia cinetică a sistemului este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Între două stări date, la momentele t_1 şi t_2, variaţia energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forţelor, atît interioare cît şi exterioare, care acţionează asupra punctelor materiale din sistem, adică:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = L_{int} + L_{ext}.$$

Scanned with OKEN Scanner

g. Produsul $\vec{H} = \vec{F}_m \Delta t$ se numește impulsul forței. Impulsul forțelor externe asupra unui sistem de puncte materiale este egal cu variația impulsului total al sistemului:

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta \vec{P}$$

sau

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

aceasta fiind teorema impulsului.

Dacă $F = 0$, atunci $(\vec{P})_t = (\vec{P})_{t_0}$, adică impulsul total al sistemului se conservă (principiul conservării impulsului pentru sisteme izolate).

Impulsul total al unui sistem fizic este egal cu produsul dintre masa sistemului și viteza centrului de masă:

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{P},$$

unde

$$m = \sum_i m_i, \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad \text{și} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

h. Momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu un punct, numit pol, este definit prin

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = M = rF \sin \alpha,$$

$\vec{r}$ fiind vectorul de poziție al forței față de pol.

Momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală $F_\perp$ a forței și brațul ei b pînă la axă, în planul perpendicular pe axă:

$$M_\parallel = \pm b \cdot F_\perp,$$

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este, prin definiție:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v},$$

$\vec{r}$ fiind vectorul de poziție al corpului de masă m.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \text{ adică } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Pentru $\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, adică $(\vec{L})_t = (\vec{L})_{t_0}$. Prin urmare, dacă momentul rezultant al forțelor externe în raport cu un pol sau în raport cu o axă este permanent nul, atunci momentul cinetic total al sistemului, în raport cu acel pol sau cu acea axă, se conservă.

i. Un corp rigid se află în mișcare de translație, dacă orice dreaptă legată de corp își păstrează orientarea (se mișcă paralel cu ea însăși).

Scanned with OKEN Scanner

Un corp rigid se află în mișcare de rotație, dacă toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotație.

Toate punctele corpului rigid în rotație au aceeași viteză unghiulară $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$.

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului, de rază vectoare $\vec{r}_i$, sînt:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Dacă ω crește sau scade în timp, mișcarea de rotație a rigidului este neuniformă, accelerația unghiulară a acesteia fiind:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ținînd seama de expresia momentului de inerție al rigidului față de axa de rotație considerată,

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2,$$

energia cinetică totală a solidului aflat în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă este:

$$E_{c_{rot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Dacă solidul rigid se află în mișcare de translație și de rotație, energia cinetică a acestuia este:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

m_s fiind masa solidului.

Între momentul $\vec{M}$ al forțelor, în raport cu axa de rotație, și accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$, imprimată de forțele exterioare unui rigid care se poate roti în jurul unei axe fixe, există relația

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}.$$

Pentru $\vec{M} = 0$, $I\vec{\varepsilon} = I\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{I(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1)}{\Delta t} = \frac{\vec{L}_2 - \vec{L}_1}{\Delta t} = 0$, adică momentul cinetic $\vec{L}$ se conservă.

j. Rezultanta forțelor care acționează asupra unui sistem se obține prin operația de compunere a forțelor.

Echilibrul unui punct material liber este realizat dacă

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Echilibrul solidului rigid liber se obține dacă:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

și

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul unui cuplu de forţe în raport cu un punct oarecare O din spaţiu (figura F.A.1) este

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F},$$

deoarece $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ şi $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_0$.

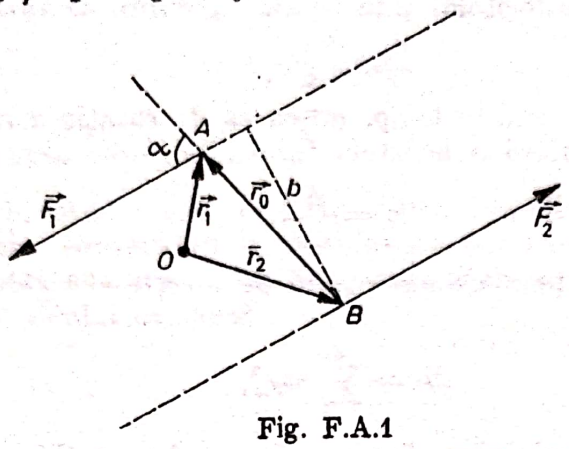


Fig. F.A.1

k. Diferenţa de presiune dintre două puncte dintr-un fluid în echilibru, aflate la distanţa h, este:

$$p_2 - p_1 = \rho g h,$$

ρ fiind densitatea fluidului şi g acceleraţia gravitaţională

$$p_1 S_1 = p_2 S_2,$$

S_1 şi S_2 fiind secţiunile pe care se exercită presiunile p_1 şi, respectiv, p_2.

Un corp cufundat într-un fluid în repaus este împins cu o forţă verticală, de jos în sus, egală cu greutatea volumului V de fluid dislocuit de corp (legea lui Arhimede):

$$F = mg = \rho V g,$$

unde ρ este densitatea fluidului. Relaţia

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

se numeşte ecuaţia de continuitate, S_1 fiind secţiunea transversală a conductei în punctele căreia viteza fluidului este $\vec{v}_1$, iar S_2 secţiunea transversală a conductei în punctele căreia viteza fluidului este $\vec{v}_2$.

În cazul curgerii staţionare a unui fluid ideal, de-a lungul liniei de curent se respectă legea lui Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2.$$

l. Compunînd două oscilaţii $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ şi $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, se obţine o oscilaţie $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, unde $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ şi

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

— Pentru $\Delta\varphi = 2k\pi$, $a = a_1 + a_2$, oscilaţiile fiind în fază.
— Pentru $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, $a = a_1 - a_2$, oscilaţiile fiind în opoziţie de fază.
— Pentru $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, oscilaţiile fiind în cvadratură.

Scanned with OKEN Scanner

Prin undă înțelegem fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material. Între lungimea de undă, λ, viteza de fază, v_f, și perioada T a undei există relația:

$$v_f = \frac{\lambda}{T}.$$

— Pentru undele transversale care se propagă într-o coardă

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}},$$

T_m fiind tensiunea la care este solicitată coarda, iar μ masa unității de lungime a corzii.

Pentru undele longitudinale avem

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

E fiind modulul de elasticitate, iar ρ densitatea mediului de propagare.

Dacă E este energia emisă de sursă în timpul t, atunci puterea emisă de sursă (fluxul de energie emis) este:

$$P = \frac{E}{t} = \Phi.$$

Intensitatea undei va fi

$$I = \frac{P}{A},$$

A fiind aria suprafeței perpendiculare pe direcția de propagare prin care se face transferul de energie.

Ecuația undei plane este:

$$u = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{v_f}\right) = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right).$$

În cazul reflexiei și refracției:

— Planul de incidență, cel de reflexie și cel de refracție coincid;

— $\hat{i} = \hat{r}$ (unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie);

— $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$, unde r_e este unghiul de refracție.

Cînd două unde, $y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$ și $y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$, interferă, amplitudinea undei rezultante este $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\right]$. Astfel, pentru $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2k\pi$, $A = A_1 + A_2$, iar pentru $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2k + 1)\pi$, $A = A_1 - A_2$.

Sunetul are următoarele proprietăți caracteristice:

— înălțime, determinată de frecvența undei sonore;

— intensitate auditivă (tăria sunetului), nivelul de intensitate sonoră, L, pentru un sunet de intensitate I, fiind $L = \lg \frac{I}{I_0}$;

— timbrul, determinat de numărul armonicelor care însoțesc sunetul fundamental și nivelul lor de intensitate sonoră.

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ŞI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

Între presiunea p, la care se află un gaz ideal, energia cinetică medie de translaţie a moleculelor, $\widetilde{W}_{c\,tr}$, viteza pătratică medie u a moleculelor şi temperatura termodinamică T a gazului există relaţiile:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \widetilde{W}_{c\,tr} = \frac{n_0 m u^2}{3} = n_0 k_B T,$$

unde n_0 este numărul de molecule de gaz din unitatea de volum, iar $k_B = \frac{R}{N_A}$ este constanta lui Boltzmann (R este constanta gazelor perfecte, iar N_A numărul lui Avogadro).

Viteza pătratică medie a moleculelor unui gaz ideal este dată de expresiile:

$$u \equiv \sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

unde M este masa unui kilomol de gaz.

Ecuaţia termică de stare a gazelor ideale este

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT,$$

unde m este masa cantităţii de gaz ideal avînd volumul V la presiunea p şi temperatura termodinamică T, M este masa unui kilomol de gaz, ν este numărul de kilomoli conţinuţi de respectiva cantitate de gaz, iar $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$ (constanta gazelor ideale).

Lungimea drumului liber mediu parcurs de moleculele unui gaz este dată de expresiile:

$$\widetilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_0 \sigma} \cong \frac{k_B T}{\sqrt{2}\, \sigma p},$$

unde n_0 este numărul moleculelor din unitatea de volum a gazului, iar $\sigma = 4\pi r^2$ (r fiind raza moleculară efectivă) este secţiunea eficace de împrăştiere pentru ciocnirile moleculă-moleculă.

Energia internă a unui sistem termodinamic reprezintă suma energiilor cinetice şi potenţiale ale particulelor componente (molecule, atomi, sau ioni) corespunzînd mişcărilor de translaţie, rotaţie şi oscilaţie ale particulelor (cu excepţia mişcării de ansamblu a sistemului şi fără a lua în consideraţie interacţiunea cu cîmpul gravific).

Energia internă corespunzînd translaţiilor dezordonate (termice) ale moleculelor unui gaz ideal este dată de expresia:

$$U_{tr} = N \cdot \widetilde{W}_{c\,tr} = \nu N \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \nu RT,$$

unde N este numărul total al moleculelor gazului, iar ν numărul de kilomoli de gaz ideal.

După cum valoarea unui parametru fizic al unui sistem termodinamic este determinată în principal de caracteristicile sistemului, respectiv de cele ale corpurilor (sistemelor) învecinate, respectivul parametru este numit intern (de exemplu, densitatea, presiunea etc.), respectiv extern (de exemplu volumul unui gaz, intensităţile cîmpurilor electrice, magnetice etc.). Variaţia energiei interne a unui sistem termodinamic, la valori constante ale parametrilor interni şi ale cantităţilor de substanţă, se numeşte lucru mecanic, iar variaţia energiei interne, la valori constante ale parametrilor externi şi ale cantităţilor de substanţă, se numeşte (cantitate de) căldură.

Scanned with OKEN Scanner

Variația energiei interne a unui sistem termodinamic în cursul unui proces, în care sistemul nu schimbă substanță cu exteriorul, este egală cu diferența dintre (cantitatea de) căldură primită și lucrul mecanic efectuat de sistem în cursul respectivului proces:

$$U = Q_p - L_{ef} \text{ (principiul I al termodinamicii).}$$

Parametrul fizic definit prin expresia $c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$, în care ΔT este variația temperaturii termodinamice (sau a temperaturii în scara Celsius) într-un anumit proces termodinamic, în care o cantitate de substanță de masă m primește (cantitatea de) căldură ΔQ, se numește căldură specifică a substanței, pentru procesul termodinamic considerat.

Parametrul de stare entropie al unui sistem termodinamic este definit prin expresia: $dS = \frac{dQ}{T}$, unde dS este variația entropiei sistemului termodinamic într-un proces elementar (caracterizat de variații „infinit mici" (diferențiale) ale parametrilor) desfășurat la temperatura termodinamică T, în care sistemul primește (cantitatea de) căldură dQ.

Expresiile ecuațiilor parametrilor de stare, adică ale lucrului mecanic efectuat, $L_{ef} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$, și ale cantității de căldură primită de un gaz ideal, corespunzînd principalelor tipuri de transformări particulare ale acestuia (între stările inițială 1 și finală 2) sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Tipul transformării particulare	Ecuația parametrilor de stare	L_{ef}	Q_p
Izotermă	$p_1V_1 = p_2V_2 = \text{const.}$ (legea Boyle-Mariotte)	$\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = T_1(S_2 - S_1)$
Izobară	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{const.}$ (legea Gay-Lussac)	$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$	$\Delta U + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \nu\mu c_p(T_2 - T_1)$
Izocoră	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{const.}$ (legea Charles)	0	$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \nu\mu c_V(T_2 - T_1)$
Adiabatică	$p \cdot V^\gamma = \text{const.}$, unde $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$	$-\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(T_1 - T_2)$	0

Randamentul unui motor termic, care funcționează ciclic între temperaturile T_1 (temperatura sursei calde) și T_2 (temperatura sursei reci), este mai mic sau cel mult egal cu randamentul $\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ al motorului care funcționează între aceleași temperaturi după un ciclu Carnot reversibil (format din două transformări izoterme, la temperaturile T_1, respectiv T_2, și două transformări adiabatice reversibile):

$$\eta = \frac{L_{\text{efectuat}}}{Q_{\text{primit}}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leqslant \eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Q_2 este cantitatea de căldură cedată sursei reci, în condițiile primirii de la sursa caldă a cantității de căldură Q_1 (formularea Carnot a principiului II al termodinamicii).

Parametrul fizic definit prin expresia $q = Q/m$, unde Q este cantitatea de căldură degajată prin arderea unei cantități de combustibil de masă m, se numește putere calorifică a combustibilului.

Variațiile cu temperatura ale lungimii, ariei unei secțiuni, respectiv volumului unui corp, în intervalul $[t_0,\ t_0 + \Delta t]$, sînt date de expresiile: $\Delta l = l_{(t_0 + \Delta t)} - l_0 = \alpha \Delta t l_0$, $\Delta A = A_{(t_0 + \Delta t)} - A_0 = \beta \Delta t A_0$, $\Delta V = V_{(t_0 + \Delta t)} - V_0 = \gamma \Delta t V_0$, unde l_0, A_0 și V_0 reprezintă lungimea, aria secțiunii și, respectiv, volumul corpului la temperatura t_0, iar α, β și γ sînt coeficienții medii, pentru intervalul $[t_0, t_0 + \Delta t]$ de dilatare liniară, de suprafață și, respectiv, de volum. Pentru solide izotrope $\gamma \cong 3\alpha$, iar $\beta \cong 2\alpha$.

Forța care provoacă o alungire a unei bare solide de arie S a secțiunii transversale și de modul de elasticitate E, egală cu cea determinată de dilatarea termică, prin creșterea cu Δt a temperaturii, este dată de expresia

$$F = ES\alpha\Delta t.$$

După cum în expresia $L = Q/m$, Q are semnificația de cantitate de căldură transferată masei m de substanță, pentru trecerea sa integrală, la temperatura de topire, respectiv de vaporizare din faza solidă în cea lichidă, respectiv din faza lichidă în cea de gaz, parametrul L îl vom numi căldură latentă de topire, respectiv de vaporizare, a substanței considerate.

3. ELECTRICITATE

O sarcină electrică punctiformă q_1, situată într-un mediu izotrop și omogen, de constantă dielectrică (permitivitate) ε exercită asupra altei sarcini punctiforme q_2, aflată într-un punct de rază vectoare $\vec{r}$ în raport cu q_1, forța electrostatică (figura F.A.2)

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon r^3} \cdot \vec{r} \text{ (legea lui Coulomb).}$$

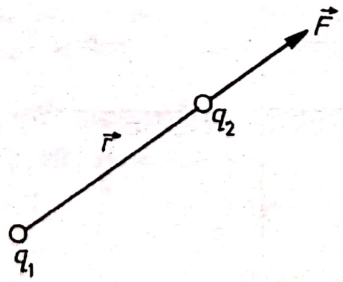


Fig. F.A.2

Parametrii fizici $\vec{E}(\vec{r})$ și $U(\vec{r})$ definiți prin expresiile:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}, \quad U(\vec{r}) = \frac{W_i(\vec{r})}{q},$$

unde $\vec{F}(\vec{r})$ și $W_i(\vec{r})$ sînt forța care acționează asupra unei sarcini electrice punctiforme q și, respectiv, energia potențială (de interacțiune) coulombiană, corespun-

Scanned with OKEN Scanner

zînd acestei sarcini, situată în punctul M, de rază vectoare $\vec{r}$, al cîmpului electrostatic creat de o distribuţie statică arbitrară de sarcini electrice, se numesc intensitate a cîmpului electric şi, respectiv, potenţialul electric în punctul M (de rază vectoare $\vec{r}$).

În cazul în care cîmpul electrostatic este determinat (generat) de o sarcină punctiformă Q, situată în originea O:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^3} \cdot \vec{r}, \qquad U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}.$$

Pentru diferenţa de potenţial dintre armăturile unui condensator, neglijabilă faţă de aceea care poate provoca fenomene ireversibile de polarizare a dielectricului dintre armături, raportul dintre sarcina electrică a unei armături şi diferenţa de potenţial dintre armături — pentru valori constante ale potenţialelor conductorilor învecinaţi — este constant şi numit capacitate electrică a condensatorului

$$C = \frac{Q}{U}.$$

În cazul unui condensator cu armături plane, ale căror dimensiuni sînt mult mai mari decît distanţa d dintre ele (condensator „plan") intensitatea cîmpului electric dintre armături este constantă şi dată de expresia $E = U/d$, capacitatea condensatorului fiind $C = \varepsilon S/d = \varepsilon_r \varepsilon_0 S/d$, unde U este tensiunea dintre armături, iar ε, ε_r şi ε_0 sînt permitivitatea absolută, permitivitatea relativă a dielectricului dintre armături şi, respectiv, permitivitatea vidului.

Parametrii fizici definiţi prin expresiile $I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ şi $I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$, unde ΔQ este sarcina electrică care străbate în intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$ secţiunea unui conductor se numesc intensitate medie (în intervalul de timp specificat) şi, respectiv, intensitate momentană (instantanee) a curentului electric. În cazul în care, pentru un anumit conductor electric, $I(t)$ şi implicit I_m sînt constante, vom spune că respectivul conductor este străbătut de un curent continuu.

Parametrii fizici definiţi prin expresiile $R = \frac{U}{I}$ (legea lui Ohm pentru un „conductor") $\rho = \frac{RS}{l}$, unde I este intensitatea curentului electric care străbate un conductor, pentru o diferenţă de potenţial electric (tensiune) U, între capetele conductorului, iar S şi l sînt aria secţiunii transversale a unui conductor cilindric şi, respectiv, lungimea acestui conductor, se numesc rezistenţă electrică a conductorului şi, respectiv, rezistivitate electrică a materialului din care este confecţionat conductorul.

Parametrul fizic definit prin expresia $e = \frac{W_{circ}(q)}{q}$, unde $W_{circ}(q)$ este energia consumată pentru ca sarcina q să parcurgă complet (revenind la locul de pornire) circuitul electric închis C, alimentat de un anumit generator electric, se numeşte tensiune electromotoare a generatorului electric.

Suma căderilor de tensiune pe rezistenţele R (exterioară generatorului) şi r (interioară generatorului), generatorul alimentînd circuitul electric închis C, este egală cu tensiunea electromotoare a acestuia:

$e = (R + r)I$ (legea lui Ohm pentru „întreg circuitul").

Diferenţa dintre tensiunea electromotoare a unui generator electric şi căderea de tensiune pe rezistenţa interioară a generatorului, în condiţiile includerii acestuia

Scanned with OKEN Scanner

într-un anumit circuit electric închis, C, se numește tensiune la bornele generatorului (inclus în circuitul C)

$$U_b = e - rI = RI.$$

Suma algebrică a intensităților curenților într-un nod al unei rețele electrice este nulă:

$$\sum I_k = 0 \text{ (prima lege a lui Kirchhoff).}$$

Suma căderilor de tensiune pe diferitele componente ale unui „ochi" al unei rețele electrice este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatorilor electrici în acest ochi:

$$\sum (R_k + r_k) I_k = \sum E_j \text{ (a doua lege a lui Kirchhoff).}$$

Rezistența echivalentă a unei grupări de n rezistoare (de rezistențe R_1, R_2, R_3, ..., R_n) legate:

a) în serie este $R_s = \sum_1^n R_k$,

b) în paralel este $R_p = \left(\sum_1^n \frac{1}{R_k} \right)^{-1}$.

Expresia legii lui Ohm pentru un circuit electric închis, alimentat de o baterie de n generatoare identice (având fiecare tensiunea electromotoare e și rezistența internă r) legate:

a) în serie este $I = \frac{ne}{R + nr}$,

b) în paralel este $I = \frac{e}{R + \frac{r}{n}}$,

I fiind intensitatea curentului electric debitat în circuitul exterior, de rezistență R.

Puterea disipată de un generator electric de tensiune electromotoare e, care alimentează — sub tensiunea U_b la borne — un circuit electric închis:

a) în întreg circuitul, este $P_t = eI$,

b) în circuitul exterior este $P = U_b I$,

c) într-un rezistor de rezistență electrică R, este

$$P_R = U_b \cdot I_R = \frac{U_b^2}{R} = RI_R^2,$$

unde I, I_R și U_b sînt intensitățile curenților debitați de generator în circuitul exterior, respectiv în rezistor, și tensiunea electrică la bornele rezistorului.

Masa cantității de metal depusă la catodul unui voltametru într-un proces de electroliză, în cursul căruia ionii respectivului metal transportă sarcina q este $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot q$ (legea lui Faraday a electrolizei), unde A și n sînt respectiv masa atomică și valența metalului, iar $F = eN_A (\cong 96\,500$ C/echiv. gram) este constanta lui Faraday (e = sarcina elementară, N_A = numărul lui Avogadro).

În funcție de forma geometrică a conductorului străbătut de un curent electric de intensitate I, avem următoarele principale expresii particulare ale intensității cîmpului magnetic:

a) într-un punct situat la distanța d față de un conductor rectiliniu, filiform și infinit

$$H = \frac{I}{2\pi d},$$

Scanned with OKEN Scanner

b) în centrul unei spire circulare de rază r:

$$H = \frac{2I}{r},$$

c) în interiorul unui solenoid drept de lungime mult mai mare decît dimensiunile secţiunii transversale

$$H = \frac{NI}{l} = nI, \quad \left(n = \frac{N}{l}\right)$$

unde N şi l sînt numărul de spire şi, respectiv, lungimea solenoidului, direcţia şi sensul intensităţii cîmpului magnetic fiind date în toate cazurile de regula burghiului drept (vezi figura F.A.3).

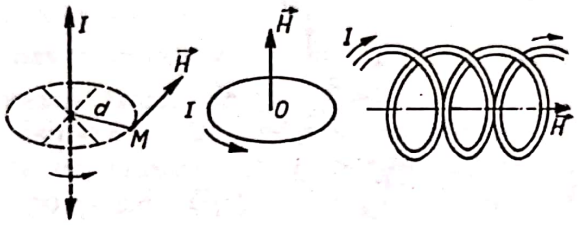


Fig. F.A.3

Parametrul fizic inducţie a unui cîmp magnetic (inducţie magnetică) $\vec{B}$ este definit prin forţa exercitată de acest cîmp magnetic:

a) asupra unui element $d\vec{l}$ al unui conductor parcurs de un curent electric de intensitate I : $d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$ (expresia forţei Laplace),

b) sau asupra unei sarcini electrice punctiforme q, în mişcare cu viteza $\vec{v}$ faţă de cîmpul magnetic: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (expresia forţei Lorentz).

În cazul unui mediu izotrop, parametrul fizic definit prin expresia:

$$\mu = \frac{B}{H} \; (= \mu_0 \mu_r),$$

unde B este inducţia magnetică corespunzătoare unui cîmp de intensitate H, se numeşte permeabilitate (totală) absolută, corespunzătoare intensităţii H a cîmpului magnetic $\left(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}\right.$ este permeabilitatea magnetică absolută a vidului, iar μ_r este permeabilitatea relativă, corespunzătoare intensităţii H a cîmpului magnetic$\left.\right)$.

Fluxul unui cîmp magnetic uniform (de inducţie $\vec{B}$ constantă în spaţiu, ca valoare, direcţie şi sens), printr-o suprafaţă Σ, este definit prin expresia: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\vec{B}, \vec{S})$, unde $\vec{S}$ este aria orientată (în direcţia normalei) a suprafeţei Σ.

Variaţia fluxului unui cîmp magnetic prin suprafaţa delimitată de conturul închis C produce o tensiune electromotoare de „inducţie electromagnetică", dată de legea lui Faraday:

$$e = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\Delta\Phi$ este variaţia fluxului magnetic prin suprafaţa delimitată de conturul C, pe durata Δt.

Acţiunea forţei Lorentz asupra electronilor liberi dintr-un conductor „deschis", aflat în mişcare faţă de un cîmp magnetic, determină de asemenea (de regulă) apariţia unor tensiuni electromotoare induse în conductor. Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar, de lungime l, perpendicular pe inducţia $\vec{B}$ a unui cîmp magnetic uniform şi pe viteza $\vec{v}$ de deplasare a conductorului, este dată de expresia: $e = Blv \sin \alpha$, unde α este unghiul dintre viteza $\vec{v}$ de deplasare a conductorului şi inducţia $\vec{B}$ a cîmpului magnetic (figura F.A.4).

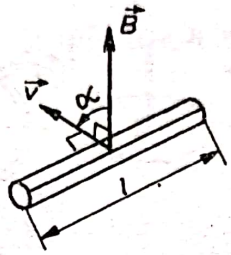


Fig. F.A.4

Pentru valori ale intensităţii curentului electric într-un conductor (în particular solenoid), mici în raport cu cele care provoacă fenomene ireversibile de magnetizare, raportul dintre fluxul magnetic $\Phi(I)$, produs prin suprafaţa delimitată de conductor, de cîmpul magnetic generat de un anumit curent electric care străbate conductorul, şi intensitatea I a acestui curent, $L = \frac{\Phi(I)}{I}$, este constant şi numit inductanţă a conductorului (solenoidului).

Expresia inductanţei unui solenoid „drept", de lungime mult mai mare decît dimensiunile secţiunii sale transversale este:

$$L = \mu \frac{N^2 S}{l},$$

unde μ este permeabilitatea absolută a miezului solenoidului, iar S şi N sînt aria secţiunii transversale şi, respectiv, numărul de spire al (înfăşurării) solenoidului.

Curenţii electrici produşi de tensiuni electromotoare, care depind sinusoidal de timp, se numesc curenţi alternativi sinusoidali.

Expresia intensităţii curentului debitat de un generator de curent alternativ, de tensiune la borne $U(t) = U_0 \sin \omega t$, într-un:

a) circuit RLC serie este:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_s) = \frac{U_0}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_s),$$

b) circuit RLC derivaţie este:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_p) = U_0 \sqrt{\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2 + \frac{1}{R^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_p),$$

unde U_0 şi I_0 sînt amplitudinile tensiunii la borne, respectiv a intensităţii curentului debitat; $Z = \frac{U_0}{I_0}$, $X_L = L\omega$, $L_C = \frac{1}{C\omega}$ şi R sînt respectiv impedanţa circui-

tului, rectanța bobinei de inductanță L, rectanța condensatorului de capacitate C (toate pentru un curent alternativ de frecvență $f = \frac{\omega}{2\pi}$) și rezistența rezistorului, iar

$$\varphi_s = \operatorname{arctg} \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) \quad \text{și} \quad \varphi_p = \operatorname{arctg} R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

sînt defazajele intensității curentului debitat în raport cu tensiunea la borne, în cazul circuitului RLC serie, respectiv derivație.

În cazul în care frecvența tensiunii alternative la borne devine egală cu $f_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (frecvența de rezonanță a circuitului), amplitudinea intensității curentului debitat în circuitul RLC atinge — pentru o valoare dată a amplitudinii tensiunii la borne — o valoare:

a) maximă, în cazul circuitului serie,

b) minimă, în cazul circuitului derivație.

Puterea medie disipată pe o porțiune (element) a(i) unui circuit de curent alternativ, parcursă de un curent de intensitate $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, pentru o tensiune la capetele porțiunii $U(t) = U_0 \sin \omega t$, este $P_a = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi$, unde $U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ și $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ sînt valorile efective (eficace) ale tensiunii la capetele porțiunii (elementului) de circuit, respectiv intensității curentului electric prin elementul de circuit.

Între tensiunile de linie U_l, respectiv de fază U_f, curenții de linie I_l și de fază I_f, și putere există — pentru montajele de curent trifazat — relațiile:

Tipul montajului	U_l	I_l	P
În stea	$\sqrt{3}\,U_f$	I_f	$\sqrt{3}\,U_l I_l \cos\varphi = 3\,U_f I_f \cos\varphi$
În triunghi	U_f	$\sqrt{3}\,I_f$	

Tensiunea U la bornele unui dinam se exprimă prin rezistențele r a rotorului și r_i a înfășurării electromagneților inductorului, intensitățile curenților electrici I prin consumator, I_r prin rotor, I_e prin înfășurarea electromagneților inductorului, și tensiunea electromotoare $E = KN\Phi\nu$ produsă de dinam (unde K este un coeficient specific dinamului, N este numărul de spire al rotorului, Φ este fluxul magnetic produs de inductor, iar ν este frecvența rotațiilor rotorului):

$$U = E - (r + r_i)I \qquad \text{(în cazul dinamului serie),}$$

$$U = E - rI_r = R_i I_e \qquad \text{(în cazul dinamului șunt).}$$

Pentru utilizarea mașinii de curent continuu ca motor, la bornele sale trebuie aplicată tensiunea $U = E_c + rI$, unde E_c este tensiunea contraelectromotoare din rotor, iar rI este căderea de tensiune interioară mașinii electrice.

În cazul transformatoarelor uzuale (cu pierderi mici: $U_2 = e_2$, $P_1 \cong P_2$) în sarcină (circuitul secundar închis printr-un consumator), între tensiunile U_1, U_2, intensitățile curenților I_1, I_2 și numerele de spire N_1, N_2, corespunzînd înfășurărilor primarului, respectiv secundarului, există relațiile:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deviaţiile transversale ale electronilor dintr-un fascicul monocinetic, care pătrund cu viteza iniţială v_0 în zona unui cîmp electric, respectiv magnetic, uniform, perpendicular pe direcţia vitezei, şi străbat — în direcţia de incidenţă — distanţa l în zona cîmpului, sînt date de expresia:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} \cdot \frac{F}{m},$$

unde $\vec{F} = -e\vec{E}$ în cazul acţiunii unui cîmp electric uniform, sau $\vec{F} = -e(\vec{v}_0 \times \vec{B})$, în cazul acţiunii unui cîmp magnetic uniform (e = sarcina electrică elementară).

Viteza propagării undelor electromagnetice într-un mediu omogen şi izotrop, de permitivitate ε şi permeabilitate μ este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}},$$

unde c este viteza luminii în vid.

4. OPTICĂ

Optica studiază interacţiunile undelor electromagnetice cu ele însăşi şi cu substanţa în domeniul infraroşu, vizibil şi ultraviolet.

Fenomenele fizice care sînt explicate ţinînd seama de natura ondulatorie a luminii conduc la optica ondulatorie, iar cele explicate pe baza naturii corpusculare a luminii conduc la optica fotonică (corpusculară). Optica geometrică operează cu raze (fascicule foarte înguste) de lumină, fiind un caz particular al opticii ondulatorii, cînd $\lambda \to 0$.

a. Fenomenele de propagare sînt explicate pe baza principiului lui Huygens.

Coincidenţa dintre valoarea vitezei de propagare a luminii, determinată experimental de Fizeau, şi cea a vitezei undei electromagnetice în vid, calculată de Maxwell după formula $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, a condus la ipoteza naturii electromagnetice a luminii. Ipoteza naturii electromagnetice a luminii a permis explicarea, în cadrul teoriei clasice, a fenomenelor fizice de interferenţă, difracţie, reflexie şi refracţie, reflexie şi absorbţie şi dispersie.

Relaţia lui Maxwell care ne dă legătura dintre indicele de refracţie şi permitivitatea electrică şi permeabilitatea magnetică relative:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

este în concordanţă cu experienţa şi în domeniul optic, dacă se ţine seama de dispersia luminii.

Pentru a fi explicate fenomenele fizice în care intervine interacţiunea luminii cu molecule, atomi, electroni este necesară teoria cuantică a luminii, la originea acesteia găsindu-se ipoteza lui Max Planck (1900) că lumina este emisă sub forma de cuante de energie luminoasă sau fotoni şi ipoteza lui Albert Einstein cu privire la noţiunea de foton.

b. Măsurătorile efectuate asupra radiaţiilor electromagnetice din domeniul optic (infraroşu, vizibil şi ultraviolet) fac obiectul fotometriei.

Caracterizarea luminii din punct de vedere al energiei transportate de undele luminoase se face cu ajutorul mărimilor energetice, iar din punct de vedere al percepţiei acesteia de către ochi lumina este caracterizată prin mărimile fotometrice.

Scanned with OKEN Scanner

— Energia W care străbate o secțiune a unui con în vîrful căruia se află o sursă S, în unitatea de timp, se numește flux de energie radiantă:

$$\Phi_e = \frac{W}{t}[\mathrm{W}].$$

— Intensitatea energetică a unei surse punctiforme se definește ca fluxul de radiație emis în unitatea de unghi solid: $I_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega}$, unde $\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$, ΔA fiind aria calotei sferice, iar r — raza sferei.

— Iluminarea (iradierea) energetică a unei suprafețe elementare este raportul dintre fluxul de radiație care cade normal pe aceasta și aria suprafeței elementare:

$$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta A}[\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}],$$

sau

$$E_e = \frac{I_e}{r^2}, \text{ respectiv } E'_e = E_e \cos\alpha = \frac{I}{r^2}\cos\alpha,$$

cînd fasciculul de lumină cade înclinat pe suprafață, axa conului formînd unghiul α cu normala la suprafață (figura F.A.5).

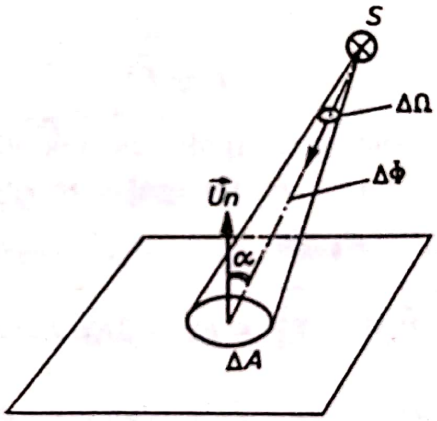


Fig. F.A.5

— Sensibilitatea spectrală relativă a ochiului este dată de expresia

$$V = \frac{\Phi_{e_\lambda}}{\Phi_e},$$

Φ_{e_λ} fiind fluxul constant de energie al radiației cu lungimea de undă $\lambda = 550$ nm la care apare cea mai puternică senzație vizuală.

— Fluxul luminos, ținînd seama de sensibilitatea spectrală a ochiului, este:

$$\Phi = kV\Phi_e,$$

k fiind o constantă care poartă numele de echivalent fotometric al radiației.

— Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega},$$

aceasta fiind mărimea fundamentală a fotometriei, a cărei unitate de măsură este *candela* (cd), care este și unitate fundamentală în SI (candela este intensitatea

luminoasă, în direcţia normală, a unei suprafeţe cu aria de $\frac{10^{-6}}{6}$ m² a unui corp negru la temperatura de solidificare a platinei şi la presiunea de $1{,}01325 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$).

— Fluxul luminos emis de o sursă în toate direcţiile, cu aceeaşi intensitate, este:

$$\Phi = 4\pi I,$$

lumenul (lm) fiind fluxul luminos emis într-un unghi solid egal cu un steradian de către un izvor punctiform avînd intensitatea de 1 cd (adică, 1 lm = 1 cd · 1 sr).

— Iluminarea este fluxul luminos ce cade normal pe unitatea de arie

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2},$$

unitatea acesteia fiind luxul (lx), luxul fiind iluminarea unei suprafeţe de 1 m² care primeşte un flux luminos de 1 lm uniform repartizat pe această suprafaţă (1 lx = 1 lm/m²).

c. Interferenţa luminii reprezintă suprapunerea în acelaşi loc a două sau mai multe oscilaţii luminoase, rezultatul obţinut apreciindu-se după intensitatea luminoasă în punctul respectiv:

$$I \approx \widetilde{\vec{E}^2},$$

$E = E_0 \sin \omega t$ fiind intensitatea cîmpului electric al undei luminoase.

Astfel, dacă într-un punct P din spaţiu se suprapun două unde luminoase $\vec{E}_1$ şi $\vec{E}_2$, avem $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ şi

$$I = \widetilde{\vec{E}^2} = \widetilde{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2} = \widetilde{\vec{E}_1^2} + \widetilde{\vec{E}_2^2} + 2\widetilde{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} = I_1 + I_2 + 2\widetilde{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2},$$

deosebind cazurile:

α) $\widetilde{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} = 0$, adică, $I = I_1 + I_2$,

β) $\widetilde{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} \neq 0$, adică, $I \neq I_1 + I_2$,

condiţia necesară şi suficientă pentru ca două unde luminoase să interfere într-un anumit loc din spaţiu fiind $\widetilde{\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2} \neq 0$.

Considerînd două surse de lumină, S_1 şi S_2, punctiforme, care emit radiaţii de aceeaşi frecvenţă:

$$E_1 = E_0 \sin(\omega t + \varphi_1),$$
$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi_2),$$

atunci într-un punct P oarecare avem:

$$E = 2E_0 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$\omega = \omega_1 = \omega_2$ şi $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 =$ constant în timp, făcînd parte din condiţiile de interferenţă.

Scanned with OKEN Scanner

— În cazul unui dispozitiv Young (figura F.A.6) avem

$$I(P) = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = 4E_0^2 \cos \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda},$$

unde $E_1 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_1}{c}\right)$ și $E_2 = E_0 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r_2}{c}\right)$.

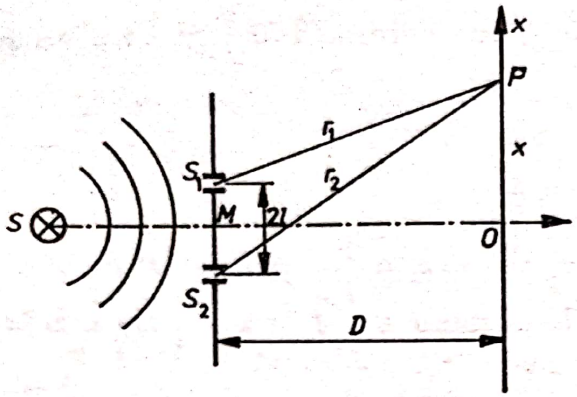


Fig. F.A.6

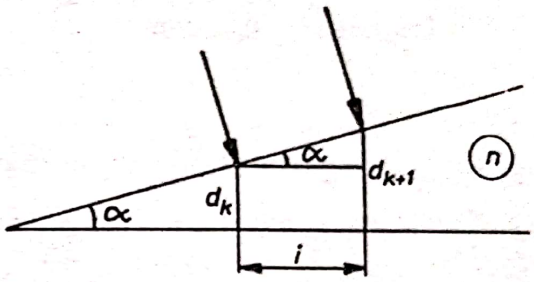


Fig. F.A.7

Pentru $r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$, unde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $I = I_{max}$, iar pentru $r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, $I = I_{min}$. Distanța dintre două maxime (sau două minime) consecutive se numește interfranjă și se notează cu i:

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{2l}.$$

— În cazul unei lame cu suprafețe plan-paralele de grosime d și indice de refracție n, diferența de drum dintre raza reflectată pe fața de intrare a lamei și raza care pătrunde în lamă, este reflectată pe suprafața de ieșire și revine în regiunea din fața suprafeței de intrare, este:

$$\delta = 2nd \cos \hat{r} + \frac{\lambda}{2},$$

$\hat{r}$ fiind unghiul de refracție ($n \sin \hat{r} = \sin \hat{i}$). Pentru $\hat{i} = 0$ avem $\hat{r} = 0$ și:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}.$$

— În cazul unei pene optice, cînd două suprafețe plane ce delimitează lama subțire formează un unghi mic între ele (figura F.A.7), interfranja este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n}.$$

d. Difracția luminii constă în esență din „ocolirea" de către lumină a obstacolelor, în anumite condiții îndeplinite de lungimea de undă a radiației luminoase și dimensiunile obstacolelor.

În cazul rețelei de difracție (sistem de fante înguste, rectilinii, egale, paralele, echidistante și foarte apropiate una de alta), avînd n trăsături pe unitatea de lungime $\left(n = \frac{N}{L}\right)$ și distanța $l = \frac{L}{N} = \frac{1}{n}$ între două trăsături succesive, maximele de difracție se obțin pentru

$$l(\sin \hat{i} \pm \sin \alpha) = k\lambda,$$

$\hat{i}$ fiind unghiul de incidență, α unghiul sub care se difractă undele, iar k ordinul de difracție.

Pentru $\hat{i} = 0$, avem

$$l \sin \alpha = k\lambda$$

și pentru unghiuri de difracție mici, $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$, $n = \frac{1}{l}$; punctul P în care se va forma maximul de ordinul k se va afla la distanța $x = f \operatorname{tg} \alpha = f \sin \alpha \simeq fk\lambda n$ și deci:

$$\lambda = \frac{x}{kfn},$$

f fiind distanța focală a lentilei.

e. La suprafața de separare a două medii transparente au loc fenomenele de reflexie a luminii (întoarcerea în mediul din care a venit a undei luminoase, atunci cînd întîlnește suprafața de separare a celor două medii) și de refracție a luminii (trecerea luminii în mediul al doilea schimbîndu-și direcția de propagare), care se supun următoarelor „legi“:

— Unda incidentă, normala la suprafață în punctul de incidență, unda reflectată și unda refractată se găsesc în același plan.

— Unghiul de reflexie, $\hat{r}$, este numeric egal cu unghiul de incidență, $\hat{i}$, adică $\hat{i} = \hat{r}$.

— $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}_e} = \frac{n_2}{n_1}$, $\hat{r}_e$ fiind unghiul de refracție, n_1 indicele de refracție al primului mediu, iar n_2 indicele de refracție al celui de-al doilea mediu.

Cînd lumina trece dintr-un mediu optic mai dens într-altul mai puțin dens ($n_2 < n_1$) există un unghi minim de incidență $\hat{l}$ de la care raza refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu, avînd loc fenomenul de reflexie totală. Unghiul limită $\hat{i} = \hat{l}$, pentru $\hat{r} = \frac{\pi}{2}$, are valoarea $\sin \hat{l} = \frac{n_2}{n_1}$.

f. Indicele de refracție al unui mediu este

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}.$$

Fenomenul de variație a indicelui de refracție cu lungimea de undă se numește dispersie. Astfel, avem dispersie normală (n crește cu scăderea lui λ), și dispersie anomală (n scade cu descreșterea lui λ).

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul de deviație δ (unghiul dintre direcția razei incidente și direcția razei emergente) într-o prismă are valoarea:

$$\delta = \hat{i} + \hat{i}' - (\hat{r} + \hat{r}') = \hat{i} + \hat{i}' - \hat{A},$$

$\hat{A}$ fiind unghiul refringent al prismei. Unghiul de deviație minimă, δ_m, corespunde la $\hat{i} = \hat{i}'$ și $\hat{r} = \hat{r}'$, adică:

$$\delta_m = 2\hat{i} - \hat{A}.$$

Ținînd seama de faptul că $\sin \hat{i} = n \sin \hat{r}$, avem:

$$n = \frac{\sin \dfrac{\hat{A} + \hat{\delta}_m}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}.$$

g. Dacă pe suprafața unui corp cade un fascicul paralel de raze, de intensitate I_0, experiența arată că intensitatea I a undei plane suferă o micșorare după legea

$$I = I_0 e^{-kd},$$

unde d este grosimea stratului de substanță străbătută și k este coeficientul de absorbție care, în general, depinde de lungimea de undă.

h. În general, interacțiunea a două fascicule de lumină poate fi pusă în evidență printr-o inegalitate a intensității fasciculelor, o modificare a direcției de propagare, o modificare a spectrelor lor sau o combinație a acestora. Acea caracteristică a luminii la care ochiul nu este sensibil, dar pentru care există elemente optice sensibile, este cunoscută sub numele de stare de polarizare. Cînd ne fixăm atenția asupra unui punct particular al fasciculului undei, locul geometric al vîrfului vectorului intensitate cîmp electric $\vec{E}$ constituie o măsură a polarizării.

Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric $\vec{E}$ vibrează haotic în toate direcțiile posibile într-un plan perpendicular pe direcția de propagare se numește lumină naturală. Lumina în care vectorul intensitate cîmp electric $\vec{E}$ are o singură direcție de oscilație se numește lumină liniar polarizată. Cînd extremitatea vectorului $\vec{E}$ descrie un cerc avem lumină polarizată circular, iar cînd descrie o elipsă avem lumină polarizată eliptic.

Una dintre metodele de obținere a luminii polarizate o constituie polarizarea prin reflexie. Există un unghi de incidență $\hat{i}_B$, numit unghi Brewster, pentru care lumina reflectată este total polarizată, fiind exprimat prin

$$\operatorname{tg} \hat{i}_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

i. Optica geometrică folosește noțiunea de rază (fascicul foarte îngust) de lumină definită ca direcția de-a lungul căreia se propagă lumina, considerîndu-se că într-un mediu omogen și izotrop lumina se propagă în linie dreaptă. De asemenea, se respectă principiul independenței fasciculelor de lumină și principiul reversibilității drumului razelor de lumină.

Scanned with OKEN Scanner

Spațiul optic este împărțit în două regiuni: spațiul obiect (regiunea în care se găsește obiectul) și spațiul imagine (regiunea în care se află imaginea).

Suprafața care separă două medii transparente cu indici de refracție diferiți se numește dioptru. În cazul unui dioptru sferic avem următoarele relații fundamentale:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

numită relația punctelor conjugate (x_1 fiind distanța de la vîrful dioptrului la imagine, x_2 distanța de la vîrful dioptrului la obiect, iar R raza dioptrului), care mai poate avea forma:

$$\frac{f_2}{x_2} + \frac{f_1}{x_1} = 1,$$

f_1 fiind distanța focală obiect, iar f_2 distanța focală imagine.

A doua relație ne dă expresia măririi liniare β:

$$\beta = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

În cazul oglinzilor sferice, punîndu-se condiția formală $n_2 = -n_1$, avem

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{R},$$

sau, deoarece $f_1 = f_2 = f = \frac{R}{2}$, rezultă

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f},$$

iar mărimea liniară este $\beta = -\frac{x_2}{x_1}$.

Pentru fasciculele luminoase care străbat o lentilă subțire (de grosime neglijabilă în raport cu razele de curbură R_1, R_2 ale suprafețelor) și care formează cu axa optică a lentilei (direcția trecînd prin centrele de curbură ale celor două suprafețe ale lentilei) unghiuri neglijabile față de un radian (fascicule paraxiale) avem formula fundamentală a lentilelor subțiri

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

în care x_1, x_2, R_1 și R_2 se măsoară folosind ca origine centrul optic al lentilei. (Ele sînt pozitive dacă se află în dreapta lentilei și negative dacă se află în stînga ei.)

Folosind definiția distanței focale dată de

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)},$$

formula fundamentală a lentilelor subțiri devine

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} = C,$$

C purtînd numele de puterea optică sau convergența lentilei.

Scanned with OKEN Scanner

Convergența unui sistem (bloc) optic format din lentile subțiri alipite este egală cu suma convergențelor lentilelor componente:

$$C = \frac{1}{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i}.$$

În cele prezentate s-au făcut anumite presupuneri ca: existența fasciculelor de lumină paraxiale, a unei imagini stigmatice, corespondența unei imagini plane și perpendiculare pe axul optic pentru un obiect mic plan și perpendicular pe ax, nedeformarea imaginii față de obiect, același indice de refracție pentru toate radiațiile (mediu nedispersiv sau lumină monocromatică). Neîndeplinirea acestor condiții duce la anumite imperfecțiuni prezentate de sistemele optice, numite aberații. Există două clase de aberații: aberații geometrice și aberații cromatice.

Un instrument optic este un ansamblu de lentile, oglinzi și diafragme cu ajutorul căruia se obțin imagini ale diferitelor obiecte. Un instrument optic se caracterizează prin mărire, putere, grosisment și puterea separatoare. Există două mari clase de instrumente: instrumente care dau imagini reale (aparatul fotografic, aparatul de proiecție) și instrumente care dau imagini virtuale (lupa, microscopul optic, luneta, telescopul).

j. Experiența lui Fizeau, experiența Michelson-Morley și experiența lui Kaufmann au jucat un rol hotărîtor în elaborarea teoriei relativității restrînse de către Albert Einstein, care are la bază următoarele postulate:

— Fenomenele fizice se desfășoară identic în toate sistemele de referință inerțiale, dacă condițiile inițiale sînt identice (formularea legilor fizicii este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale).

— Viteza luminii în vid are aceeași valoare în toate sistemele de referință inerțiale și în toate direcțiile.

De asemenea, se ține seama de faptul că simultaneitatea a două evenimente din locuri diferite este relativă.

Între coordonatele spațio-temporale (x, y, z, t) ale unui eveniment în sistemul de referință inerțial S și coordonatele spațio-temporale (x', y', z', t') ale aceluiași eveniment în sistemul de referință inerțial S' — S' mișcîndu-se cu viteza constantă $\vec{v} = \vec{u}_x \cdot v$ față de S și Ox fiind paralelă cu $O'x'$ — există relațiile de transformare ale lui Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y' = y, \qquad y = y',$$

$$z' = z, \qquad z = z',$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz constau în existența unor relații între lungimea cinematică (măsurată în sistemul observatorului) și

lungimea proprie (măsurată în sistemul în care se află obiectul de studiat), $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, între timpul cinematic şi timpul propriu, $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

şi a teoremei compunerii vitezelor în mecanica relativistă:

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \\ u_y' = \dfrac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \\ u_z' = \dfrac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \dfrac{u_x' v}{c^2}}, \\ u_y = \dfrac{u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u_x' v}{c^2}}, \\ u_z = \dfrac{u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{u_x' v}{c^2}}. \end{cases}$$

Noua concepţie despre spaţiu şi timp, în conformitate cu teoria relativităţii restrînse a lui Einstein, implică o schimbare fundamentală şi în dinamică. Astfel, legea fundamentală a dinamicii capătă forma:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

masa unui corp în mişcare depinde de viteza sa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

iar energia cinetică a unei particule de masă de repaus m_0 este dată de expresia:

$$E_c = W - W_0,$$

unde $W = mc^2$ este energia totală a particulei, iar $W_0 = m_0 c^2$ este energia de repaus a particulei.

Variaţiei Δm a masei îi corespunde totdeauna o variaţie de energie, ΔW, dată de relaţia:

$$\Delta W = c^2 \cdot \Delta m.$$

5. FIZICĂ ATOMICĂ ŞI NUCLEARĂ

Fenomenele fizice în care se manifestă aspectul corpuscular al luminii, cuantificarea în sistemele materiale, radiaţia termică şi fenomenele fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor constituie originea teoriei cuantice, fiind fenomene fizice, descoperite la finele secolului al XIX-lea şi în primul pătrar al secolului al XX-lea, care nu au putut fi explicate pe baza fizicii clasice.

a. Efectul fotoelectric extern este emisia de electroni de către un corp aflat sub acţiunea radiaţiilor electromagnetice. Experimental se constată că: — inten-

Scanned with OKEN Scanner

sitatea curentului fotoelectric de saturație este direct proporțională cu fluxul radiațiilor electromagnetice incidente, cînd frecvența este constantă; — energia cinetică a fotoelectronilor emiși crește liniar cu frecvența radiațiilor electromagnetice și nu depinde de fluxul acestora și — intensitatea curentului fotoelectric este diferită de zero numai dacă frecvența radiației incidente este mai mare sau cel puțin egală cu o valoare minimă. Aceste rezultate experimentale pot fi explicate cu ajutorul ecuației lui Einstein:

$$h\nu = L + \frac{1}{2} m_e v^2,$$

$h\nu$ fiind energia fotonului cedată electronului, L lucrul mecanic de extracție al electronului din corp (energia de extracție), iar $\frac{1}{2} m_e v^2$ energia cinetică a fotoelectronului extras.

Efectul Compton constă în ciocnirea foton-electron, fotonul cedînd numai o parte din energia sa electronului. Aceasta face ca lungimea de undă λ, a radiației împrăștiate, față de lungimea de undă λ_0, a radiației incidente, să fie dată de expresia

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$\Lambda = \frac{h}{m_0 c}$ fiind lungimea de undă Compton, iar θ unghiul sub care este împrăștiată radiația incidentă.

Energia cinetică a electronului de recul este

$$E_c = \frac{hc}{\lambda_0} \cdot \frac{2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda_0 + 2\Lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

iar unghiul sub care este difuzat electronul este

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}}.$$

Ambele efecte, efectul fotoelectric și efectul Compton, au fost explicate admițînd natura corpusculară a radiației electromagnetice, particula numită foton avînd energia $\varepsilon = h\nu$, masa de repaus $m_0 = 0$, masa de mișcare $m = \frac{h\nu}{c^2}$, viteza $v = c$, impulsul $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ și sarcina electrică $q = 0$.

b. Electronul constituent al oricărui atom este particula cu cea mai mică sarcină electrică $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, cu masa de repaus $m_0 \simeq 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și cu sarcina specifică $\frac{e}{m} = -1{,}76 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$.

c. Ideea lui de Broglie cu privire la proprietățile ondulatorii ale microparticulelor a condus la presupunerea existenței fenomenelor fizice în care se manifestă aspectul ondulatoriu al microparticulelor. Conform lui de Broglie, unei particule de

Scanned with OKEN Scanner

energie E și impuls p i se poate asocia o undă avînd frecvența $\nu = \frac{E}{h}$ și lungimea de undă $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Experiența Davisson și Germer confirmă ipoteza lui de Broglie, fiind verificată relația

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde d este distanța interplanară (distanța dintre plane cristalografice), θ unghiul de împrăștiere a electronilor pe rețeaua plană cristalină și

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2em_e U}}.$$

d. Interpretarea statistică a dualismului undă-corpuscul înlătură contradicțiile care apar dacă se păstrează noțiunea de stare, pentru un sistem fizic, dată de fizica clasică.

Sistemele fizice cuantice sînt guvernate de relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

e. În cazul atomului de hidrogen avem formula lui Balmer generalizată pentru seriile spectrale:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right),$$

unde R este constanta lui Rydberg, $n_1 = 1, 2, 3, \ldots$, n_2 tot întreg, dar $n_2 > n_1$.

Estimarea razei unui atom, $r_a = \left(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}\rho N_A}\right)^{1/3}$, M fiind masa unui kilomol, ρ densitatea corpului considerat, iar N_A numărul lui Avogadro, a condus la o valoare de $(1 \div 2) \cdot 10^{-10}$ m.

Experiența lui Rutherford a arătat că raza nucleului atomic este de ordinul a $(10^{-14} \div 10^{-15})$ m.

Modelul planetar al atomului, ținînd seama de postulatele lui Bohr (a. Stările legate ale atomului sînt stări staționare; b. La trecerea dintr-o stare staționară, m, în altă stare staționară, n, atomii absorb sau emit radiație electromagnetică a cărei frecvență este $\nu_{mn} = \frac{1}{h}(E_m - E_n)$) și de condiția de cuantificare $2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p}$, a condus la expresia razei primei orbite Bohr

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \cong 0{,}529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

și la expresia energiei totale cuantificate a electronului în atomul de hidrogen

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{8h^2} \frac{1}{\varepsilon_0^2 n^2},$$

Scanned with OKEN Scanner

n fiind numărul cuantic principal. Pentru constanta Rydberg s-a obținut

$$R = \frac{m_0 e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \cong 1{,}097373 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Pentru un atom hidrogenoid, energia totală cuantificată a electronului este:

$$E_n = -RZ^2 \frac{1}{n^2},$$

Tabloul periodic al elementelor poate fi explicat cu ajutorul numerelor cuantice (numărul cuantic principal $n = 1, 2, \ldots, \infty$; numărul cuantic orbital $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, numărul cuantic magnetic $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$, numărul cuantic de spin $s = \pm \frac{1}{2}$) și principiul de excluziune al lui Pauli, numărul maxim de electroni cu același număr cuantic principal fiind:

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

e. Nucleul este format din Z protoni și $(A - Z)$ neutroni, A fiind numărul de masă, iar Z numărul atomic.

Stabilitatea nucleelor atomice este asigurată de energia de legătură (energia necesară pentru a desface un nucleu izolat, în repaus, în nucleoni izolați în repaus):

$$W_{leg} = [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A,Z)]c^2,$$

unde $M(A,Z)$ este masa nucleului de număr de masă A și de număr atomic Z.

Masa atomică este dată de expresia:

$$M_a(A,Z) = M(A,Z) + Zm_e - \frac{1}{c^2} W_{leg}^{\text{electroni}},$$

unde $W_{leg}^{\text{electroni}} = 15{,}73 \cdot Z^{7/3}$ [eV].

Deoarece masa atomică se poate determina experimental, avem:

$$W_{leg} = [Z \cdot m_H + (A - Z)m_n - M_a(A,Z)]c^2.$$

Raza unui nucleu atomic este dată de expresia:

$$R = R_0 A^{1/3} = (1{,}20 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ [m]}.$$

f. Procesul prin care două particule sau sisteme de particule interacționează prin forțe nucleare, ansamblul desfăcîndu-se în mai multe particule sau sisteme de particule (nuclee), poartă numele de reacție nucleară:

$${}^{A_a}_{Z_a}a + {}^{A_X}_{Z_X}X \rightarrow {}^{A_Y}_{Z_Y}Y + {}^{A_b}_{Z_b}b.$$

Legea conservării energiei într-o reacție nucleară conduce la energia de reacție:

$$Q = E_c^b + E_c^Y - E_c^a - E_c^X,$$

unde E_c sînt energiile cinetice ale componenților. Dacă $Q > 0$, reacția se numește exoenergetică și dacă $Q < 0$, reacția se numește endoenergetică.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se ține seama și de legea conservării impulsului, în sistemul laboratorului având $E_c^X = 0$, se poate obține o legătură între energia de reacție, Q, și caracteristicile particulei b, exprimată prin relația:

$$Q = \left(1 + \frac{m_b}{m_X}\right) E_c^b - \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) E_c^b - \frac{\sqrt{2m_a m_b E_c^a E_c^b}}{m_Y} \cos \theta,$$

θ fiind unghiul sub care este împrăștiată particula b față de direcția de deplasare a particulei a.

g. Legea dezintegrării radioactive este exprimată prin relația:

$$N = N e^{-\frac{t}{\tau}},$$

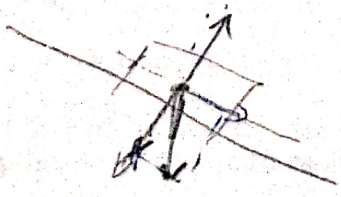
unde N este numărul de sisteme în stare excitată la momentul t, N_0 numărul de sisteme în stare excitată la momentul inițial ($t_0 = 0$), iar τ este viața medie a sistemului; $\frac{1}{\tau} = \lambda$ poartă numele de constantă radioactivă sau probabilitatea de dezintegrare în unitate de timp; $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ se numește timp de înjumătățire.

Legea de atenuare a fotonilor γ se exprimă prin:

$$I(x) = I(0) e^{-\mu x},$$

x fiind grosimea stratului de substanță străbătută de fascicul, $I(0)$ intensitatea fasciculului la intrarea în strat, iar $I(x)$ intensitatea fasciculului la ieșirea din strat.

h. Particulele elementare pot să interacționeze, cunoscîndu-se trei tipuri de interacțiuni elementare: — interacțiuni nucleare, — interacțiuni electromagnetice și — interacțiuni slabe. Aceste interacțiuni satisfac legea de conservare impuls-energie, legea de conservare a momentului cinetic, legea de conservare a sarcinii electrice și barionice. Interacțiunile tari mai satisfac legea de conservare a stranietății etc.



Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNȚURI
1980

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE ELECTRIC, MECANIC ȘI METALURGIC

I.1°. Ecuația oscilației unui punct material de masă $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg este $x = 5\sqrt{3} \cdot 10^{-2}\left(\sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega t\right)$[m], unde $\omega = 10$ rad $\cdot$ s^{-1}. Se cer: a) faza inițială a oscilației punctului material și amplitudinea acesteia; b) viteza maximă a punctului material în decursul oscilației și momentul de timp la care se realizează, considerat din momentul în care a început mișcarea; c) forța maximă care acționează asupra punctului material în decursul mișcării.

2°. Un mol de gaz perfect care, inițial, se găsește în starea normală (p_0, V_0, T_0), efectuează un ciclu $ABCA$ format dintr-o transformare izotermă AB, urmată de una izobară BC și încheiat printr-o transformare izocoră CA. Știind că la finele transformării izoterme volumul este $V_B = 2{,}71828\ V_0$ și cunoscînd constanta gazelor perfecte $R = 8{,}31$ J $\cdot$ mol^{-1} $\cdot$ K^{-1}, se cere să se calculeze: a) parametrii de stare în stările B și C; b) lucrul mecanic efectuat în decursul ciclului; c) variația de entropie în transformarea izotermă și pentru întregul ciclu.

3°. Un receptor de energie electrică cu puterea $P = 1{,}1$ kW este conectat prin intermediul a două conductoare la o rețea de curent continuu cu tensiunea de 110 V. Cunoscînd că receptorul este un rezistor cu rezistența electrică R, a cărei mărime poate fi variată, se cere: a) să se determine rezistența electrică a conductoarelor de legătură, pentru care puterea P a receptorului se obține pentru o unică valoare a rezistenței electrice a acestuia (respectiv, a unei unice intensități de curent electric în circuit); b) valoarea intensității curentului electric din circuit și a rezistenței receptorului în acest caz; c) puterea electrică pierdută în rezistența conductoarelor de legătură în acest caz.

4°. Se cer: a) să se definească numărul lui Avogadro; b) să se scrie expresia energiei cinetice medii de agitație termică a moleculelor, specificînd semnificația mărimilor fizice care intervin; c) să se enunțe legea conservării impulsului mecanic.

5°. Se cer: a) să se scrie expresia forței de frecare, explicitîndu-se semnificațiile mărimilor fizice care apar; b) să se enunțe legile (teoremele) lui Kirchhoff; c) să se scrie expresia forței Lorentz, specificînd semnificația mărimilor fizice care intervin.

II. 1°. Capetele unei bare de aluminiu, AB, oscilează după ecuațiile: $y_A = 0{,}01 \sin 2520\ \pi t$ [m] și $y_B = 0{,}02 \sin 2520\ \pi t$ [m]. Oscilațiile se propagă prin bară sub formă de unde longitudinale. Se cunosc pentru aluminiu: $\rho = 2700$ kg $\cdot$ m^{-3} și $E = 6858432 \cdot 10^4$ N $\cdot$ m^{-2}. Se cere să se calculeze: a) perioada și frecvența oscilațiilor; b) viteza undei longitudinale prin bară; c) lungimea barei.

Scanned with OKEN Scanner

știind că într-un punct C al barei sosesc undele plane date de ecuațiile: $y_1 = 0{,}01 \sin\left(2520\ \pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ [m] și $y_2 = 0{,}02 \sin\left(2520\ \pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ [m].

2°. Într-un vas cu volumul $V = 2$ l se găsesc $m = 16$ g de oxigen la presiunea $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Se cere să se afle: a) temperatura inițială a oxigenului; b) viteza pătratică medie a moleculelor de oxigen și numărul total de molecule din vas; c) temperatura finală, dacă prin încălzire izobară volumul se mărește de două ori, și lucrul mecanic efectuat de gaz. Se cunosc: masa molară a oxigenului, $M = 32$ kg $\cdot$ kmol^{-1}; numărul lui Avogadro, $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ molecule $\cdot$ kmol^{-1} și constanta gazelor perfecte, $R = 8310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

3°. Un bec alimentat la tensiunea $U = 220$ V are puterea nominală $P = 60$ W. Se cere să se calculeze: a) rezistența electrică a becului în regim nominal; b) rezistența rezistorului care trebuie înseriat cu becul, pentru ca acesta să lumineze normal, dacă alimentarea se face la tensiunea $U_1 = 380$ V; c) rezistența rezistorului cu care se șuntează ampermetrul pentru a măsura curenți electrici de intensitate pînă la 1 A, dacă în absența șuntului, curentul corespunzător unei diviziuni a scalei este $I = 2$ mA. Ampermetrul intercalat în circuit are rezistența interioară $r = 1{,}8\ \Omega$ și 50 diviziuni pe scală.

4°. Să se deducă: a) expresiile timpului de urcare și înălțimii maxime atinse de un corp aruncat pe verticală de jos în sus; b) relația dintre temperatura absolută și temperatura în scara Celsius; c) expresia impedanței circuitului cu rezistor, bobină și condensator.

5°. Să se enunțe: a) principiul lui Huygens; b) primul principiu al termodinamicii, arătînd semnificația fizică a mărimilor care intervin; c) legea lui Coulomb, arătînd semnificația fizică a mărimilor care intervin.

III. 1°. Un oscilator liniar de masă $m = 0{,}5$ g este scos din poziția de echilibru, fiind atras de o forță F proporțională cu deplasarea, pînă la distanța de $2 \cdot 10^{-2}$ m. Știind că în această situație forța elastică are valoarea $-1{,}936$ N, se cer: a) pulsația oscilațiilor; b) ecuația mișcării oscilatorului, presupunînd că nu există frecare și considerînd ca origine a coordonatei poziția lui de echilibru, iar ca origine a timpului momentul în care este lăsat liber; c) energia totală a oscilatorului în timpul oscilației.

2°. Într-un corp de pompă cu capacitatea de 5 l se află 0,8 kg oxigen la temperatura $T = 320$ K. Se cer: a) variația densității oxigenului, presiunea inițială și presiunea finală ale oxigenului în corpul pompei, dacă se reduce izoterm volumul gazului pînă la 4 l; b) lucrul mecanic efectuat, dacă se reduce volumul inițial la jumătate, în mod izobar; c) viteza pătratică medie a moleculelor de oxigen în starea finală de la punctul (b). Se dau: masa kilomolară a oxigenului, $M = 32$ kg $\cdot$ kmol^{-1} și constanta gazelor, $R = 8310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

3°. O bobină cu inductanța $L = \frac{0{,}01}{2\pi}$ H și rezistența $R = 350\ \Omega$ este conectată în serie cu un condensator plan având capacitatea $C = \frac{0{,}4}{2\pi}\ \mu$F, la o tensiune continuă $U_c = 157$ V. Se cer: a) permitivitatea relativă a dielectricului condensatorului, știind că aria armăturilor aflate la distanța $d = 0{,}2$ mm este $S = 0{,}04$ m^2; b) sarcina electrică cu care se încarcă condensatorul; c) valoarea efectivă a intensității curentului și defazajul față de tensiunea aplicată, dacă se înlocuiește tensiunea continuă cu tensiunea alternativă $U = U_0 \sin \omega t$, având $U_0 = 500$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Se cunoaște permitivitatea vidului, $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$ F $\cdot$ m^{-1}.

4°. Se cer: a) să se definească mărimile care caracterizează mișcarea uniformă circulară; b) să se scrie ecuația fundamentală a termodinamicii, arătînd semnifi-

Scanned with OKEN Scanner

cația fizică a mărimilor care intervin; c) să se scrie expresia forței electromagnetice, indicînd semnificația fizică a mărimilor care intervin.

5°. Se cer: a) să se enunțe legile dinamicii; b) să se definească căldura specifică; c) să se scrie expresiile puterilor în curent alternativ monofazat, indicîndu-se semnificația fizică a mărimilor care intervin.

β. PROFILUL CHIMIE

IV. 1°. Un mol de gaz perfect se găsește inițial într-o stare cu temperatura $T_0 = 300$ K. Gazul primește cantitatea de căldură $Q = 2{,}493$ kJ și poate trece în diferite stări finale, în funcție de transformarea efectuată: în starea (A), printr-o transformare izocoră; în starea (B), printr-o transformare izobară; în starea (C), printr-o transformare izotermă. Constanta generală a gazelor perfecte este $R = 8310\ \text{J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, căldura molară la volum constant, $C_V = \frac{5}{2} R$ și căldura molară la presiune constantă, $C_p = \frac{7}{2} R$. Se cer: a) temperaturile în stările finale (T_A, T_B, T_C); b) lucrul mecanic efectuat în fiecare transformare $(L_{O \to A}, L_{O \to B}, L_{O \to C})$; c) variația de entropie în transformarea izotermă.

2°. Într-un dispozitiv Young, o radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda_1 = 500$ nm produce o figură de interferență cu $i = 1$ mm. În același dispozititiv, figura de interferență produsă de altă radiație monocromatică are primul maxim la distanța $x = 1{,}2$ mm de franja centrală. Se cer: a) lungimea de undă λ_2 a luminii emise de a doua sursă; b) distanța minimă x (față de franja centrală) la care se formează maxime în ambele figuri de interferență; c) diferența $\Delta\nu$ dintre frecvențele celor două radiații. Viteza luminii este $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3°. Se consideră un bec electric ca sursă de radiații optice, emițînd radiații cu lungimea de undă $\lambda = 500$ nm. Se cer: a) energia transportată de un foton și impulsul fotonului; b) numărul de fotoni emiși pe secundă de bec, dacă acesta are puterea de 100 W și emite 1% din puterea lui la $\lambda = 500$ nm; c) presiunea luminii exercitată de fotonii emiși de bec, dacă ei lovesc central un corp negru aflat la distanța de 2 m. Se cunosc: constanta lui Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ și viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4°. Se cer: a) expresia variației energiei interne în transformarea izobară; b) să se enunțe al doilea principiu al termodinamicii, specificîndu-se semnificația fizică a mărimilor care intervin; c) să se enunțe legile reflexiei și refracției luminii.

5°. Se cer: a) să se scrie expresia randamentului unei mașini termice ideale, indicîndu-se semnificația fizică a mărimilor care intervin; b) să se prezinte fenomenul de interferență în lumină albă (policromatică); c) energia internă a gazului perfect (ideal).

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (fizică)

V. 1°. Dinamica mișcării oscilatorii armonice.

2°. Transformarea izotermă a gazului ideal.

3°. Un corp cu masa $m = 1$ kg este aruncat orizontal cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Care este energia sa cinetică după $\Delta t = 4$ s?

4°. Dintr-o armă se trag succesiv gloanțe la interval de 1 minut, vertical în sus, avînd fiecare viteza inițială $v_0 = 700\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Să se determine: a) la ce înălțime

Scanned with OKEN Scanner

față de suprafața Pămîntului se întîlnesc cele două gloanțe; b) valoarea și sensul vitezelor celor două gloanțe imediat după ciocnirea lor presupusă elastică și centrală.

Se dă accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ și se neglijează frecarea gloanțelor cu aerul.

5°. Se dau doi cilindri orizontali închiși la cîte un capăt și prevăzuți cu pistoane legate printr-o tijă rigidă (figura F.B.1). În cei doi cilindri se află aer la aceeași

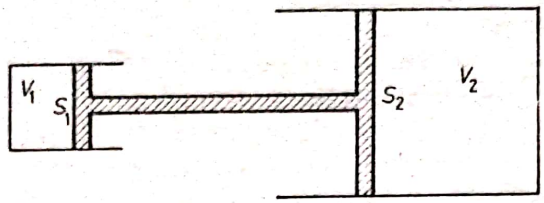


Fig. F.B.1

presiune și la aceeași temperatură $t_1 = 27°\text{C}$. Volumele ocupate de aer în cei doi cilindri sînt $V_1 = 1$ l și, respectiv $V_2 = 2$ l, iar suprafețele pistoanelor sînt $S_1 = 20\ \text{cm}^2$ și, respectiv, $S_2 = 40\ \text{cm}^2$. În starea inițială pistoanele sînt blocate. Ulterior, pistoanele sînt deblocate, aerul din primul cilindru este încălzit pînă la temperatura $t_2 = 327°\text{C}$, iar aerul din al doilea cilindru este menținut în contact cu un termostat la temperatura inițială t_1. Se consideră că pistoanele pot culisa cu frecări suficient de mici și că presiunea exterioară este neglijabilă.

a) Să se determine volumele de gaz în cei doi cilindri în starea finală de echilibru. Să se explice rezultatul obținut.

b) Ținînd seama de rezultatul obținut, să se indice o modificare simplă a ordinii de desfășurare a experimentului, astfel ca sistemul să ajungă în aceeași stare finală de echilibru printr-un proces cvasistatic. Să se calculeze variația entropiei sistemului (a gazului din cei doi cilindri), cunoscîndu-se căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5}{2} R$, presiunea inițială $p_0 = 3 \cdot 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ și $\ln 2 = 0{,}693$.

VI. 1°. Acțiunea cîmpului electric uniform asupra unui fascicul de electroni.

2°. Construcția geometrică a imaginilor date de lentile.

3°. Un condensator avînd capacitatea $C = 1\ \mu\text{F}$ și un solenoid cu rezistența $R = 96\ \Omega$ și inductanța $L = 1{,}42$ H, sînt conectați în serie la bornele unui generator cu tensiunea electromotoare sinusoidală $E_{ef} = 240$ V și frecvența $f = 50$ Hz. Rezistența internă a generatorului este neglijabilă. Să se determine: a) valoarea efectivă a intensității curentului electric și defazajul dintre intensitatea curentului electric și tensiune; b) pentru o valoare a frecvenței valoarea efectivă a intensității curentului electric este maximă și care este această din urmă valoare; c) pentru ce valoare a frecvenței valoarea efectivă a tensiunii la bornele condensatorului este maximă.

4°. a) Să se calculeze lungimea de undă de prag a efectului fotoelectric al cesiului știind că energia de extracție este $E_{ex} = 1{,}89$ eV.

b) Să se determine viteza maximă a fotoelectronilor emiși cînd pe o suprafață metalică de cesiu cad radiații electromagnetice cu $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m.

c) Presupunînd că toți fotoelectronii emiși cad pe armătura unui condensator cu capacitatea $C = \frac{1}{6}$ nF și-l încarcă pînă la potențialul $U = 300$ V, să se determine numărul de fotoelectroni emiși de suprafața metalică.

Se dau: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$; $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Un disc dintr-un material conductor nemagnetic se rotește în jurul unui ax din același material într-un cîmp magnetic omogen de inducție B (figura F.B.2). Între ax și periferia discului se leagă, cu ajutorul a două perii fixe, un instrument de măsură. Se constată că în circuitul în care se află ampermetrul apare curent electric. Ținînd seama de faptul că discul este străbătut de un flux constant al

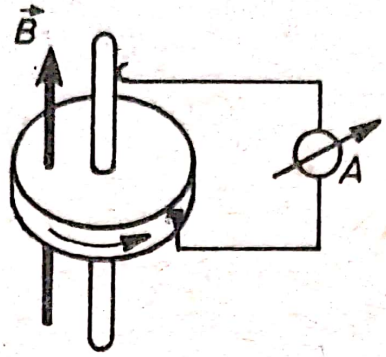


Fig. F.B.2

cîmpului magnetic omogen, se cere: a) să se explice apariția tensiunii electromotoare în circuitul dat; b) să se arate ce se întîmplă cu sensul intensității curentului electric, dacă se schimbă sensul de rotație a discului; c) să se explice dacă discul poate funcționa ca motor electric.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

VII. 1°. Imaginea reală a unui obiect, care se află la distanța de 0,9 m de o lentilă subțire, se formează la 0,45 m de lentilă. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă, imaginea reală a aceluiași obiect se formează la 0,72 m de acest sistem. Se cere să se calculeze: a) distanța focală a primei lentile; b) distanța focală a sistemului format din cele două lentile; c) distanța focală a celei de-a doua lentile; ce fel de lentilă este aceasta?

2°. Într-un cilindru orizontal prevăzut cu piston se găsesc 3,2 kg oxigen la temperatura de 27°C și presiunea de 10^6 N · m^{-2}. Oxigenul se încălzește izobar pînă la 400 K. Se cer: a) volumul inițial al oxigenului; b) lucrul mecanic efectuat de gaz la dilatarea izobară; c) căldura absorbită de oxigen prin încălzirea izobară și variația energiei interne a oxigenului. Se cunosc: constanta generală a gazelor $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}; masa kilomolară a oxigenului, $M = 32$ kg · kmol^{-1} și căldura specifică la presiune constantă, $c_p = 910$ J · kg^{-1} · K^{-1}.

3°. Se cer: a) să se scrie expresia variației energiei interne a unui gaz perfect în transformarea izocoră; b) relația dintre temperaturile măsurate în scara absolută și în scara Celsius; c) proprietățile fotonului.

4°. Se cer: a) expresia tensiunii de tăiere (frînare) a curentului fotoelectric; b) să se definească unitatea de masă atomică; c) legea dezintegrării radioactive; timp de înjumătățire.

5°. Se cer: a) să se enumere aplicațiile izotopilor radioactivi în medicină și în biologie; b) să se enunțe legile de conservare în reacții nucleare; c) să se enunțe postulatele lui Bohr.

VIII.1°. O cantitate de 1,67 moli de gaz aflat la temperatura de 23°C și ocupînd volumul de 5 l este încălzit izobar pînă la temperatura de 123°C. Se cer: a) presiunea gazului; b) volumul gazului după destindere; c) lucrul mecanic efectuat. Se dă constanta generală a gazelor, $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

2°. O radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m cade în fascicul paralel normal pe o rețea de difracție. Se cer: a) numărul fotonilor incidenți pe rețea în timp de 1 min, dacă puterea sursei este $P = 20$ W; b) constanta rețelei, dacă maximul de difracție de ordinul al doilea se formează pentru unghiul $\alpha = 30°$; c) paravanul de observare a franjelor de difracție se înlocuiește cu o celulă fotoelectrică al cărei prag fotoelectric este $\lambda_p = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ m. Să se calculeze viteza fotoelectronilor. Se cunosc: constanta lui Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s, viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1} și masa electronului, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

3°. Fie un atom de hidrogen în starea cu număr cuantic principal $n = 2$. Se cer: a) lungimea de undă a radiației emise de atom la tranziția în starea fundamentală; b) viteza electronului pe orbita stării $n = 2$; c) numărul de rotații efectuate de electron în jurul nucleului, cînd atomul se află în starea $n = 2$, știind că atomul se află în această stare într-un interval de timp $\tau = 10^{-8}$ s, după care revine în starea fundamentală. Se dau: constanta lui Planck, $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s; viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}; masa electronului, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; sarcina electronului; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}98 \cdot 10^9$ m · F^{-1}.

4°. Se cer: a) să se enunțe primul principiu al termodinamicii, arătînd semnificația mărimilor care intervin; b) să se enunțe principiul lui Huygens; c) să se calculeze unghiul de deviație minimă printr-o prismă optică.

5°. Se cer: a) să se definească numărul lui Avogadro; b) să se exprime variația entropiei în transformarea adiabatică; c) să se prezinte fenomenul de reflexie totală a luminii.

4. ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

IX.1°. Un automobil de masă $m = 2 \cdot 10^3$ kg pleacă din repaus și atinge viteza $v_1 = 15$ m · s^{-1} în timpul $t_1 = 10$ s. Se cer: a) puterea medie dezvoltată de motorul automobilului, dacă coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}05$; b) puterea maximă a motorului, dacă viteza maximă pe care o poate dezvolta automobilul pe șosea este $v_m = 40$ m · s^{-1}; c) valoarea forței de tracțiune și a accelerației automobilului în momentul cînd viteza $v_2 = 20$ m · s^{-1}, considerînd $P = P_{max}$. Accelerația gravitațională este $g = 10$ m · s^{-2}.

2°. Un microgenerator de curent continuu, care consumă o putere mecanică $P_1 = 625$ W, debitează pe trei rezistoare de rezistențe $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ și $R_3 = 30\ \Omega$ (figura F.B.3). Rezistența internă a generatorului este considerată

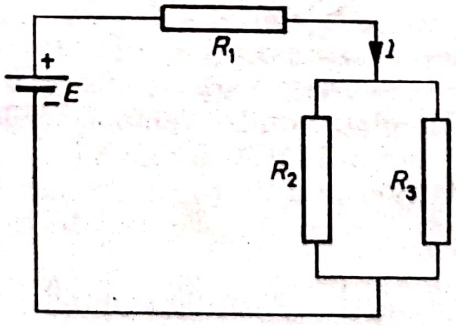


Fig. F.B.3

neglijabilă. Știind că randamentul de transformare a energiei mecanice în energie electrică de către microgenerator este $\eta = 80\%$, se cer: a) puterea P_2 debitată de microgenerator; b) intensitățile curenților în rezistoare; c) tensiunile electrice pe fiecare rezistor și la bornele generatorului.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Un circuit care cuprinde rezistorii de rezistenţe R_1 şi R_2, legaţi în serie, este alimentat de la un generator de curent continuu la tensiunea electromotoare $E = 12$ V. Rezistorul de rezistenţă R_2 este construit dintr-un fir de aluminiu cu secţiunea $S = 0{,}6$ mm^2. Ştiind că rezistivitatea aluminiului este $\rho = 3 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$m, se cer: a) intensitatea curentului electric din circuit; b) rezistenţa interioară a generatorului; c) lungimea firului de aluminiu.

4°. Se cer: a) expresia forţei electromagnetice care se exercită asupra unui conductor parcurs de un curent electric, conductorul aflîndu-se în cîmp magnetic; b) capacitatea echivalentă pentru n condensatori de capacitate C fiecare, grupaţi în serie şi, respectiv, în paralel; c) să se enunţe legea conservării impulsului pentru oricare sistem fizic.

5°. Se cer: a) legea conservării energiei în procesele mecanice; b) condiţia generală de echilibru pentru un corp solid; c) legile frecării de alunecare.

X. 1°. Un punct material efectuează o mişcare armonică a cărei ecuaţie este $x = a \sin \omega t$. Se cer: a) timpul pentru ca punctul material să ajungă de la poziţia de echilibru la elongaţia maximă; b) timpul pentru ca punctul material să parcurgă prima jumătate a „drumului" respectiv; c) timpul pentru ca punctul material să parcurgă a doua treime a „drumului" de la punctul (a). Frecvenţa mişcării oscilatorii este $\nu = 10$ Hz.

2°. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 5$ m $\cdot$ s^{-1}. Simultan cu acesta, de la înălţimea limită pe care o poate atinge primul corp, începe să cadă, vertical, un al doilea corp, cu aceeaşi viteză iniţială v_0. Se cer: a) timpul după trecerea căruia corpurile se vor întîlni; b) distanţa faţă de sol, la care se întîlnesc; c) vitezele corpurilor în momentul întîlnirii. Acceleraţia gravitaţională este $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.

3°. Un condensator avînd capacitatea $C = 50\ \mu$F şi o bobină, cu inductanţa $L = 2$ H şi cu rezistenţa $R = 100\ \Omega$, sînt montate în serie şi alimentate la o tensiune alternativă de 220 V şi de frecvenţă variabilă. Se cer: a) frecvenţa de rezonanţă a circuitului; b) intensitatea maximă a curentului din circuit în cazul rezonanţei; c) tensiunile care apar la bornele condensatorului şi ale bobinei în cazul rezonanţei.

4°. Se cer să se enunţe şi să se scrie următoarele relaţii cantitative: a) legea a doua a dinamicii; b) legea conservării energiei; c) legea lui Ohm.

5°. Să se scrie, indicînd semnificaţia mărimilor fizice care intervin: a) expresia inductanţei unui solenoid cu N spire; b) expresia tensiunii electromotoare induse într-un conductor liniar, care se mişcă în cîmp magnetic uniform; c) expresia energiei consumate, în intervalul de timp Δt, într-un rezistor de rezistenţă R, în curent alternativ.

ENUNŢURI
1981

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE ELECTRIC, MECANIC ŞI METALURGIC

XI. 1°. Un tren cu masa $m = 120$ t porneşte din repaus pe o linie ferată orizontală. După ce a parcurs distanţa $L = 500$ m, atingînd viteza de 90 km $\cdot$ h^{-1}, motorul se opreşte. Cunoscînd valoarea coeficientului de frecare dintre roţi şi şine $\mu = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$, să se calculeze: a) puterea medie a motorului; b) distanţa parcursă de tren pînă cînd viteza lui scade la 5 m $\cdot$ s^{-1}; c) lucrul mecanic efectuat pentru învingerea forţei de frecare pe întregul parcurs. Se va lua acceleraţia gravitaţională $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}.

Scanned with OKEN Scanner

2°. Se consideră o cantitate de oxigen cu masa $m = 10^{-3}$ kg, la temperatura $t_0 = 0°C$, sub presiunea $p_0 = 10^5$ N · m^{-2}. Se cere să se calculeze: a) căldura necesară pentru a încălzi gazul pînă la $t_1 = 100°C$, presiunea rămînînd constantă; b) volumul V_1 ocupat de gaz la temperatura t_1 și presiunea p_0; c) variația entropiei gazului în cursul unei destinderi izoterme la temperatura t_1, de la volumul V_1 la volumul $V_2 = 2{,}718\ V_1$. Se dau: masa molară $M = 32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ și exponentul adiabatic al oxigenului $\gamma = \frac{7}{5}$, constanta gazelor perfecte $R = 8310 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

3°. Un circuit, compus dintr-un condensator cu capacitatea $C = \frac{100}{3\pi}\ \mu$F, o bobină cu inductanță $L = \frac{4}{\pi}$ H și un rezistor cu rezistența $R = 100\ \Omega$, legate în serie, este alimentat la tensiunea alternativă de 220 V și frecvența de 50 Hz. Se cere să se calculeze: a) unghiul de defazaj dintre tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului în circuit; b) puterea activă, reactivă și aparentă în circuit; c) factorul de supratensiune (calitate) al circuitului.

4°. Să se trateze subiectele: a) energia cinetică, potențială și totală ale oscilatorului armonic; b) inducția electromagnetică; prezentarea fenomenului și relațiilor sale de bază; c) ecuația fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale noțiunilor care intervin: a) accelerația unui corp care se mișcă cu frecare pe un plan înclinat (se consideră că nu acționează forțe de tracțiune); b) inegalitatea lui Clausius; c) expresia fluxului inducției magnetice printr-o suprafață.

XII. 1°. De tavanul unui ascensor este suspendat un pendul cu lungimea $L = 0{,}4$ m, pendulul aflîndu-se în mișcare. Ascensorul pornește în sus, din repaus, deplasîndu-se cu accelerația $a_1 = 1{,}25$ m · s^{-2} timp de 4 s pe distanța AB, după care își continuă mișcarea uniform pe distanța BC, și în final — pentru a se opri în punctul D, aflat la înălțimea $AD = 120$ m — frînează cu accelerația $a_2 = -1{,}25$ m · s^{-2}. Se cere să se calculeze: a) timpul în care ascensorul parcurge distanțele BC și CD; b) perioadele pendulului pe cele trei porțiuni; c) numărul de oscilații complete efectuate de pendul în cursul mișcării. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10$ m · s^{-2}.

2°. Un metru cub de hidrogen cu temperatura $t_1 = 27°C$ se găsește într-un recipient cilindric vertical, închis etanș cu ajutorul unui piston de greutate neglijabilă, care poate aluneca fără frecare. Presiunea atmosferică fiind $p_1 = 10^5$ N · m^{-2}, gazul se încălzește pînă la temperatura $t_2 = 227°C$. Se cere să se calculeze: a) căldura absorbită de gaz pentru încălzire; b) variația energiei interne a gazului prin încălzire și viteza pătratică medie a moleculelor la temperatura t_2; c) volumul V_3 ocupat de gaz la temperatura t_2, dacă deasupra pistonului se așază lent un corp cu masa $m = 10^3$ kg. Se dau: aria pistonului $S = 0{,}1$ m^2, căldura specifică la presiune constantă $c_p = 14{,}2$ kJ · kg^{-1} · K^{-1} și masa molară a hidrogenului $M = 2$ kg · kmol^{-1}, constanta gazelor perfecte $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}, $g = 10$ m · s^{-2}.

3°. O particulă electrizată intră cu viteza $v = 200$ m · s^{-1} într-un cîmp magnetic uniform cu inducția $B = 1$ T, după o direcție perpendiculară pe liniile acestuia, și descrie în cîmpul magnetic un sfert de cerc cu raza $R = 20{,}86$ cm. Se cere să se calculeze: a) sarcina specifică a particulei; b) tensiunea electrică necesară pentru a accelera particula pînă la viteza dată; c) durata mișcării particulei în cîmpul magnetic.

4°. Se cere: a) să se definească elementele mișcării circulare uniforme; b) să se deducă expresia energiei interne a unui gaz ideal; c) să se scrie expresiile puterilor în curent alternativ.

Scanned with OKEN Scanner

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) perioada oscilațiilor proprii ale pendulului elastic; b) legea Joule a efectului electrocaloric; c) principiul întîi al termodinamicii.

XIII.1°. Asupra unui corp cu masa $m = 6$ kg, aflat inițial pe sol, acționează o forță verticală $F = 108$ N timp de 5 s. Să se determine: a) înălțimea atinsă de corp în momentul încetării acțiunii forței verticale; b) înălțimea maximă atinsă de corp și timpul (socotit din momentul pornirii de la sol) după care este atinsă această înălțime maximă; c) lucrul mecanic al forței F, energia potențială maximă a corpului și energia cinetică pe care o capătă corpul în momentul revenirii la sol. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2°. O cantitate de heliu ocupă volumul $V_1 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$ la presiunea $p = 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Gazul se dilată izobar, primind căldura $Q = 500$ J. Cunoscînd exponentul adiabatic $\gamma = \frac{5}{3}$ pentru heliu, să se determine: a) volumul final al gazului; b) lucrul mecanic efectuat în destinderea izobară; c) variația energiei interne în acest proces.

3°. Un circuit RLC serie de curent alternativ, avînd factorul de supratensiune (calitate) $Q = \sqrt{\frac{2}{3}}$, prezintă — la frecvența $f = 50$ Hz — impedanța $Z = 100\ \Omega$ și puterile activă $P = 346{,}4$ W, respectiv reactivă $P_r = 200$ var. Să se determine: a) unghiul de defazaj al tensiunii la bornele circuitului față de intensitatea curentului în circuit, și rezistența electrică a rezistorului circuitului; b) valorile efective ale tensiunii la borne și intensității curentului în circuit; c) inductanța bobinei și capacitatea condensatorului circuitului.

4°. Să se deducă expresiile:
a) ecuației undei plane;
b) drumului liber mediu al moleculelor unui gaz;
c) perioada de rotație a unei particule încărcate electric într-un cîmp magnetic uniform.

5°. Să se definească, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) momentul de inerție al unui sistem rigid în raport cu o axă; b) energia internă a unui sistem termodinamic; c) rezistivitatea electrică a unui material.

β. PROFILUL CHIMIE

XIV.1°. Filamentul unui dispozitiv Stern (pentru studiul distribuției moleculelor după viteze) este încălzit la $t = 948°\text{C}$ și emite atomi de argint. În cazul în care dispozitivul se rotește cu frecvența $f = 1{,}325 \cdot 10^3\ \frac{\text{rot}}{\text{s}}$, atomii avînd energia cinetică egală cu energia cinetică medie la temperatura indicată, se depun pe cilindrul exterior (de rază $R = 22$ cm) în poziția opusă fantei cilindrului interior (a cărui rază $r = 2$ cm). Cunoscînd și concentrația moleculelor de aer (aflate la temperatura $T_a = 300$ K) din dispozitiv $n = 5 \cdot 10^{18}$ molecule/m^3, să se determine: a) viteza pătratică medie a atomilor de argint; b) masa atomului de argint; c) lungimea drumului liber mediu al atomilor de argint, și presiunea aerului din dispozitiv. Se dau: secțiunea eficace de împrăștiere a atomilor de argint pe moleculele de aer $\sigma = 10^{-19}\ \text{m}^2$, constanta Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

2°. Doi moli de heliu efectuează un proces ciclic format dintr-o transformare izobară la presiunea $p_1 = 9{,}6 \cdot 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$, în cursul căreia gazul se încălzește de la temperatura $T_0 = 400$ K la temperatura $T_1 = 600$ K, o nouă transformare

Scanned with OKEN Scanner

izobară la presiunea $p_2 = 3 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2}$, și două transformări adiabatice. Să se determine: a) temperatura minimă atinsă de gaz în acest proces; b) lucrul mecanic total efectuat de gaz într-un ciclu; c) randamentul motorului termic care funcționează după acest ciclu și randamentul motorului care funcționează după ciclul Carnot între aceleași temperaturi extreme. Se dau căldura molară la volum constant a heliului $C_V = \frac{3R}{2}$ și constanta gazelor perfecte $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$.

3°. Un dispozitiv interferențial Young, în care distanța dintre fante este $a = 0{,}1$ mm, iar distanța dintre fante și ecran $D = 2$ m, utilizează o radiație luminoasă monocromatică având lungimea de undă $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m. Să se determine: a) interfranja; b) raportul fluxurilor energetice Φ_p incidente în puncte ale ecranului de observație situate la mijlocul distanței dintre un maxim de interferență și minimul următor, respectiv în maxime de interferență; c) intensitatea cîmpului electric al undei incidente, știind că densitatea energiei cîmpului electric corespunzător $w_{el} = 1{,}59 \cdot 10^{-6} \frac{J}{m^3}$ Se dă permitivitatea electrică a vidului $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m}$.

4°. Să se deducă:

a) randamentul mașinii termice Otto;

b) formula lentilelor;

c) formula unghiurilor formate de direcțiile radiațiilor difractate de o rețea, care corespund unor maxime de difracție, cu direcția de incidență.

5°. Să se enunțe indicînd semnificațiile noțiunilor fizice care intervin: a) postulatele termodinamicii; b) principiul al treilea al termodinamicii; c) principiul lui Huygens.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (fizică)

XV.1°. Pe un plan înclinat, cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală, se ridică un corp de masă $m = 2$ kg cu ajutorul unei forțe constante F orientată sub unghiul $\theta = 45°$ față de planul înclinat (figura F.B.4). Știind că valoarea coeficientului de

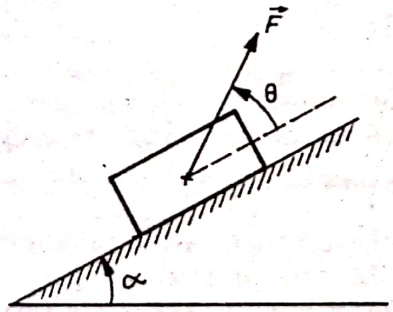


Fig. F.B.4

frecare a corpului cu planul înclinat este $\mu = 0{,}2$, să se determine: a) valoarea minimă a forței F pentru care corpul nu apasă pe planul înclinat; b) valoarea forței F sub acțiunea căreia corpul urcă uniform accelerat pe planul înclinat, cu accelerația $a_1 = 2\ m \cdot s^{-2}$; c) valoarea forței F sub acțiunea căreia corpul coboară uniform accelerat pe plan, cu accelerația $a_2 = 1\ m \cdot s^{-2}$. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2°. Un gram de gheață aflată la temperatura $t_1 = -10°C$ se transformă — prin încălzire — în vapori. Să se determine: a) căldura necesară pentru topirea gheții, știind că valoarea căldurii totale necesare pentru a transforma gramul de gheață, aflat la $-10°C$, într-o cantitate egală de apă la $+100°C$ este $Q_t = 772{,}9$ J; b) lucrul mecanic efectuat de vaporii de apă (considerați drept gaz ideal) într-o destindere izotermă la temperatura de fierbere ($t_v = 100°C$) de la presiunea $p_1 = 10^5\ N \cdot m^{-2}$, la presiunea $p_2 = 0{,}5\ p_1$; c) temperatura atinsă în destinderea izobară în care lucrul efectuat este $L = 4{,}15$ J, temperatura inițială fiind cea de fierbere. Se dau: temperatura de topire $t = 0°C$ și căldura specifică a gheții $c_g = 2090\ \frac{J}{kg \cdot K}$, căldura specifică $c_a = 4180\ \frac{J}{kg \cdot K}$ și masa molară $M = 18\ kg \cdot kmol^{-1}$ ale apei, constanta gazelor perfecte $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$.

3°. O mașină termică funcționează cu gaz ideal după un ciclu Carnot, cu diferența dintre temperaturile sursei calde și sursei reci $\Delta T = 300$ K și randamentul de 50%. Cunoscînd lucrul mecanic total efectuat într-un ciclu $L = 1800$ J, să se determine: a) variația entropiei gazului în cursul destinderii izoterme; b) volumul ocupat de 2 moli de gaz, utilizați ca agent termic, la temperatura sursei reci și presiunea $p = 1{,}66 \cdot 10^5\ N \cdot m^{-2}$; c) viteza pătratică medie și drumul liber mediu al moleculelor gazului în condițiile punctului precedent. Se dau: masa molară $M = 2\ kg \cdot kmol^{-1}$ și secțiunea eficace de împrăștiere prin ciocniri a moleculelor gazului $\tau = 3 \cdot 10^{-20}\ m^2$, constanta gazelor perfecte $R = 8310\ \frac{J}{kmol \cdot K}$ și constanta Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$.

4°. Să se deducă:

a) dependențele de timp ale vitezei, accelerației, energiei cinetice și energiei potențiale ale unui oscilator armonic (neamortizat);

b) expresia accelerației normale în mișcarea circulară uniformă;

c) expresiile duratei de urcare și înălțimii maxime atinse de un corp aruncat pe verticală de jos în sus.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin:

a) expresia teoremei variației energiei cinetice pentru un sistem rigid care execută simultan o mișcare de translație și o mișcare de rotație;

b) ecuația termică de stare a gazelor perfecte;

c) definițiile capacității calorice și căldurii specifice.

XVI. 1°. Un circuit *RLC* serie format dintr-un rezistor de rezistență $R = 100\ \Omega$, o bobină de inductanță $L = 0{,}318$ H și un condensator plan cu aer, avînd aria fiecărei armături $A = 10\ cm^3$ este alimentat de un generator de curent alternativ, care asigură o tensiune efectivă la borne constantă, pentru frecvențe variabile. Știind că maximul tensiunii efective măsurate la bornele rezistorului se atinge atunci cînd frecvența tensiunii la borne este egală cu $f_0 = 50$ Hz, să se determine: a) capacitatea condensatorului plan; b) diferența frecvențelor f_1, f_2 la care tensiunea la bornele rezistorului scade la $\frac{1}{\sqrt{2}}$ din valoarea maximă (corespunzătoare frecvenței f_0); c) distanța la care trebuie apropiate armăturile condensatorului plan pentru ca defazajul dintre tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului în acesta să devină, la frecvența f_0, $\varphi = 45°$. Se dă permitivitatea aerului $\varepsilon_a = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\ \frac{F}{m}$.

2°. O radiație electromagnetică incidentă din vid pe o prismă optică de indice de refracție absolut $n = \sqrt{3}$, sub unghiul $i = 60°$, parcurge prisma pe drumul de deviație minimă. Să se determine: a) valoarea unghiului de refracție; b) valoarea

unghiului de deviație minimă; c) sinusul unghiului minim de incidență pe suprafața prismei, pentru care mai există un fascicul emergent din aceasta.

3°. Se consideră un atom de hidrogen în prima stare excitată. Să se determine: a) energia cinetică a electronului în această stare; b) lungimea de undă maximă a radiației care poate ioniza atomul aflat în această stare; c) lungimea de undă a radiației emise în cazul tranziției în starea fundamentală. Se dau: constanta Rydberg $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$, constanta lui Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$, viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

4°. Să se enunțe: a) legile (teoremele) lui Kirchhoff; b) legea lui Joule a efectului electrocaloric; c) principalele constatări experimentale privind efectul fotoelectric.

5°. Precizînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin, să se indice expresiile: a) rezistenței unui conductor, în funcție de dimensiunile geometrice ale acestuia și natura conductorului; b) intensității cîmpului magnetic în centrul unei spire circulare parcursă de curent electric; c) puterilor activă, reactivă și aparentă, în curent alternativ.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

XVII. 1°. O butelie cu volumul constant $V = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ m^3$ conține hidrogen la presiunea $p = 9 \cdot 10^6\ N \cdot m^{-2}$ și temperatura $t = 27°C$. Cunoscînd masa molară a hidrogenului $M = 2\ kg \cdot kmol^{-1}$ și secțiunea eficace $\tau = 3 \cdot 10^{-20}\ m^2$, de împrăștiere a moleculelor sale prin ciocniri, să se determine: a) viteza pătratică medie și drumul liber mediu al moleculelor de hidrogen în condițiile specificate; b) masa hidrogenului din butelie și presiunea sa la $t_1 = -13°C$; c) la ce temperatură există pericol de explozie, dacă butelia rezistă pînă la presiunea de $1{,}2 \cdot 10^7\ N \cdot m^{-2}$. Se dau: constanta gazelor perfecte $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$, constanta lui Boltzmann $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$.

2°. Se consideră un dispozitiv Young avînd distanța dintre fante $a = 3{,}3$ mm, distanța de la fante la ecran $D = 3$ m și lungimea de undă în vid a radiației monocromatice utilizate $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ m. Să se determine: a) valoarea interfranjei cînd radiațiile se propagă prin aer, al cărui indice de refracție $n_a = 1$; b) valoarea interfranjei în cazul în care radiațiile se propagă prin apă, al cărei indice de refracție $n_{apă} = 1{,}33$; c) valoarea deplasării franjelor în cazul în care, în drumul radiației provenite de la una dintre fante, se introduce o lamă transparentă, cu fețe plan-paralele, de grosime $g = 10^{-5}$ m și indice de refracție $n_{lamă} = 1{,}5$, dacă radiațiile se propagă în aer.

3°. Indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin, să se enunțe: a) principiile termodinamicii; b) legea lui Dalton pentru un amestec de gaze; c) legea dezintegrării radioactive.

4°. Precizînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin, să se indice expresiile: a) ecuației transformării adiabatice a unui gaz perfect; b) energiei totale a unui atom de hidrogen; c) convergenței unei lentile subțiri.

5°. Să se deducă: a) expresia dependenței de temperatură a energiei interne a gazului ideal; b) expresia razei traiectoriei unei particule încărcate electric într-un spectrograf de masă; c) unghiurile după care sînt observate maximele de difracție obținute cu ajutorul unei rețele.

XVIII.1°. Doi moli de gaz perfect efectuează un ciclu Carnot. Știind că temperatura sursei reci $T_2 = 300$ K, căldura transmisă sursei reci într-un ciclu

Scanned with OKEN Scanner

$Q_2 = 3600$ J, iar lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii adiabatice $L = 2493$ J, să se determine: a) variaţia energiei interne a gazului pentru o creştere a temperaturii de 1 K; b) temperatura sursei calde; c) randamentul ciclului şi lucrul mecanic total efectuat de gaz într-un ciclu. Se dau: căldura molară la presiune constantă a gazului perfect $C_p = 5\frac{R}{2}$ şi constanta gazelor perfecte $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}.

2°. Tensiunea de accelerare a electronilor într-un dispozitiv Davisson-Germer este $U = 100$ V. Să se determine: a) lungimea undei de Broglie asociată electronilor; b) energia şi impulsul unui foton care ar avea aceeaşi lungime de undă; c) unghiul sub care se produce primul maxim de difracţie, în cazul incidenţei normale a fasciculului electromagnetic cu lungimea de undă dedusă pe o reţea de difracţie care are $N = 10^3$ fante pe milimetru. Se dau: constanta lui Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s, viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, masa electronului $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, sarcina elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

3°. Să se deducă: a) expresia drumului liber mediu al moleculelor unui gaz; b) formula lentilelor; c) expresia interfranjei în cazul unui dispozitiv interferenţial Young.

4°. Să se indice expresiile: a) ecuaţiei fundamentale a teoriei cinetice a gazelor, b) legii conservării energiei în procesul de extracţie a unui fotoelectron; c) razei traiectoriei descrisă de o particulă încărcată electric într-un cîmp magnetic uniform, indicînd semnificaţiile mărimilor fizice care intervin.

5°. Să se enunţe: a) postulatele termodinamicii; b) postulatele teoriei relativităţii; c) legile de conservare în reacţiile nucleare.

4. ÎNVĂŢĂMÎNTUL ECONOMIC

XIX.1°. Un fir elastic cu secţiunea $S = 4 \cdot 10^{-6}$ m^2 şi lungimea $L_0 = 0{,}4$ m este fixat la capete, în poziţie orizontală. Ştiind că, în cazul în care la mijlocul firului se leagă un corp, unghiul format de cele două părţi ale firului — în noua poziţie de echilibru a acestuia — cu orizontala este $\theta = 30°$, să se determine: a) masa corpului care întinde firul; b) energia potenţială înmagazinată în fir, în noua poziţie de echilibru a acestuia; c) frecvenţa oscilaţiilor proprii ale corpului, dacă jumătăţile firului ar fi alipite, iar capetele acestuia ar fi prinse într-un punct fix. Se dau: modulul de elasticitate al firului $E = 1{,}2 \cdot 10^7$ N · m^{-2}, acceleraţia gravitaţională $g = 9{,}8$ m · s^{-2}.

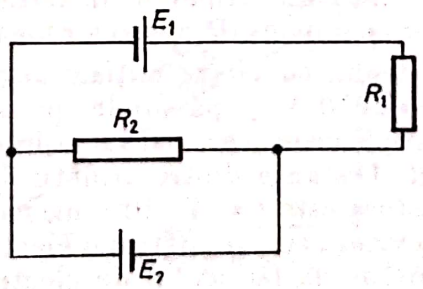


Fig. F.B.5

2°. Se consideră schema electrică din figura F.B. 5 în care $E_1 = 6$ V, $E_2 = 4$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$. Să se determine: a) intensităţile curenţilor prin fiecare ramură a schemei; b) căldura dezvoltată în rezistorul R_2 pe durata unui minut;

Scanned with OKEN Scanner

c) diferența de potențial dintre electrodul pozitiv al sursei E_1 și cel negativ al sursei E_2. Se neglijează rezistențele interne ale celor două surse electrice.

3°. Un circuit serie RLC este format dintr-un rezistor cu rezistența $R = 40\,\Omega$, o bobină de inductanță $L = 255$ mH și un condensator variabil fixat inițial la capacitatea $C = 63{,}6\ \mu$F. Știind că acest circuit este legat la bornele unui generator cu tensiunea efectivă de 220 V și frecvența $f = 50$ Hz, să se determine: a) intensitatea curentului în circuit și tensiunile U_R, U_L și U_C la bornele rezistorului, bobinei și, respectiv, condensatorului; b) factorul de putere al circuitului serie; c) capacitatea condensatorului variabil pentru care în circuit apare rezonanța.

4°. Precizînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin, să se indice expresiile: a) legii gravitației universale (Newton); b) momentului de inerție al unui sistem rigid în raport cu o axă; c) legii lui Faraday a electrolizei.

5°. Să se enunțe: a) legile dinamicii; b) teorema variației momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale; c) legea lui Faraday a inducției electromagnetice.

ENUNȚURI
1982

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE ELECTRIC, MECANIC ȘI METALURGIC

XX.1°. Un corp de masă $m = 200$ g, legat de un resort elastic de constantă k, efectuează oscilații armonice, aflîndu-se la momentul inițial în poziția de echilibru. Dacă la distanța $y_1 = 10$ cm de poziția de echilibru viteza sa este $v_1 = 0{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, iar la distanța $y_2 = 20$ cm viteza sa este $v_2 = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, se cere: a) ecuația de mișcare a oscilatorului și constanta elastică a resortului; b) la ce distanță de poziția de echilibru accelerația sa are valoarea $a = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; c) pentru ce elongație energia cinetică a oscilatorului este egală cu energia sa potențială.

2°. Un gaz ideal, care la presiunea $p_1 = 5 \cdot 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ocupă volumul $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$, efectuează o transformare izotermă pînă la un volum $V_2 = 10{,}872 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$ urmată de o transformare izobară pînă la volumul V_1 și revine în starea inițială printr-o transformare izocoră. Exponentul adiabatic al gazului fiind $\gamma = 1{,}4$, se cere: a) randamentul motorului termic care ar funcționa după acest ciclu; b) să se calculeze variația energiei interne în cursul comprimării izobare; c) să se calculeze variația entropiei în transformarea izotermă, pentru 3 moli din gazul considerat. Se va lua constanta universală a gazelor ideale $R = 8310\ \text{J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

✳ 3°. Un fascicul de electroni, cu viteze inițiale neglijabile, este accelerat de o diferență de potențial $U_a = 4550$ V și pătrunde, pe axa unui condensator plan, după o direcție paralelă cu armăturile acestuia. La ieșirea din condensator, fasciculul lovește un ecran fluorescent. Distanța dintre armăturile condensatorului este $d = 5 \cdot 10^{-3}$ m, lungimea acestora este $l = 4 \cdot 10^{-2}$ m, iar tensiunea dintre armături este $U = 100$ V. Se cere: a) viteza cu care pătrund electronii în condensator; b) care este deplasarea spotului produs de fasciculul de electroni pe ecranul fluorescent, față de poziția spotului în cazul anulării tensiunii dintre armăturile condensatorului; c) indicați direcția, sensul și mărimea inducției cîmpului magnetic care ar acționa între armăturile condensatorului, pentru ca această deplasare să se anuleze. Se dau: sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și masa electronului $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Se cere: a) să se definească kilomolul; b) să se enunțe principiile dinamicii newtoniene; c) să se scrie condiția de rezonanță într-un circuit serie RLC, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin.

5°. Se cere: a) să se descrie pe scurt experimentul lui Stern; b) să se deducă expresiile rezistențelor echivalente ale grupărilor serie, respectiv paralel, de rezistori; c) să se indice condiția de conservare a impulsului total al unui sistem de puncte materiale.

XXI.1°. Să se determine: a) lucrul mecanic care trebuie efectuat asupra unui corp de masă $m = 10^4$ kg, aflat inițial la suprafața Pămîntului, pentru a-l aduce la o înălțime deasupra solului egală cu raza Pămîntului ($R = 6400$ km); b) valoarea și direcția vitezei care trebuie imprimată corpului pentru a-l înscrie pe o traiectorie circulară la distanța de sol indicată mai sus; c) momentul cinetic al corpului în cazul punctului precedent. Se va lua accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2°. Se consideră un amestec de oxigen și azot la temperatura $t = 527°\text{C}$ și presiunea $p = 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Numerele de kilomoli de oxigen și, respectiv, de azot, în amestec, fiind egale, să se determine: a) presiunile parțiale și volumul amestecului, știind că masa oxigenului este $m = 8 \cdot 10^{-3}$ kg; b) raportul vitezelor pătratice medii ale moleculelor celor două gaze; c) temperatura amestecului după o destindere adiabatică, în cursul căreia volumul său crește de 32 ori. Se dau: exponenții adiabatici $\gamma_{N_2} = \gamma_{O_2} = 1{,}40$, masele molare $\mu_{N_2} = 28\ \text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$, $\mu_{O_2} = 32\ \text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$, constanta universală a gazelor ideale $R = 8310\ \text{J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

3°. Un circuit serie de curent alternativ, alcătuit dintr-un solenoid cu inductanța $L = 30$ mH, un condensator cu capacitatea $C = 27\ \mu\text{F}$ și un rezistor cu rezistența $R = 2\ \Omega$, este alimentat de o sursă de tensiune alternativă, care asigură — pentru frecvențe variabile — o aceeași amplitudine $U_0 = 20$ V a tensiunii la bornele circuitului. Să se determine: a) frecvența ν_0 pentru care puterea disipată în rezistor este maximă; b) valoarea maximă a puterii disipate în rezistor; c) factorul de supratensiune al circuitului.

4°. Să se deducă expresiile: a) dependenței de timp a vitezei, accelerației, energiei cinetice și energiei potențiale a unui oscilator armonic; b) randamentul unui motor termic, avînd ca agent un gaz perfect care efectuează un ciclu Carnot reversibil; c) forței de interacțiune dintre două conductoare paralele, parcurse de curent electric.

5°. Să se definească indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) momentul forței în raport cu un punct din spațiu; b) entropia termodinamică; c) echivalentul electrochimic al unei substanțe.

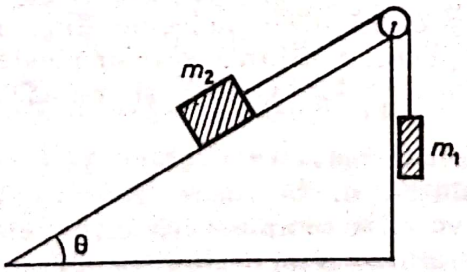


Fig. F.B.6

XXII.1°. Fiind dat sistemul din figura F.B. 6 cu următoarele valori ale mărimilor fizice: $m_1 = 1{,}5$ kg, $m_2 = 0{,}5$ kg, $\theta = 30°$, să se calculeze: a) accelerația sistemului format din corpurile de mase m_1 și m_2, presupunînd că mișcarea corpului de masă m_2 pe planul înclinat decurge cu frecare, coeficientul de frecare fiind

Scanned with OKEN Scanner

$\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$; b) tensiunea din firul de legătură; c) dacă firul este tăiat, cînd corpurile sînt în repaus, care este energia cinetică a corpului cu masa m_1 după ce a parcurs 20 m în cădere liberă. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

2°. Două vase sferice, în care se află heliu, sînt unite printr-un tub de volum neglijabil, prevăzut cu un robinet. Vasul 2 are un diametru de 5 ori mai mare decît diametrul vasului 1. Robinetul fiind inițial, închis, presiunea gazului din vasul 1 este $p_1 = 10^5\ N \cdot m^{-2}$, temperaturile heliului în cele două vase sînt $T_1 = 400$ K și $T_2 = 200$ K, iar raportul densităților este $\rho_1/\rho_2 = 3{,}125 \cdot 10^4$. Să se calculeze: a) presiunea p_2 din vasul 2 în starea inițială; b) numărul kilomolilor din vasul 1 (ν_1') după deschiderea robinetului și atingerea echilibrului, știind că temperaturile gazului (T_1 și T_2) din cele două vase sînt menținute constante și în final în vasul 2 se găsesc $\nu_2' = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ kilomoli de heliu; c) variația energiei interne a heliului între starea inițială și cea finală. Se dă constanta universală a gazelor perfecte $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$.

3°. Un circuit oscilant, format dintr-o bobină cu inductanța $L = 50\ \mu H$ și un condensator variabil, întreține oscilații electrice cu frecvența proprie $\nu_0 = 5 \cdot 10^6$ Hz. Oscilațiile sînt transmise unei antene metalice verticale, plantată în sol, care radiază unde electromagnetice în spațiu. Să se calculeze: a) capacitatea la care se reglează condensatorul; b) lungimea de undă a radiațiilor electromagnetice; c) înălțimea antenei, știind că aceasta lucrează pe modul fundamental. Se dă viteza undelor electromagnetice în vid $c = 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$.

4°. Să se trateze: a) teorema conservării impulsului; b) primul principiu al termodinamicii pentru transformări adiabatice; c) capacitățile echivalente ale grupărilor de condensatori în serie, respectiv în paralel.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legea lui Hooke; b) expresia energiei cinetice medii a moleculelor unui gaz ideal; c) expresia potențialului electric într-un punct din vecinătatea unei sarcini electrice punctiforme.

β. PROFILUL CHIMIE

XXIII.1°. Într-o butelie cu volumul $V = 60$ l se află heliu la presiunea $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^7\ N \cdot m^{-2}$ și temperatura $t_1 = 27°C$. Se consumă gaz din butelie pînă cînd presiunea devine $p_2 = 10^6\ N \cdot m^{-2}$, la temperatura $p_2 = 7°C$. Să se afle: a) ce cantitate de heliu s-a consumat; b) raportul drumurilor libere medii și raportul vitezelor pătratice medii ale moleculelor gazului aflat în butelie în cele două situații; c) energia internă și numărul de molecule din unitatea de volum pentru gazul rămas în butelie. Se cunosc: constanta gazelor ideale $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$, masa molară a heliului $\mu = 4\ kg \cdot kmol^{-1}$ și numărul lui Avogadro $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}\ kmol^{-1}$.

2°. Se consideră un ciclu Carnot cu randamentul $\eta = 0{,}55$. Variația entropiei între stările finală și inițială ale uneia dintre transformările izoterme ale ciclului este de $8{,}31\ kJ \cdot K^{-1}$, iar variația temperaturii între cele două izoterme este de 350 K. Să se afle: a) temperatura sursei calde și temperatura sursei reci; b) căldura cedată sursei reci și lucrul mecanic produs într-un ciclu; c) raportul dintre presiunile gazului corespunzătoare stărilor inițială și finală ale transformării în care apare transferul de căldură către sursa rece, dacă ciclul este parcurs de un kilomol de gaz.

3°. Pe o celulă fotoelectrică se aplică o tensiune de frînare $U_s = 1{,}5$ V. Dacă potențialul de extracție al catodului este $U_0 = 2{,}38$ V, să se afle: a) lungimea de undă maximă a luminii pentru care se înregistrează curent fotoelectric; b) numărul

Scanned with OKEN Scanner

fotoelectronilor emiși în unitatea de timp, cînd se iradiază catodul cu lumină de această lungime de undă, dacă puterea fasciculului incident este $P = 10$ mW și fiecare foton provoacă emisia unui electron; c) lungimea de undă de Broglie a unui fotoelectron emis. Se cunosc: constanta lui Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J · s, sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masa electronului $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg și viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

4°. Să se enunțe, scriindu-se și ecuațiile corespunzătoare: a) principiile întîi și al doilea ale termodinamicii; b) legea lui Dalton; c) legile reflexiei și refracției.

5°. Să se scrie, indicîndu-se semnificația mărimilor care intervin: a) relațiile care leagă aspectul corpuscular și cel ondulatoriu ale fotonului; b) relația fundamentală a teoriei cinetico-moleculare; c) relația pentru variația energiei interne într-o transformare adiabatică.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (fizică)

XXIV.1°. De capetele unui fir inextensibil, de masă neglijabilă, trecut peste un scripete fix de rază $R = 0{,}1$ m și moment de inerție $I = 5 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2, sînt suspendate două corpuri cu masele $m_1 = 0{,}2$ kg și $m_2 = 0{,}3$ kg. Inițial corpurile se află în repaus, la aceeași înălțime $h = 4$ m față de sol, iar firul este perfect întins. Sistemul este lăsat să se miște sub acțiunea greutății celor două corpuri, fără viteză inițială. Neglijînd frecarea la axul scripetelui și alunecarea firului să se determine: a) accelerația corpurilor și tensiunile în fir; b) timpul după care distanța dintre cele două corpuri este $d = 1{,}83$ m; c) momentul cinetic al sistemului cînd distanța dintre corpuri este d; d) intervalele de timp de la începerea mișcării pînă cînd cele două corpuri ajung la sol, presupunînd că, în momentul în care distanța dintre acestea este d, firul se rupe, corpurile căzînd liber. (Se consideră valoarea accelerației gravitaționale $g = 10$ m · s^{-2}.)

2°. Un gaz ideal, monoatomic, ocupă un volum $V_1 = 0{,}3$ m^3 la presiunea $p_1 = 3 \cdot 10^4$ N · m^{-2} și temperatura $t_1 = 27$°C. Gazul efectuează o transformare care verifică ecuația $p = a \cdot V$, cu a = constant, ocupînd în starea finală un volum de trei ori mai mare. Să se determine: a) presiunea și temperatura în starea finală; b) lucrul mecanic efectuat de gaz; c) variația energiei interne a gazului și căldura absorbită de gaz în această transformare.

3°. Dacă un corp cu masa $m = 15$ g, ciocnind elastic un corp de masă M aflat în repaus, continuă să se miște, pe aceeași direcție și în același sens, cu un sfert din viteza sa inițială, care este masa M a corpului ciocnit?

4°. Să se formuleze și să se scrie relațiile corespunzătoare, indicînd semnificația fizică a mărimilor care intervin: a) legile frecării la alunecare; b) legea lui Dalton pentru un amestec de gaze; c) definiția entropiei și inegalitatea lui Clausius.

5°. Să se demonstreze: a) teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale; b) ecuația de stare a gazului ideal.

XXV.1°. La o sursă, caracterizată prin tensiunea efectivă $U = 220$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz, se conectează o bobină. Intensitatea curentului alternativ prin bobină este $I_1 = 2$ A. Prin legarea unui condensator cu capacitatea $C = 20\,\mu$F în serie cu bobina, intensitatea curentului prin bobină rămîne aceeași, $I_2 = 2$ A. Să se determine: a) rezistența R a bobinei și inductanța L a bobinei. b) puterea activă P și puterea reactivă P_r în cele două situații (cu condensator și fără condensator); c) factorul de supratensiune al circuitului RLC considerat.

2°. Suprafața unui metal este iluminată succesiv de radiații monocromatice de lungimi de undă $\lambda_1 = 2790$ Å și $\lambda_2 = 2450$ Å urmărindu-se emisia de fotoelectroni. Se măsoară tensiunile de stopare corespunzătoare, obținîndu-se $U_1 = 0{,}66$ V

Scanned with OKEN Scanner

și $U_2 = 1{,}27$ V. a) Ce valoare rezultă pentru constanta lui Planck din aceste măsurători? b) Să se calculeze valoarea λ_0 pentru pragul roșu al metalului care rezultă din aceste măsurători cu considerarea valorii constantei lui Planck stabilite la punctul a). c) Se poate calcula, pe baza datelor din enunțul problemei, energia minimă, a fotonilor, necesară extragerii de fotoelectroni fără a se folosi constanta lui Planck? Dacă răspunsul este afirmativ, să se efectueze calculul respectiv. (Se dă sarcina electronului $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}.)

3°. Considerînd dezintegrarea α a nucleului de poloniu,

$$^{212}_{84}\text{Po} \rightarrow \alpha + {}^{208}_{82}\text{Pb},$$

să se calculeze: a) energia (în MeV) eliberată la emisia unei particule α de către nucleul de poloniu aflat inițial în repaus; b) viteza nucleului de plumb; c) raza traiectoriei particulei α emise dacă aceasta pătrunde în cîmpul magnetic omogen al unui spectrograf de masă, de inducție $B = 1$ T perpendiculară pe viteza particulei α. (Se dau: $m_\alpha = 4{,}00260$ u, $M_{Po} = 211{,}98887$ u, $M_{Pb} = 207{,}97665$ u, 1 u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, sarcina electronului $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.)

4°. Să se formuleze și să se scrie relațiile corespunzătoare, indicînd semnificația fizică a mărimilor care intervin: a) legea lui Coulomb; b) legile refracției luminii; c) postulatele lui Bohr.

5°. Să se deducă: a) formula convergenței unui sistem de lentile subțiri alăturate; b) relația dintre timpul de înjumătățire și constanta de dezintegrare radioactivă.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

XXVI.1°. Să se deducă: a) inegalitatea lui Clausius; b) variațiile energiei interne a unui gaz ideal în transformările de stare: izocoră, izobară, izotermă; c) condițiile de maxim și minim la interferența a două unde care provin de la două surse coerente apropiate.

2°. a) Să se enunțe postulatele lui Bohr.

b) Să se enunțe aproximațiile lui Gauss pentru lentile subțiri.

c) Să se scrie condiția de deviație minimă pentru o prismă optică.

3°. a) Să se descrie fenomenul de difracție a microparticulelor.

b) Să se scrie mărimile caracteristice fotonului și să se enumere fenomenele fizice, cunoscute, care pun în evidență natura fotonică a radiației electromagnetice.

c) Să se definească noțiunile de energie internă și energie totală a unui sistem termodinamic.

4°. Într-un tub de radiații X, spectrul continuu de radiații X produs are limita spre lungimi de undă scurte la $\lambda_0 = 4{,}1 \cdot 10^{-2}$ nm. Să se calculeze: a) energia acestor fotoni; b) tensiunea de accelerare a electronilor din tubul de radiații X care au produs acest spectru; c) lungimea de undă de Broglie asociată acestor electroni (se folosește aproximația nerelativistă). Se dau: constanta lui Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s, sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}, masa electronului $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

5°. O țintă de $^7_3$Li este bombardată cu protoni avînd energia de 2 MeV. Se observă particule alfa sub un unghi de $\pi/2$ față de direcția protonilor incidenți. Se cere: a) să se scrie reacția nucleară care are loc; b) să se calculeze energia de reacție și energia particulelor alfa emise sub unghiul $\pi/2$; c) care este unghiul și energia celeilalte particule asociată cu particula alfa observată. Se dau echivalentul de energie al unității atomice de masă, 1 u $\cdot\, c^2 = 931{,}478$ MeV, și masele atomice

Scanned with OKEN Scanner

în unități atomice de masă: $M_H = 1{,}0078522$ u, $M_{Li} = 7{,}0160053$ u, $M_{He} = 4{,}0026036$ u.

XXVII.1°. Să se enunțe: a) principiul lui Huygens; b) ipoteza lui de Broglie; c) principiul al doilea al termodinamicii.

2°. Să se deducă: a) expresia drumului liber mediu al moleculelor unui gaz; b) energia de reacție într-o reacție nucleară; c) relația dintre indicele de refracție al materialului din care este făcută o prismă și unghiul de deviație minimă în prismă.

3°. a) Să se facă deosebirea dintre ecuația calorică de stare și ecuația termică de stare pentru un sistem termodinamic.

b) Să se definească constanta de dezintegrare a unei specii de nuclee radioactive și activitatea unei surse radioactive.

c) Să se definească condițiile în care se observă interferența luminii.

4°. Un recipient cu volumul de 20 l este prevăzut cu o supapă care se deschide la presiuni interioare ce depășesc $p' = 4$ atm. În recipient se află 4 g de hidrogen la temperatura de 27°C. Gazul suferă o transformare izocoră în care primește o cantitate de căldură $Q_1 = 7{,}4 \cdot 10^3$ J. Apoi este comprimat izoterm pînă la un volum de 10 l și destins tot izoterm pînă la volumul inițial. Să se calculeze: a) temperatura finală a gazului; b) cantitatea finală de gaz din recipient; c) presiunea finală în recipient. Se dau: masa moleculară a hidrogenului $M_{H_2} = 2$ kg · kmol^{-1}, constanta gazelor ideale $R = 8{,}31$ kJ · kmol^{-1} · K^{-1}, căldura molară la volum constant $C_V = (5/2)R$ (1 atm $= 1{,}013 \cdot 10^5$ N · m^{-2}).

5°. Izotopul radioactiv $^{226}_{88}$Ra face parte din seria radioactivă a uraniului, serie care se termină cu izotopul stabil $^{206}_{82}$Pb. O masă de 0,2 g de radiu pur este închisă ermetic într-o incintă de volum 100 cm^3. Să se calculeze: a) activitatea inițială a acestei mase de radiu; b) timpul după care masa de radiu se micșorează cu $2 \cdot 10^{-5}$ g; c) presiunea parțială a heliului în incintă după acest interval de timp. Se presupune că toți atomii de heliu, care rezultă din dezintegrarea radiului pînă la plumb, reușesc să iasă din preparatul respectiv. Incinta se află la temperatura de 27°C. Se dau: timpul de înjumătățire al radiului $T_{1/2} = 1620$ ani, numărul lui Avogadro $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}, constanta gazelor ideale $R = 8{,}31$ kJ · kmol^{-1} · K^{-1}, $\ln 2 = 0{,}693$. Se utilizează aproximația $e^{-x} = 1 - x$ pentru $x \ll 1$.

4. ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

XXVIII.1°. Un camion se deplasează uniform pe un drum orizontal. La momentul t_1 viteza sa este $v_1 = 5$ m · s^{-1}, iar după intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ ea devine $v_2 = 20$ m · s^{-1}. În intervalul Δt camionul efectuează un lucru mecanic de 375 kJ, consumînd o putere de 75 kW. Să se afle: a) greutatea camionului; b) spațiul parcurs în timpul Δt; c) forța de tracțiune dezvoltată de motor. Se consideră $g = 10$ m · s^{-2}.

2°. Un acumulator cu tensiunea electromotoare de 24 V este format din n elemente identice înseriate, fiecare avînd rezistența interioară de 0,4 Ω. La bornele sale se conectează un condensator plan cu suprafața armăturilor $S = 2 \cdot 10^{-5}$ m^2 și cu distanța dintre ele $d = 3$ mm. Condensatorul se încarcă cu sarcina $Q = 10^{-5}$ C. În locul condensatorului se introduce un rezistor. Intensitatea curentului prin rezistor este $I_1 = 2$ A. Dacă se înlătură jumătate din elementele acumulatorului, intensitatea curentului scade la $I_2 = 1{,}5$ A. Să se calculeze: a) permitivitatea absolută a dielectricului dintre plăcile condensatorului; b) valoarea rezistenței rezistorului; c) numărul n de elemente care formează acumulatorul.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Să se demonstreze: a) expresia lucrului mecanic al forțelor elastice; b) teorema conservării energiei mecanice; c) legea lui Ohm.

4°. Să se scrie, indicînd și semnificațiile mărimilor care intervin: a) viteza de propagare a undelor elastice longitudinale; b) expresia rezistenței interne a unei diode semiconductoare; c) expresia impedanței circuitului serie *RLC*.

XXIX.1°. Un corp pleacă cu viteza inițială $v_0 = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ și coboară în 2 s un plan înclinat cu 45° față de orizontală. Cînd ajunge pe planul orizontal, corpul lovește un resort orizontal, aflat în echilibru. Știind masa corpului $m = 2$ kg, constanta elastică a resortului $k = 5 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ și coeficientul de frecare între corp și planul înclinat $\mu = 0{,}3$, să se afle: a) accelerația pe planul înclinat; b) viteza corpului la baza planului; c) amplitudinea deformării resortului și frecvența mișcării sale, presupunînd că oscilează armonic, iar corpul rămîne agățat de resort. Se consideră $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2°. Un circuit serie este format dintr-o bobină de inductanță $L = 10^{-3}$ H și din condensatoarele C_1 și C_2, montate în serie. Condensatorul C_1 are o capacitate de $2 \cdot 10^{-9}$ F, iar C_2 este un condensator plan, cu aer, avînd aria unei armături $S = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$, iar distanța dintre ele $d = 3{,}54 \cdot 10^{-4}$ m. Cunoscînd permitivitatea absolută a aerului $\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$, să se calculeze: a) capacitatea condensatorului C_2; b) frecvența de rezonanță, ν_0, a circuitului; c) lungimea de undă a undelor electromagnetice cu frecvența ν_0, care se propagă cu viteza $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3°. Să se trateze următoarele subiecte: a) intensitatea cîmpului gravitațional radial; b) potențialul electric și diferența de potențial; c) inductanța unui circuit și a unei bobine.

4°. Să se definească unitățile de măsură în SI pentru următoarele mărimi: a) lucrul mecanic și puterea; b) intensitatea cîmpului electric; c) fluxul magnetic.

ENUNȚURI
1983

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC

α. PROFILURILE ELECTRIC, MECANIC ȘI METALURGIC

XXX.1°. Un plan înclinat cu unghiul $\theta = 45°$ se mișcă rectiliniu, după o direcție orizontală, perpendiculară pe muchia de la baza planului înclinat, cu accelerația $a = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (v. figura F.B. 7). Pe planul înclinat se deplasează cu frecare ($\mu = 0{,}3$)

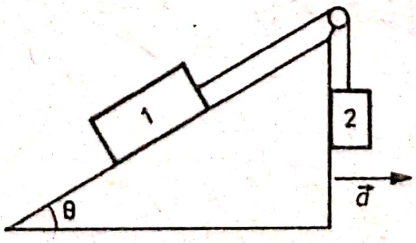


Fig. F.B.7

un corp cu masa $m_1 = 2$ kg, de care este legat cu un fir inextensibil, trecut peste scripetele S, un al doilea corp cu masa $m_2 = 4$ kg. Știind că mișcarea corpului 2 decurge pe verticală, frecarea dintre el și fața verticală a prismei planului înclinat fiind neglijabilă, să se determine: a) accelerația a_1 a ansamblului A format din cele

Scanned with OKEN Scanner

două corpuri față de planul înclinat; b) tensiunea din firul de legătură, în cazul de la punctul precedent; c) valoarea m_2' pe care ar trebui să o aibă masa corpului 2 pentru ca — față de planul înclinat — ansamblul A să se miște uniform, în același sens ca și anterior. Se va lua accelerația gravitațională $g = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

2°. O cantitate de heliu cu masa $m_1 = 1$ kg, aflată la temperatura $T_1 = 300$ K, trebuie încălzită pînă la temperatura $T_2 = 400$ K. Să se calculeze: a) căldura necesară pentru încălzirea izocoră a gazului și căldura specifică la volum constant a heliului; b) căldura necesară pentru încălzirea izobară a heliului și căldura sa specifică la presiune constantă; c) știind că la temperatura T_2 volumul gazului este $V_2 = 5$ l, iar din această stare heliul se destinde adiabatic pînă la volumul $V_3 = 40$ l, să se determine temperatura finală T_3 a gazului. Se dau masa molară $\mu = 4\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ a heliului și constanta gazelor perfecte $R = 8310\,\frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

3°. O particulă cu sarcina electrică $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și masa $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg pătrunde cu viteza $v_0 = 10^6$ m/s, perpendicular pe liniile cîmpului electric, între armăturile unui condensator plan, încărcate cu sarcina electrică $q_2 = 4 \cdot 10^{-14}$ C. La ieșirea din condensator, particula intră într-un cîmp magnetic uniform cu inducția $B = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ T, viteza ei fiind perpendiculară pe liniile cîmpului magnetic. Știind că parcursul în condensator este $L = 0{,}12$ m, aria fiecărei armături $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^2, iar permitivitatea mediului $\varepsilon = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{F}}{\text{m}}$, să se determine: a) accelerația particulei în interiorul condensatorului; b) deviația particulei la ieșirea din cîmpul electric; c) perioada, viteza și raza circumferinței după care se mișcă particula în cîmpul magnetic.

4°. Să se deducă: a) expresiile energiei cinetice și energiei potențiale pentru oscilatorul armonic; b) expresia randamentului unui motor termic care funcționează după un ciclu Carnot reversibil; c) expresiile impedanței și defazajului tensiunii față de intensitatea curentului electric, pentru circuitul *RLC* serie.

5°. Să se scrie, indicînd semnificațiile mărimilor fizice care intervin: a) definiția momentului unei forțe în raport cu un punct; b) formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare a gazelor; c) legea inducției electromagnetice.

XXXI.1°. Un corp de masă $m_2 = 4$ kg este așezat pe un alt corp de masă $m_1 = 6$ kg, legat la rîndul său de un resort orizontal, de constantă elastică $k = 50$ N $\cdot$ m^{-1} (v. figura F.B.8). Știind că, resortul fiind nedeformat, se imprimă ansamblului format din cele două corpuri viteza inițială orizontală $v_0 = \sqrt{10}$ m$\cdot$s^{-1},

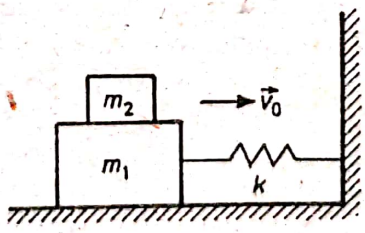


Fig. F.B.8

precum și faptul că între corpul de masă m_1 și planul orizontal există frecare, să se calculeze: a) amplitudinea oscilațiilor ansamblului format din cele două corpuri, dacă acestea se mișcă împreună; b) forța de frecare minimă și coeficientul de frecare minim pentru ca în timpul oscilațiilor corpul de masă m_2 să nu alunece de pe corpul de masă m_1; c) energia potențială maximă și accelerația maximă a ansamblului celor două corpuri.

Scanned with OKEN Scanner

2°. O cantitate $\nu = 2$ kmol de gaz ideal se găsește într-o incintă în care temperatura gazului variază liniar cu înălțimea z, $T(z) = T_0 + az$, presiunea gazului fiind aceeași în toată incinta. Se cere: a) să se deducă dependența de înălțime, a densității gazului, a energiei cinetice medii și a vitezei pătratice medii a moleculelor, în interiorul incintei; b) știind că, după uniformizarea temperaturii în incintă, gazul ajunge la temperatura $T = 400$ K și presiunea $p = 3{,}325 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, să se determine volumul incintei; c) dacă gazul din incintă este apoi evacuat — sub acțiunea propriei presiuni — în atmosferă, să se afle energia internă pe care o avea în incintă gazul care a fost evacuat. Se dau: masa molară a gazului $\mu = 20$ kg$\cdot$kmol^{-1}, presiunea atmosferică $p_a = 10^5$ N$\cdot$m^{-2} și constanta gazelor perfecte $R = 8310$ J$\cdot$kmol$^{-1}\cdot K^{-1}$.

3°. Trei surse electrice, având tensiunile electromotoare $E_1 = 1$ V, $E_2 = 1{,}1$ V și $E_3 = 1{,}2$ V și rezistențele interne $r_1 = 2\,\Omega$, $r_2 = 3\,\Omega$ și, respectiv, $r_3 = 1\,\Omega$, sînt conectate în paralel. La bornele comune A și B ale surselor este legat un rezistor cu rezistența $R = 20\,\Omega$, prin care trece un curent electric de intensitate I. Se cere: a) să se calculeze intensitatea I a curentului electric prin rezistorul R; b) dacă sursa de tensiune electromotoare E_3 este scoasă din circuit, să se exprime intensitățile curenților prin celelalte două surse, respectiv prin rezistorul R, în funcție de E_1, E_2, r_1, r_2 și R și să se calculeze aceste intensități; c) tensiunea electrică pe care o va arăta un voltmetru conectat între bornele A și B, în condițiile punctului precedent, dacă rezistența internă a voltmetrului este $R_v = 2$ kΩ.

4°. Să se stabilească: a) expresiile generale ale vitezelor a două particule după ciocnirea perfect elastică, unidimensională a acestora; b) expresia variației densității corpurilor cu temperatura; c) expresia conductivității electrice a unui semiconductor.

5°. Să se enunțe, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) principiile mecanicii newtoniene; b) principiul al doilea al termodinamicii; c) legea lui Coulomb a electrostaticii.

XXXII.1°. Un corp cu masa $m = 0{,}02$ kg oscilează conform ecuației $y = 0{,}5 \sin 2\pi\left(2{,}5\,t + \frac{1}{48}\right)$ m. Să se determine: a) momentele la care elongația este egală cu jumătate din amplitudine; b) energia cinetică și potențială a oscilatorului în aceste momente; c) dacă oscilatorul dă naștere unor unde care se propagă într-un mediu elastic cu viteza de fază $v_f = 340$ m $\cdot$ s^{-1}, să se găsească defazajul dintre oscilațiile a două puncte situate pe aceeași dreaptă, la distanțele $x_1 = 2$ m și $x_2 = 70$ m de oscilatorul sursă.

2°. O cantitate $\nu = 0{,}02$ kmol neon parcurge un ciclu format din destinderea izobară $1 \to 2$, izocora $2 \to 3$, comprimarea izobară $3 \to 4$ și izocora $4 \to 1$, astfel încît temperatura T_3 în starea 3 este aceeași cu temperatura T_1 din starea 1, iar $V_3 = 3V_1$. Parametrii stării 1 fiind $p_1 = 10^5$ N $\cdot$ m^{-2} și $V_1 = 0{,}75$ m^3, să se determine: a) randamentul ciclului și să se compare cu randamentul motorului care funcționează după un ciclu Carnot reversibil între temperaturile extreme atinse în ciclul descris mai sus; b) variația energiei interne a gazului în procesul $1 \to 2$; c) variația vitezei pătratice medii a moleculelor gazului între temperaturile extreme atinse în cursul ciclului. Se dau masa molară a neonului $\mu = 20$ kg $\cdot$ kmol^{-1}, constanta gazelor perfecte $R = 8310$ J $\cdot$ kmol$^{-1}\cdot$ K^{-1} și $C_V = (3/2)\,R$.

3°. Circuitul din schema alăturată (figura F.B. 9) cuprinde șase elemente galvanice, fiecare cu tensiunea electromotoare $E_1 = 2$ V și rezistența internă $r_1 = 0{,}15\,\Omega$, legate în serie, rezistoarele $R_1 = 5\,\Omega$ și $R_2 = 7\,\Omega$ și un solenoid cu lungimea $l = 0{,}2$ m, $N = 300$ spire și rezistența $R_3 = 3\,\Omega$. Să se afle: a) ten-

Scanned with OKEN Scanner

siunea la bornele bateriei în circuit deschis și în circuit închis; b) intensitățile curenților I_2 și I_3 prin R_2 și, respectiv, prin R_3, și căldura disipată în rezistorul R_2 la trecerea curentului timp de 2 min; c) inducția magnetică B pe axul solenoidului. Se dă permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}$.

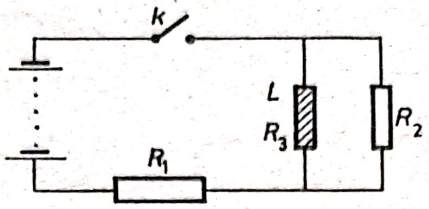


Fig. F.B.9

4°. Să se demonstreze: a) formula diferenței de presiune între două puncte ale unui lichid în echilibru; b) expresia lucrului mecanic într-o transformare adiabatică; c) expresia capacității unei baterii de condensatori legați în serie.

5°. Să se enunțe, indicînd semnificațiile fizice ale mărimilor care intervin: a) legile frecării; b) legea lui Jurin a fenomenelor capilare; c) legile electrolizei.

β. PROFILUL CHIMIE

XXXIII.1°. Un gaz ideal monoatomic ocupă volumul $V_1 = 2\ \mathrm{m^3}$ la presiunea $p_1 = 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$. Gazul este încălzit izobar și se destinde pînă la volumul $V_2 = 3\ \mathrm{m^3}$, apoi izocor pînă la presiunea $p_3 = 4 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$. Să se afle: a) variația totală a energiei interne; b) lucrul mecanic efectuat de gaz; c) căldura absorbită de gaz.

2°. O oglindă sferică concavă de aluminiu se află la temperatura de 0°C. Un punct luminos real P de pe axa principală, aflat la distanța $x_1 = 0{,}52$ m de vîrful oglinzii, are o imagine reală în P_1. Se încălzește oglinda la temperatura de 100°C, vîrful ei V rămînînd fix. Noua imagine a punctului P se deplasează în P_2. Cunoscînd coeficientul de dilatare liniară a aluminiului $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$ și distanța focală a oglinzii la 0°C, $f_0 = 0{,}5$ m, să se afle: a) căldura absorbită de oglindă, dacă capacitatea sa calorică este $C = 752\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$; b) distanța focală a oglinzii la temperatura de 100°C; c) deplasarea P_1P_2 a imaginii.

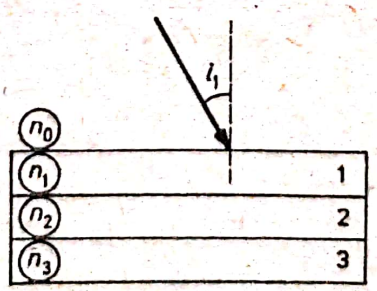


Fig. F.B.10

3°. O plăcuță, cu suprafețele plan-paralele și de grosime $h = 3$ mm, este formată din trei regiuni cu suprafețe plane și paralele cu fețele plăcuței (figura F.B.10) egale în grosime și cu indicii de refracție egali, respectiv, cu $n_1 = 3$, $n_2 = n_1/k$ și $n_3 = n_2/k$, unde k este o constantă. Mediul înconjurător are un indice de

refracție $n_0 = 2{,}5$. Aceste valori corespund unei radiații luminoase cu frecvența $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz. Să se afle: a) lungimea de undă a radiației luminoase în regiunea 1; b) care este valoarea lui k dacă unghiul $i_1 = 30°$ este unghiul minim de incidență, pe suprafața superioară a plăcuței, pentru care se produce o reflexie totală pe dioptrul care separă regiunile 2 și 3; c) valoarea drumului optic al fasciculului filiform din punctul de incidență pe plăcuță pînă în punctul de reflexie totală. Se dă viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

4°. Să se deducă: a) expresia vitezei termice a unui gaz ideal; b) expresia randamentului ciclului Carnot; c) formulelele distanțelor focale ale unei lentile subțiri.

5°. Să se scrie, indicîndu-se semnificațiile mărimilor care intervin: a) legea lui Jurin; b) dependența masei unui corp de viteza sa; c) legea absorbției luminii.

2. ÎNVĂȚĂMÎNTUL UNIVERSITAR (fizică)

XXXIV.1°. Din punctul cel mai înalt al unei sfere fixe, netede (fără frecări), de rază $R = 3$ m, alunecă liber în jos, fără viteză inițială, un mic corp. La ce înălțime de vîrful sferei corpul se va desprinde de suprafața sferei?

2°. În corpul de pompă al unei mașini termice se află un gaz ideal la temperatura $T_1 = 500$ K, ocupînd un volum $V_1 = 10^{-3}$ m^3 la presiunea $p_1 = 5 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Gazul se destinde izoterm pînă la un volum $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3, se comprimă izobar pînă în starea 3 și revine în starea inițială printr-o încălzire izocoră. Să se determine: a) parametrii din stările 1, 2 și 3; b) lucrul mecanic efectuat de mașina termică într-un ciclu; c) randamentul ciclului; d) randamentul ciclului Carnot care ar lucra între temperaturile extreme atinse de ciclul 1—2—3—1; să se compare această valoare cu cea găsită la punctul c). Se dau: constanta universală a gazelor $R = 8310$ J $\cdot$ kmol^{-1} $\cdot$ K^{-1}, căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5}{2} R$, $\ln 2 = 0{,}693$.

3°. Într-un vas de volum $V = 3$ l se află o masă $m = 64$ g de oxigen la presiunea $p = 10^6$ N $\cdot$ m^{-2}. Să se determine: a) viteza termică a moleculelor de oxigen; b) numărul de molecule de oxigen; c) energia internă a gazului datorită mișcării de translație a moleculelor. Se dau: masa molară a oxigenului $\mu = 32$ kg $\cdot$ kmol^{-1}; numărul lui Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1}.

4°. Să se formuleze, indicînd semnificația mărimilor care intervin: a) legile frecării; b) legea conservării și transformării energiei în procesele mecanice și termice (primul principiu al termodinamicii); c) ecuația termică de stare a gazului ideal.

5°. Să se demonstreze: a) conservarea energiei mecanice a punctului material într-un cîmp conservativ de forțe; b) ecuația undei plane; c) ecuația termică de stare a gazului ideal, din considerente cinetico-moleculare.

XXXV.1°. Un circuit serie format dintr-o bobină cu inductanța $L = 0{,}1$ H și un rezistor cu rezistența R este alimentat la o tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 50$ Hz. Știind că defazajul dintre intensitatea curentului în circuit și tensiunea la borne este $\varphi = 30°$, să se calculeze: a) valoarea rezistenței R a rezistorului; b) capacitatea C a unui condensator care, introdus în serie în circuit, înlătură defazajul; c) puterea activă a circuitului în cazul a), dacă tensiunea la borne are valoarea efectivă $U = 220$ V.

2°. Două lentile din sticlă, subțiri, plan-convexe, identice, L și L', avînd fiecare $C = 8$ dioptrii, sînt așezate coaxial la distanța $d = 62{,}1$ cm între ele.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze distanțele focale ale lentilelor și razele de curbură ale dioptriilor, dacă indicele de refracție al sticlei este $n = \frac{3}{2}$.

b) La 16 cm în stînga primei lentile se află un obiect luminos. Să se construiască imaginea finală dată de sistem și să se calculeze distanța l dintre prima lentilă și imaginea finală.

c) Să se calculeze măririle liniare date de fiecare lentilă, precum și mărirea liniară a acestui sistem centrat.

3°. La iluminarea unui metal cu radiații cu frecvențele $\nu_1 = 9{,}6 \cdot 10^{14}$ Hz și $\nu_2 = 6{,}72 \cdot 10^{14}$ Hz se găsește că tensiunile de stopare sînt $U_{s_1} = 1{,}96$ V și respectiv $U_{s_2} = 0{,}77$ V. Să se calculeze: a) constanta lui Planck; b) lucrul mecanic de extracție al fotoelectronului din metal (în eV). Se dă $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

4°. a) Scrieți expresia potențialului la distanța r de o sarcină punctuală.

b) Definiți: b_1) constanta rețelei de difracție; b_2) energia de legătură a nucleului.

5°. Să se deducă: a) expresia interfranjei pentru pana optică; b) formula nivelurilor de energie în cazul modelului lui Bohr pentru atomul de hidrogen.

3. ÎNVĂȚĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC

XXXVI.1°. a) Să se enunțe: a_1) legile reflexiei; a_2) proprietățile radiației laser.

b) Să se definească mărimile și unitățile fotometrice.

2°. Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor fizice care apar: a) ecuația termică de stare a gazului ideal; b) expresia indicelui de refracție al unei prisme optice, în condiții de deviație minimă; c) relația lui de Broglie.

3°. Polarizarea prin reflexie. Transversalitatea undei luminoase.

4°. Un electron cu energia cinetică de 10 eV se rotește într-un plan perpendicular pe liniile de forță ale unui cîmp magnetic cu inducția magnetică $B = 10^{-4}$ T. Să se afle: a) diferența de potențial, U, sub care a fost accelerat electronul; b) raza r a traiectoriei electronului; c) frecvența și perioada de mișcare ale electronului. Se dau masa electronului $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg și sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

5°. Pentru alimentarea cu oxigen a unui bolnav, un medic are la dispoziție o butelie cu volumul constant de $4 \cdot 10^{-3}$ m^3, care conține oxigen la presiunea de $3 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^{-2} și la temperatura de 27°C. Un dispozitiv special permite ca alimentarea cu oxigen să se facă numai la presiunea de $1{,}2 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2} și la temperatura de 27°C. Supapa dispozitivului se închide cînd presiunea oxigenului din butelie devine $1{,}2 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Se cere să se afle: a) masa inițială a oxigenului; b) timpul cît poate fi alimentat bolnavul dacă debitul volumic este de 0,1 l $\cdot$ min^{-1}; c) masa oxigenului folosit. Se dau densitatea oxigenului în condiții normale, $\rho_0 = 1{,}43$ kg $\cdot$ m^{-3}, presiunea normală $p_0 = 10^5$ N $\cdot$ m^{-2} și temperatura normală $T_0 = 273$ K.

XXXVII.1°. a) Să se enunțe legea Gay-Lussac.

b) Să se scrie, indicînd semnificația mărimilor care apar: b_1) condițiile de maxim și, respectiv, de minim în experimentul Young; b_2) expresia razei traiectoriei unui ion care se mișcă perpendicular pe un cîmp magnetic constant și uniform.

2°. Să se definească: a) molul și numărul lui Avogadro; b) dispersia luminii; c) tranziția cuantică și timpul mediu de viață al unei stări excitate.

3°. Experiențele lui Rutherford.

4°. Pe verticala dusă în centrul unei mese de operație, de formă dreptunghiulară, cu laturile de 2 m și respectiv 1 m, se află o sursă de lumină punctiformă și mobilă cu fluxul luminos total de 4000 lm, distribuția luminoasă a sursei fiind uniformă. Se cere: a) înălțimea sursei de lumină pentru ca iluminarea în centrul mesei

Scanned with OKEN Scanner

de operație să fie de $1000/\pi$ lx; b) valorile iluminării în colțurile mesei de operație; c) fluxul luminos prin pupila ochiului medicului, dacă aceasta privește sursa de lumină de la distanța de 2 m, diametrul pupilei fiind de 4 mm.

5°. Randamentul unui motor termic ideal, care funcționează pe baza unui ciclu Carnot cu temperatura sursei reci de 7°C, este de 40%. Se cere să se afle: a) cantitatea de căldură cedată sursei reci, dacă motorul primește cantitatea de căldură de 1200 J de la sursa caldă; b) lucrul mecanic efectuat de motor în contact cu sursa caldă, presupunînd că substanța de lucru este un gaz ideal; c) cu cîte grade trebuie crescută temperatura sursei calde pentru ca randamentul să devină 50%.

4. ÎNVĂȚĂMÎNTUL ECONOMIC

XXXVIII.1°. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală coboară liber un corp cu masa $m = 3$ kg. Cunoscînd coeficientul de frecare dintre corp și plan $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, să se calculeze: a) accelerația corpului; b) variația energiei cinetice a corpului în mișcare pe distanța $l = 2$ m pe planul înclinat; c) valoarea unui alt coeficient de frecare pentru care corpul ar sta în echilibru pe plan. Se va lua accelerația gravitațională $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2°. Un ampermetru, avînd rezistența interioară $R_i = 1\ \Omega$, poate măsura curenți pînă la valoarea $I_1 = 3$ A. Să se calculeze: a) rezistența unui șunt care va permite ampermetrului să măsoare curenți pînă la valoarea maximă $I_2 = 30$ A; b) rezistența echivalentă a ampermetrului cu șunt; c) energia electrică disipată pe șunt în timpul $t = 2$ min, la valoarea maximă a curentului.

3°. Să se trateze subiectele: a) legea lui Bernoulli; b) principiul lui Huygens; c) fluxul magnetic.

4°. Să se scrie, indicînd semnificațiile și unitățile de măsură pentru mărimile fizice care intervin: a) expresia perioadei pendulului gravitațional; b) expresia masei de substanță separată dintr-un electrolit prin electroliză; c) formula conductivității electrice a unui semiconductor cu impurități.

XXXIX.1°. Asupra unui corp care se deplasează pe o suprafață orizontală, fără frecare, cu viteza $v_0 = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ începe să acționeze o forță $F = 10$ N, orientată pe aceeași direcție și în același sens cu viteza v_0. După timpul $t = 10$ s din momentul aplicării forței F, energia cinetică a corpului devine $E_c = 1$ kJ. Să se calculeze: a) masa corpului; b) spațiul parcurs de corp în timpul t; c) lucrul mecanic efectuat de forță în timpul t și variația impulsului corpului în același interval de timp.

2°. Un circuit serie de curent alternativ este format dintr-o bobină cu inductanța $L = 10^{-4}$ H, o rezistență $R = 15\ \Omega$ și un condensator de capacitate $C = 10^{-6}$ F. Să se calculeze: a) pulsația de rezonanță; b) reactanța capacitivă la rezonanță; c) defazajul dintre curent și tensiune la bornele circuitului, pentru o frecvență egală cu $\frac{1}{\pi} \cdot 10^5$ Hz.

3°. Să se trateze subiectele: a) accelerația centripetă; b) legea lui Hooke; c) măsurarea directă a sarcinii electrice elementare.

4°. Să se scrie, indicînd unitățile de măsură și semnificația mărimilor fizice care intervin: a) expresia momentului cinetic al punctului material; b) dependența rezistivității electrice de temperatură; c) expresia inducției magnetice în interiorul unui solenoid.

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

I.1°. a) În general, ecuația oscilației unui punct material are forma:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

Atunci se poate scrie:

$$5\sqrt{3}\cdot 10^{-2} \sin \omega t - 5\cdot 10^{-2} \cos \omega t = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi.$$

Această relație ne conduce la:

$$A \cos \varphi = 5\sqrt{3}\cdot 10^{-2},$$
$$A \sin \varphi = -5\cdot 10^{-2}.$$

Din ultimele două relații rezultă $A = 10^{-1}$ m și $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ rad. Conform (1) avem $x = 10^{-1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = 10^{-1} \sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Viteza maximă este $v_{max} = \omega A = 10 \cdot 10^{-1} = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Deoarece $v = v_{max} \cos(\omega t + \varphi)$, atunci $v = 1 \cos\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$ și $v = v_{max} = 1$ pentru $\cos\left(10t - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, adică $10t - \frac{\pi}{6} = 0$, de unde rezultă $t = \frac{\pi}{60} \cong 0{,}052$ s.

c) Accelerația punctului material este $a = -\omega^2 x = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$, de unde $a_{max} = \omega^2 A = 10^2 \cdot 10^{-1} = 10 \text{ m}\cdot s^{-2}$, deci $F_{max} = m \cdot a_{max} = 5\cdot 10^{-3}\cdot 10 = 5\cdot 10^{-2}$ N.

Forța maximă se mai poate calcula și din expresia $F_{max} = KA = m\omega^2 A = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-2}$ N.

2°. a) Pentru izoterma AB, avem $p_B V_B = p_A V_A$, de unde $p_B = p_A \frac{V_A}{V_B} = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{V_0}{2{,}71828 V_0} = 0{,}3726 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. În cazul transformării izobare BC avem $p_C = p_B$ și $V_C = V_0$, deci $\frac{T_C}{T_0} = \frac{p_C}{p_0}$, de unde $T_C = T_0 \frac{p_B}{p_0} = 273{,}15 \cdot \frac{0{,}3726 \cdot 10^5}{1{,}013 \cdot 10^5} = 100{,}48$ K.

b) Lucrul mecanic, pentru transformarea izotermă AB, este $L_{AB} = RT_0 \ln \frac{V_B}{V_0} = 8{,}31 \cdot 273{,}15 \ln \frac{2{,}71828\, V_0}{V_0} = 2269{,}87$ J; pentru transformarea izobară BC, $L_{BC} = R \cdot \Delta T = 8{,}31(100{,}48 - 273{,}15) = -1434$ J, iar pentru transformarea

izocoră CA, $L_{CA} = 0$. Pentru transformarea izobară BC, lucrul mecanic se poate calcula și din $L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = 0{,}3726 \cdot 10^5 V_0(1 - 2{,}71828) = -0{,}64 \cdot 10^5 \cdot \frac{RT_0}{p_0} =$ $= -0{,}64 \cdot 10^5 \cdot \frac{8{,}31 \cdot 273{,}15}{1{,}013 \cdot 10^5} = -1434$ J. Lucrul mecanic efectuat în ciclu este $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 2269{,}87 - 1434 = 835{,}87$ J.

c) Pentru transformarea izotermă, avem $\Delta S_{AB} = \frac{Q}{T_0} = \frac{L_{AB}}{T_0} = \frac{2269{,}87}{273{,}15} \cong$ $\cong 8{,}31$ J $\cdot$ K^{-1}. În cazul întregului ciclu $ABCA$, rezultă $\Delta S_{ABCA} = S_A - S_A = 0$.

3°. a) Considerînd circuitul format din receptor și cele două conductoare, alimentat de la rețeaua de curent continuu ca generator, avem $UI = P + R_c I^2$. Avînd o ecuație de gradul al doilea în I, $R_c I^2 - UI + P = 0$, obținem $I_{1,2} = \frac{1}{2R}(U \pm \sqrt{U^2 - 4PR_c})$. $I_1 = I_2$, dacă $\sqrt{U^2 - 4PR_c} = 0$, de unde

$$R_c = \frac{U^2}{4P} = \frac{110^2}{4 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3} = 2{,}75\ \Omega.$$

b) $I = I_1 = I_2 = \frac{U}{2R_c} = \frac{110}{2 \cdot 2{,}75} = 20$ A. Rezistența receptorului în acest caz va fi $R = \frac{P}{I^2} = \frac{1{,}1 \cdot 10^3}{20^2} = 2{,}75\ \Omega$.

c) Puterea electrică pierdută în rezistența conductorului de legătură, în acest caz, este $P_c = R_c I^2 = 2{,}75 \cdot 20^2 = 1{,}1$ kW, sau $P_c = R_c I^2 = UI - P =$ $= 110 \cdot 20 - 1100 = 1{,}1$ kW.

4°. a) Numărul lui Avogadro este numărul de molecule dintr-un kilomol de substanță, $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}$. Unitatea atomică de masă, u, fiind a 12-a parte din masa atomică a izotopului $^{12}_{6}C$, 1 u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg, masa m a unei substanțe este $m = M$ u, M fiind masa moleculară relativă a aceleași substanțe. Atunci $N_A = \frac{M}{m} = \frac{M}{M\,\text{u}} = \frac{1}{\text{u}}$, deci numărul lui Avogadro este același, indiferent de natura substanței.

b) Energia cinetică medie a unei molecule de gaz este $\widetilde{E}_c = \frac{1}{2} m\widetilde{v^2}$, unde m este masa moleculei, iar $\widetilde{v^2}$ este viteza pătratică medie a acesteia. Prin definiție, energia internă a unui sistem fizic de N molecule este $U = N\widetilde{E}_c$. Din expresia presiunii gazului ideal, $p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\widetilde{E}_c$, avem $pV = \frac{2}{3} N\widetilde{E}_c$ și $U = \frac{3}{2} pV =$ $= \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2}\frac{N}{N_A} RT = N\frac{3}{2}\frac{R}{N_A} T = N\frac{3}{2} k_B T$, unde R este constanta generală a gazului perfect, N_A numărul lui Avogadro, k_B constanta lui Boltzmann, iar T temperatura gazului. Comparînd pe $U = N\widetilde{E}_c$ cu $U = N\frac{3}{2} k_B T$, se obține pentru energia cinetică medie a unei molecule de gaz $\widetilde{E}_c = \frac{3}{2} k_B T$.

c) Dacă un sistem fizic este izolat, sau dacă rezultanta forțelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă. Pentru un sistem fizic de n puncte materiale, impulsul total este $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ și legea de conservare a impulsului se exprimă prin $(\vec{P})_t = (\vec{P})_{t_0}$, adică impulsul total al sistemului

Scanned with OKEN Scanner

la un moment oarecare t este egal cu impulsul total al sistemului la momentul inițial t_0.

5°. a) Ori de cîte ori un corp de greutate G alunecă peste alt corp, în planul de contact apar forțe de frecare conținute în acest plan și orientate în sensul opus vitezei relative a corpului considerat, față de celălalt corp.

Forța de frecare de alunecare este proporțională cu forța de apăsare normală, N, exercitată pe suprafața de contact: $F_f = \mu N$, μ fiind coeficientul de frecare de alunecare.

Forța de frecare de rostogolire este forța care se opune deplasării unui corp care se rostogolește peste altul.

b) Prima lege (teoremă) a lui Kirchhoff: „Suma algebrică a intensităților curenților electrici ai laturilor care se întîlnesc într-un nod este nulă", adică:

$$\sum_{l=1}^{n_k} I_l = 0 \quad (K = 1, 2, \ldots, N),$$

n_k fiind numărul de laturi care se întîlnesc în nodul K. Dacă o rețea conține N noduri, din prima lege (teoremă) a lui Kirchhoff rezultă $(N - 1)$ ecuații independente.

A doua lege (teoremă) a lui Kirchhoff aplicată ochiului o are următorul enunț: „Suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor, în lungul unui circuit, este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune din laturile circuitului", adică:

$$\sum_{l=1}^{n_o} E_l = \sum_{l=1}^{n_o} I_l R_l \quad (o = 1, 2, \ldots),$$

E_l fiind tensiunea electromotoare a sursei din latura l, I_l intensitatea curentului electric prin latura l, iar R_l rezistența rezistoarelor din latura l; laturile ochiului o sînt considerate numerotate în continuare în lungul ochiului, conform unui sens arbitrar ales de parcurgere a ochiului. Numărul de ochiuri independente este $o = l - N + 1$, l fiind numărul de laturi ale rețelei, iar N numărul de noduri.

c) Dacă o particulă purtătoare a unei sarcini electrice q pătrunde cu viteza $\vec{v}$ într-o regiune a spațiului în care își exercită acțiunea un cîmp electric de intensitate $\vec{E}$ și un cîmp magnetic de inducție magnetică $\vec{B}$, atunci asupra particulei acționează o forță $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$, numită forță Lorentz.

II.1°. a) Din expresiile pentru y_A și y_B avem $\omega = 2520\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}. Atunci $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2520\pi} = 7{,}9365 \cdot 10^{-4}$ s și $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1260$ Hz. b) Viteza undei longitudinale prin bară este $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{6\,858\,432 \cdot 10^4}{2700}} = 5040$ m $\cdot$ s^{-1}. c) Din expresiile $y_1 = 0{,}01 \cdot \sin\left(2520\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ și $y_2 = 0{,}02 \cdot \sin\left(2520\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$, avem $y_1 = A_1 \sin \omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right) = 0{,}01 \cdot \sin 2520\pi\left(t - \frac{x_1}{5040}\right) = 0{,}01 \cdot \sin\left(250\pi t - 2520\pi \frac{x_1}{5040}\right) =$ $= 0{,}1 \cdot \sin\left(250\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$, deci $2520\pi \frac{x_1}{5040} = \frac{\pi}{3}$ și $x_1 = \frac{2}{3}$ m, iar din expresia lui $y_2 = A_2 \sin \omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right)$ rezultă $2520\pi \frac{x_2}{5040} = \frac{\pi}{6}$, deci $x_2 = \frac{1}{3}$. Prin urmare $l = x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ m.

Scanned with OKEN Scanner

2°. a) Din ecuația de stare $pV = \frac{m}{M}RT$, se obține $T = \frac{pVM}{mR} = \frac{1{,}5\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 32}{16\cdot 10^{-3}\cdot 8310} \cong 72{,}3$ K;

b) din expresia energiei cinetice medii $\widetilde{E}_c = \frac{1}{2}m\widetilde{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$, rezultă $\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A\cdot m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}5\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^{-3}}{16\cdot 10^{-3}}} = 237{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; relația $\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$ conduce la $N = \frac{m}{M}N_A = \frac{16\cdot 10^{-3}}{32}\cdot 6\cdot 10^{26} = 3\cdot 10^{23}$ molecule;

c) la presiune constantă $\frac{V}{T} = \frac{V_1}{T_1}$, de unde rezultă $T_1 = \frac{V_1}{V}T = 2\cdot 72{,}3 = 144{,}6$ K.

3°. a) În regim nominal, rezistența becului este $R = \frac{U_0^2}{P} = \frac{220^2}{60} = 806{,}7\ \Omega$;

b) $\frac{U-U_0}{R_s} = \frac{U_0}{R}$ conduce la $R_s = R\frac{U-U_0}{U_0} = 806{,}7\cdot\frac{380-220}{220} = 586{,}7\ \Omega$;

c) $I_0 = nI$, conduce la $n = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ și $R_p = \frac{r}{n-1} = \frac{1{,}8}{10-1} = 0{,}2\ \Omega$.

4°. a) În cazul urcării unui corp aruncat de jos în sus, timpul de urcare este dat de expresia $t_u = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2g}\frac{2}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_c$, unde v_0 este viteza inițială a corpului, h înălțimea la care ajunge corpul, g accelerația gravitației, iar t_c timpul de coborîre. Înălțimea maximă la care ajunge corpul este: $h = v_0t_u - \frac{1}{2}gt_u^2 = \frac{v_0^2}{2g}$;

b) $T\ [\mathrm{K}] = \frac{1}{\alpha} + t[^\circ\mathrm{C}] = 273{,}15 + t[^\circ\mathrm{C}]$, unde T este temperatura măsurată de la zero absolut (temperatura absolută), iar t este temperatura în grade Celsius;

c) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, unde R este rezistența rezistorului, L inductanța bobinei, C capacitatea condensatorului și $\omega = 2\pi\nu$, ν fiind frecvența curentului alternativ.

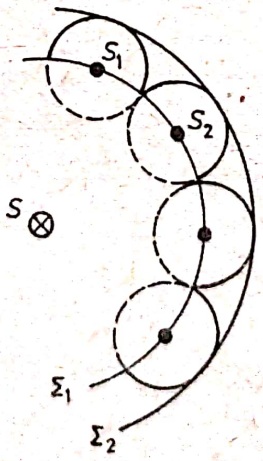


Fig. F.B.11

5°. a) Principiul lui Huygens: „Orice punct de pe o suprafață de undă este centrul (sursa) unei noi unde elementare, deci înfășurătoarea tuturor undelor elementare va fi o suprafață de undă într-un moment ulterior“ (figura F.B.11). În

figură — punctat — se reprezintă unde elementare inverse (regresive), care nu se iau în considerare. Ulterior, principiul lui Huygens a fost completat de Fresnel: „Excitația luminoasă într-un punct oarecare poate fi considerată ca rezultat al interferenței tuturor undelor elementare emise de o suprafață de undă" (principiul Huygens-Fresnel).

b) Primul principiu al termodinamicii exprimă, de fapt, conservarea energiei pentru o transformare oarecare a sistemului: $\Delta U = U_2 - U_1 = L_{1\to 2} + Q_{1\to 2}$, adică variația energiei unui sistem datorită trecerii dintr-o stare în alta, $U_2 - U_1$, este egală cu suma dintre căldura $Q_{1\to 2}$ și lucrul mecanic $L_{1\to 2}$ prin intermediul cărora sistemul schimbă energie cu exteriorul în cursul transformării. În relația de mai sus $Q_{1\to 2} > 0$ dacă sistemul cedează căldură, $Q_{1\to 2} < 0$ dacă sistemul primește căldură; $L_{1\to 2} > 0$ dacă lucrul mecanic este efectuat din exterior asupra sistemului, $L_{1\to 2} < 0$ dacă sistemul efectuează lucru mecanic asupra corpurilor exterioare. ΔU nu depinde de drum (adică, de modul de trecere din stare inițială în starea finală), dar $L_{1\to 2}$ și $Q_{1\to 2}$ depind de drum. Datorită acestui fapt U este o mărime de stare, iar L și Q sînt mărimi de proces.

c) Legea lui Coulomb ne arată că existența interacțiunilor sarcinilor electrice se manifestă prin acțiuni mecanice. Astfel, două corpuri punctiforme încărcate cu sarcinile electrice q_1 și q_2 interacționează reciproc (se atrag sau se resping) cu o forță F, a cărei valoare absolută este proporțională cu produsul sarcinilor electrice și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele:

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

unde $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ pentru vid ($\varepsilon_0 = 8{,}856 \cdot 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1} este permitivitatea absolută a vidului), iar $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ pentru un mediu oarecare ($\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, ε fiind permitivitatea electrică absolută a mediului, iar ε_r este permitivitatea electrică relativă a mediului).

Direcția forței se află pe linia care unește cele două corpuri punctiforme. Într-un mediu de permitivitate electrică absolută ε expresia forței coulombiene este:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \cdot \vec{r},$$

unde $\frac{\vec{r}}{r}$ reprezintă versorul unitar corespunzător dreptei care unește cele două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcinile electrice q_1 și, respectiv, q_2.

III.1°. a) Ecuația mișcării oscilatorii este $y = A \sin(\omega_0 t - \varphi) = 2 \cdot 10^{-2} \sin(\omega_0 t - \varphi)$, unde $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \cdot k = -\frac{F}{y_{max}} = -\frac{F}{A} = -\frac{-1{,}936}{2 \cdot 10^{-2}} = 96{,}8$ N $\cdot$ m^{-1}, iar $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{96{,}8}{0{,}5 \cdot 10^{-3}}} = 440$ rad $\cdot$ s^{-1}; b) deoarece la $t = 0$, $y = 2 \cdot 10^{-2}$ m, avem $2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-2} \sin(-\varphi)$, de unde rezultă $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Ecuația mișcării oscilatorului va fi $y = 2 \cdot 10^{-2} \sin\left(440t + \frac{\pi}{2}\right)$[m]; c) Energia totală a oscilatorului este

$$E_t = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 440^2 = 1{,}936 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2°. a) $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = m\dfrac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = 0{,}8 \cdot \dfrac{(5-4)\cdot 10^{-3}}{5 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 40\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Din relaţia $p_1 V_1 = \dfrac{m}{M} R T_1$ se obţine $p_1 = \dfrac{mR}{M}\dfrac{T_1}{V_1} = \dfrac{0{,}8 \cdot 8310 \cdot 320}{32 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}3296 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$, iar din $p_2 V_2 = \dfrac{m}{M} R T_1$ rezultă $p_2 = \dfrac{mR}{M}\dfrac{T_1}{V_2} = \dfrac{0{,}8 \cdot 8310 \cdot 320}{32 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 1{,}662 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$; b) $L = p_1 \Delta V = 1{,}3296 \cdot 10^6 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 3{,}324 \cdot 10^3\ \text{J}$; c) viteza pătratică medie este dată de expresia: $\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT_2}{M}} = \sqrt{\dfrac{3RT_1}{2M}} = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 8310 \cdot 320}{2 \cdot 32}} \cong 353\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3°. a) Capacitatea unui condensator plan este $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$, de unde rezultă

$$\varepsilon_r = \frac{dC}{\varepsilon_0 S} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot \dfrac{0{,}4}{2\pi} \cdot 10^{-6}}{\dfrac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 0{,}04} = 36;\quad \text{b) } q = C U_c = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-6}}{2\pi} \cdot 157 = 10^{-5}\ \text{C};$$

c) intensitatea curentului electric eficace este dată de expresia

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{500}{\sqrt{2}\sqrt{(350)^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot \dfrac{0{,}01}{2\pi} - \dfrac{1}{2\pi 50} \cdot \dfrac{2}{0{,}4} \cdot 10^6\right)^2}} =$$

$= 0{,}7 \cdot 10^{-2}$ A şi $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{0{,}5 - 5 \cdot 10^4}{350} \cong -143$, deci $\varphi \cong -\dfrac{\pi}{2}$.

4°. a) Mişcarea uniformă circulară este caracterizată prin următoarele mărimi:

— Perioada T a mişcării circulare uniforme, care este intervalul de timp în care mobilul parcurge circumferinţa cercului, $[T] = \text{s}$.

— Frecvenţa de rotaţie, ν, care reprezintă numărul de rotaţii efectuate în unitatea de timp (1 s). Între perioadă şi frecvenţa de rotaţie există relaţia $\nu T = 1$, $[\nu] = \text{Hz}$.

— Viteza unghiulară, care reprezintă unghiul la centru descris de raza vectoare în unitatea de timp, $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$.

— Viteza liniară, care reprezintă lungimea arcului $\Delta S = S - S_0$ parcurs în unitatea de timp, $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = R\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$.

Deoarece în timpul unei perioade T mobilul descrie circumferinţa cu viteza constantă v, avem $vT = 2\pi R$. Ţinînd seama de faptul că $v = \omega R$, rezultă $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

— Acceleraţia centripetă există în mişcarea circulară uniformă, deoarece $|\vec{v}| = \text{const.}$, adică $\Delta v = 0$, dar $\Delta\vec{v} \neq 0$, vectorul viteză $\vec{v}$ variind ca direcţie, deci $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Această acceleraţie este radială, orientată spre centrul cercului (de aceea se numeşte centripetă) şi este perpendiculară permanent pe traiectorie (de aceea se numeşte şi acceleraţie normală). Valoarea absolută este $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2 \dfrac{R}{T^2}$. Vectorial avem $\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}$ ($\vec{a}_n$ variază permanent ca direcţie, odată cu raza vectoare $\vec{r}$).

Scanned with OKEN Scanner

b) Ecuaţia fundamentală a termodinamicii se exprimă prin

$$U_2 - U_1 = L_{1\to 2} + (S_2 - S_1)T,$$

$U_2 - U_1$ fiind variaţia energiei interne în cursul transformării sistemului; $L_{1\to 2}$ este lucrul mecanic prin intermediul căruia se schimbă energie cu exteriorul în decursul transformării, $S_2 - S_1$ este variaţia entropiei în decursul transformării, iar T este temperatura.

c) Forţa electromagnetică, F, reprezintă forţa care se exercită asupra unui conductor, de lungime l, prin care trece un curent electric de intensitate I, conductorul aflîndu-se într-un cîmp magnetic de inducţie B. Expresia valorii absolute a acesteia este $F = BIl$. Dacă $\vec{u}_l$ este versorul direcţiei dată de lungimea l a conductorului, expresia vectorială a forţei electromagnetice este $\vec{F} = Il\vec{u}_l \times \vec{B}$.

Considerînd doi conductori paraleli, aflaţi la distanţa d între ei, ambii fiind de lungime l, printr-un conductor trecînd un curent electric de intensitate I_1, iar prin celălalt trecînd un curent electric de intensitate I_2, atunci

$$F = F_{12} = F_{21} = \mu_0\mu_r \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

5°. a) Legile dinamicii sînt următoarele:

— Principiul inerţiei: „Un punct material îşi menţine starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atîta timp cît asupra sa nu acţionează alte corpuri care să-i schimbe starea respectivă".

— Transformările lui Galileo Galilei: „Legătura dintre coordonatele $\vec{r}$ şi t ale unui eveniment, măsurate în sistemul inerţial de referinţă S, şi coordonatele $\vec{r}'$ şi $\vec{t}'$ ale aceluiaşi eveniment, măsurate în sistemul inerţial de referinţă S', acesta fiind în mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $\vec{v}$ faţă de S, deci $\vec{v} \parallel Ox$ şi $Ox \parallel O'x'$, iar la momentul $t = 0$ originea O a lui S coincide cu originea O' a lui S', este dată de transformările lui Galilei:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t',$$

$$t = t'$$

şi, invers,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t,$$

$$t' = t."$$

Aceste transformări asigură principiul relativităţii mecanice (principiul relativităţii al lui Galilei): „Legile mecanicii sînt aceleaşi în toate sistemele inerţiale de referinţă".

— Principiul fundamental al dinamicii (legea a doua a lui Newton): „Forţa $\vec{F}$ aplicată unui corp de masă m îi imprimă acestuia o acceleraţie $\vec{a}$, relaţia dintre $\vec{F}$, m şi $\vec{a}$ fiind $\vec{F} = m\vec{a}$".

— Principiul acţiunilor reciproce: „Dacă un corp acţionează asupra altuia cu o forţă, numită acţiune, atunci cel de-al doilea corp acţionează asupra primului cu o forţă egală în modul şi opusă ca sens, numită reacţiunea, adică $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$".

Scanned with OKEN Scanner

— Principiul suprapunerii forțelor: „Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale".

b) Experiența arată că pentru încălzirea unui corp de la temperatura T_1 la temperatura T_2 este necesară o căldură proporțională cu masa m a corpului, cu diferența de temperatură $T_2 - T_1$ și depinde de natura corpului, adică

$$Q = mc(T_2 - T_1) = mc(t_2 - t_1),$$

c depinzînd de natura corpului și purtînd numele de căldură specifică a corpului respectiv. Dacă $m = 1$ kg, $T_2 - T_1 = 1\ K = 1°C$, atunci $c = Q$. Deci căldura specifică a unei substanțe este o mărime fizică numeric egală cu căldura necesară pentru a ridica cu 1°C (sau 1K) temperatura unității de masă din substanța respectivă". Căldura specifică se măsoară în $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ sau $kcal \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

c) În curent alternativ monofazat avem:

— puterea activă $P = U_{ef}I_{ef} \cos \varphi = UI \cos \varphi$, puterea reactivă $P_r = U_{ef}I_{ef} \sin \varphi = UI \sin \varphi$, puterea aparentă $P_a = U_{ef}I_{ef} = UI$, între care există relația $P_a^2 = P^2 + P_r^2$; $I = I_{ef}$ este intensitatea efectivă a curentului alternativ, $U = U_{ef}$ este tensiunea efectivă, iar $\cos \varphi$ este factorul de putere (φ fiind defazajul dintre U și I).

IV.1°. a) Pentru transformarea izocoră $Q = C_V(T_A - T_0)$, de unde rezultă $T_A = \frac{Q}{C_V} + T_0 = \frac{2493}{\frac{5}{2} \cdot 8{,}31} + 300 \cong 420$ K; pentru transformarea izobară $Q = C_p(T_B - T_0)$, obținîndu-se $T_B = \frac{Q}{C_p} + T_0 = \frac{2493}{\frac{7}{2} \cdot 8{,}31} + 300 = 385{,}7$ K; pentru transformarea izotermă $T_C = T_0 = 300$ K.

b) $L_{O \to A} = 0$ (avînd de-a face cu o transformare izocoră), $L_{O \to B} = p \cdot \Delta V = R \cdot \Delta T = 8{,}31 \cdot (385{,}7 - 300) = 712{,}17$ J, $L_{O \to C} = Q = 2493$ J.

c) Variația de entropie în transformarea izotermă este

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{2493}{300} = 8{,}31\ J \cdot K^{-1}.$$

2°. a) $i = \lambda_1 \frac{D}{a}$. Primul maxim pentru λ_2 este la $x = \lambda_2 \frac{D}{a}$. Eliminînd pe $\frac{D}{a}$ din cele două relații, avem $\frac{i}{\lambda_1} = \frac{x}{\lambda_2}$, de unde $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{x}{i} = 500 \cdot \frac{1{,}2}{1} = 600$ nm;

b) în același loc x se formează maximul de ordinul k pentru λ_1 și de ordinul $k - 1$ pentru λ_2. Astfel, $x = k\lambda_1 \frac{D}{a} = (k-1)\lambda_2 \frac{D}{a}$, de unde rezultă $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{600}{600 - 500} = 6$ și $x = ki = 6 \cdot 1 = 6$ mm; c) $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2} = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{600 - 500}{600 \cdot 500} \cdot 10^9 = 10^{14}$ Hz.

3°. a) $W = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 3{,}96 \cdot 10^{-19}$ J, $p = \frac{W}{c} = \frac{4 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \cong 1{,}33 \cdot 10^{-27}$ kg · m · s^{-1}; b) $n = \frac{\eta P t}{h\nu} = \frac{10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 1}{4 \cdot 10^{-19}} = 2{,}5 \cdot 10^{18}$ fotoni · s^{-1};

c) $P_r = \frac{1}{4\pi r^2} n \cdot p = \frac{2{,}5 \cdot 10^{18} \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-27}}{16\pi} \cong 6{,}62 \cdot 10^{-11}$ N · m^{-2}.

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) În cazul unei transformări izobare din starea 1 în starea 2, variația energiei interne, $U_2 - U_1$, este dată de expresia:

$$U_2 - U_1 = C_p(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1),$$

C_p fiind capacitatea calorică la presiune constantă, T temperatura, V volumul și p presiunea. În cazul gazului ideal $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

b) Experiența arată că în cazul transformării lucrului mecanic în căldură, avem $L \rightleftarrows Q$, adică pentru o transformare $L \to Q$ se poate obține $Q = L$ (cu condiția să existe echivalența cantităților respective). În cazul transformării căldurii în lucrul mecanic există limitări: dacă $Q \to L$, totdeauna $L < Q$. Rezultă că se poate vorbi de o transformare integrală a lucrului mecanic în căldură, însă nu se poate vorbi de o transformare integrală (fără compensație) a căldurii în lucru mecanic. Mai precis, există posibilitatea transformării căldurii în lucru mecanic, dar pentru aceasta sînt necesare cel puțin două surse de căldură aflate la temperaturi diferite.

c) Legile reflexiei și refracției luminii sînt:

— Unda incidentă (fasciculul incident), normala la suprafață în punctul de incidență și unda reflectată (fasciculul reflectat) se găsesc în același plan.

— Unghiul de reflexie $\hat{r}$ (figura F.B.12) este, numeric, egal cu unghiul de incidență $\hat{i}$.

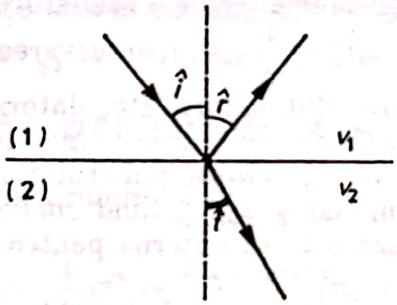


Fig. F.B.12

$-\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{t}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{v_1}{c}}{\frac{v_2}{c}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{21}$, $\hat{i}$ fiind unghiul de incidență, $\hat{t}$ unghiul de refracție (figura F.B.12), v_1 viteza luminii în mediul 1, v_2 viteza luminii în mediul 2, c viteza luminii în vid, n_1 indicele absolut de refracție al mediului 1, n_2 indicele absolut de refracție al mediului 2, iar n_{12} indicele relativ de refracție al mediului al doilea față de primul.

5°. a) Randamentul unei mașini termice ideale este $n = \frac{\Delta L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, ΔL fiind lucrul mecanic efectuat într-un ciclu, Q_1 energia consumată prin intermediul căldurii, T_1 temperatura sursei calde și T_2 temperatura sursei reci; b) acest subiect nu se mai află în actuala programă analitică din liceе; c) acest subiect a fost tratat la I.4°.b.

V.1°. O mișcare oscilatorie apare sub acțiunea unei forțe elastice. Mișcarea unui corp sau a unui sistem material, care se repetă la intervale de timp egale și care are loc simetric față de o poziție de repaus, se numește mișcare oscilatorie sau

Scanned with OKEN Scanner

oscilație. Un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma $F = -kx$ se numește oscilator liniar armonic. Mișcarea sa de oscilație se numește mișcare oscilatorie armonică.

Orice punct material care se mișcă rectiliniu, față de un *SIR**, după o lege de mișcare de forma $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, descrie o mișcare oscilatorie armonică. Viteza mișcării oscilatorii armonice este $v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$, iar accelerația acesteia $a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$.

Argumentul $\varphi = \omega t + \varphi_0$, al funcției $x = A \sin \omega t$, se numește faza mișcării oscilatorii. Faza la $t = 0$ este φ_0 (faza inițială). Între frecvența ν, perioada T și pulsația sa ω există relațiile: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

În cazul oscilațiilor libere, asupra punctului material care efectuează mișcarea oscilatorie, în afara de impulsul inițial, nu mai acționează nici o forță exterioară.

Pentru pendulul elastic $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; pentru pendulul matematic $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Energia potențială a oscilatorului, datorată elasticității resortului, este $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t$, iar energia cinetică datorată mișcării punctului material atașat resortului este $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$, deoarece $k = m\omega^2$. Energia mecanică totală a oscilatorului armonic este $E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kA^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}kA^2$ (conservarea energiei mecanice).

Mișcările oscilatorii reale sînt amortizate, datorită pierderilor de energie în sistemele care efectuează mișcarea oscilatorie respectivă. Dacă forța care produce amortizarea este proporțională cu viteza punctului material, ecuația oscilațiilor amortizate este $x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$, β fiind coeficientul de amortizare. Dacă asupra oscilatorului acționează o forță externă pentru a compensa pierderile, oscilațiile se vor numi forțate.

2°. Pentru gazul ideal energia internă depinde numai de temperatura absolută, deci pentru $T = \text{const.}$ (proces izoterm) $\Delta U = 0$. Primul principiu conduce la $Q = L$ (căldura absorbită de sistem este transformată integral în lucru mecanic). În cazul procesului izoterm, $pV = \text{const.}$ este o izotermă care se reprezintă printr-o hiperbolă echilateră în coordonatele V, p, (figura F.B.13).

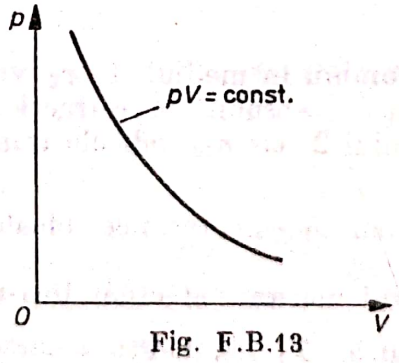


Fig. F.B.13

Lucrul mecanic într-o transformare izotermă este $L = RT \ln \frac{V_2}{V_1} \cong 2{,}3 \cdot RT \lg \frac{V_2}{V_1}$, V_1 fiind volumul inițial, V_2 volumul final și T temperatura

* Sistemul inerțial de referință.

Scanned with OKEN Scanner

absolută a gazului. Pentru o masă m de gaz perfect, vom avea $Q = L = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \cong 2{,}3 \frac{m}{\mu} RT \lg \frac{V_2}{V_1}$, μ fiind masa molară a gazului.

3°. Corpul fiind aruncat vertical cu viteza v_0, avem situaţia din figura F.B.14, $E_M = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m}{2} 2g \cdot \Delta h$, unde $\Delta h = \frac{1}{2} g(\Delta t)^2$, deci $E_M = \frac{m}{2}(v_0^2 + g^2 \cdot \Delta t^2) = \frac{1}{2}(20^2 + 10^2 \cdot 4^2) = 1000$ J.

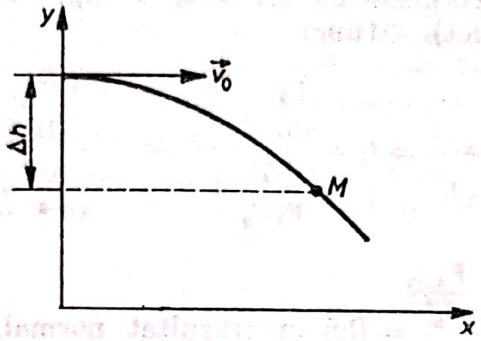


Fig. F.B.14

4°. a) Primul glonţ este tras la momentul $t + \Delta t$, iar al doilea la momentul anterior t. Deci, deoarece $y_1 = y_2$, avem $v_0(t + \Delta t) - \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$, sau $v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g\Delta t^2 - gt\Delta t = 0$, de unde rezultă $t = \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g} = \frac{2 \cdot 700 - 10 \cdot 60}{2 \cdot 10} = 40$ s. Prin urmare

$$y = y_1 = y_2 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g}\left(v_0 - \frac{1}{2} g \cdot \frac{2v_0 - g\Delta t}{2g}\right) =$$

$$= \frac{(2v_0 - g\Delta t)(2v_0 + g\Delta t)}{8g} = \frac{(2v_0)^2 - (g\Delta t)^2}{8g} = \frac{(2 \cdot 700)^2 - (10 \cdot 60)^2}{8 \cdot 10} = 2 \cdot 10^4 \text{ m.}$$

b) La orice înălţime $v_1 = -v_2$, deci $v_1^2 = v_0^2 - 2gy = v_0^2 - \frac{4v_0^2 - g^2\Delta t^2}{4} = \left(\frac{g\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{10 \cdot 60}{2}\right)^2 = 9 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, prin urmare $v_1 = -v_2 = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5°. a) La echilibru (cînd forţa exercitată de presiunea aerului, în cei doi cilindri, asupra pistoanelor este aceeaşi) avem $p_1 S_1 = p_2 S_2$ (1). Din legea gazelor perfecte, în cazul primului cilindru, se obţine $\frac{p_0 V_1}{T_1} = \frac{p_1 V_1'}{T_2}$ (2), V_1' fiind volumul de aer, din primul cilindru, în starea finală. În cilindrul al doilea, conform legii Boyle-Mariotte avem $p_0 V_2 = p_2 V_2'$ (3), V_2' fiind volumul de aer, din cilindrul al doilea, în starea finală. Pistoanele fiind legate printr-o bară rigidă, după încălzire ele se vor deplasa cu aceeaşi distanţă, deci $\frac{V_1' - V_1}{S_1} = \frac{V_2 - V_2'}{S_2}$ (4). Împărţind relaţia (2) la (3) şi ţinînd seama de (1), rezultă $\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$ (5).

Relaţiile (4) şi (5) ne permit să determinăm pe V_1' şi V_2':

$$V_1' = \frac{V_1S_2 + V_2S_1}{V_1T_2 + V_2T_1} \cdot \frac{V_1T_2}{S_2} = \frac{10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^2} \cdot \frac{10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ m}^3,$$

$$V_2' = \frac{V_1S_2 + V_2S_1}{V_1T_2 + V_2T_1} \cdot \frac{V_2T_1}{S_1} = \frac{10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Volumele finale sînt egale cu cele iniţiale: $F_{01} < F_{02}$. Deci la ridicarea piedicii $\Delta V_1 < 0$, dar la încălzire $\Delta V_1 > 0$.

b) Se încălzeşte întîi gazul cu $\Delta T = t_1$ şi după aceea se ridică piedica (care nu mai are nici un efect). Atunci

$$\frac{T_2V_1}{V_2T_1} = \frac{l_1}{\frac{V_1}{S_1} + \frac{V_2}{S_2} - l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{\frac{V_1}{S_1} + \frac{V_2}{S_2}}{\frac{V_2T_1}{V_1T_2} + 1} = \frac{\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}}}{\frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^2}{10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^2} + 1} = 0{,}5 \text{ m}.$$

De asemenea, $l_2 = \dfrac{\frac{V_1}{S_1} + \frac{V_2}{S_2}}{\frac{V_1T_2}{V_2T_1} + 1} = 0{,}5$ m (rezultat normal, întrucît cele două pistoane sînt legate rigid).

Variaţia entropiei are loc numai pentru gazul din primul cilindru. Astfel:

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_1V_1}{RT_1} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_0V_1}{T_1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \ln 2 =$$

$$= 1{,}7325 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

VI.1°. Forţa cu care cîmpul electric acţionează asupra electronilor dintr-un fascicul este dată de relaţia $\vec{F} = e\vec{E}$, $e \cong -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C fiind sarcina electronului. Deoarece asupra electronului acţionează această forţă, avem $m\vec{a} = e\vec{E}$, adică electronul capătă o acceleraţie $\vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$.

Fasciculul îşi păstrează caracteristicile iniţiale, fiindcă toţi electronii se mişcă la fel.

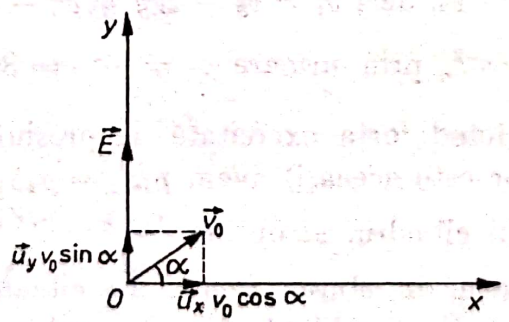


Fig. F.B.15

Dacă viteza iniţială $\vec{v}_0$ a electronilor nu este paralelă cu intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ (figura F.B.15), mişcarea electronilor este compusă dintr-o mişcare uniformă cu viteza $\vec{v}_{0_1} = \vec{u}_x v_0 \cos\alpha$ pe direcţia perpendiculară pe $\vec{E}$ şi o mişcare

uniform accelerată cu acceleraţia $\vec{a} = \frac{e}{m}\vec{E}$ pe direcţia lui $\vec{E}$ (în sens opus, deoarece $e < 0$). Astfel, avem $x = v_0 t = v_0 \cos \alpha t$ şi $y = v_0 \sin \alpha t + \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2$. Eliminînd parametrul t între cele două relaţii care ne dau pe x şi y, rezultă $y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{E}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2$. Deci traiectoria mişcării electronilor va fi o parabolă. Pentru $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$ şi $\vec{v}_0 = 0$, mişcarea are loc de-a lungul lui Oy.

2°. Construcţia geometrică a imaginilor date de lentilele subţiri se obţine cu ajutorul unor fascicule de parcurs cunoscut. Un fascicul, paralel cu axul optic al lentilei, după traversarea lentilei trece prin focar, iar un fascicul care traversează lentile, trecînd prin centrul ei optic, rămîne nedeviată. Dacă cele două fascicule, care provin din punctul A al obiectului, se intersectează după trecerea lor prin lentilă (figura F.B.16) se obţine imaginea reală A' a obiectului.

Dacă intersecţia celor două fascicule are loc pe prelungirea lor înainte de a traversa lentila, imaginea B' este virtuală (figura F.B.17).

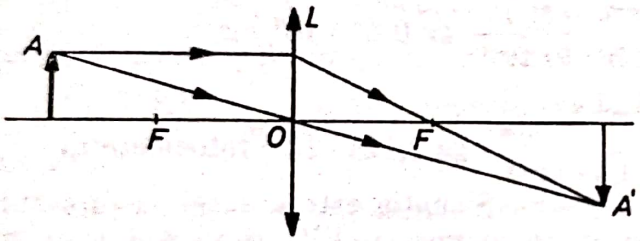


Fig. F.B.16

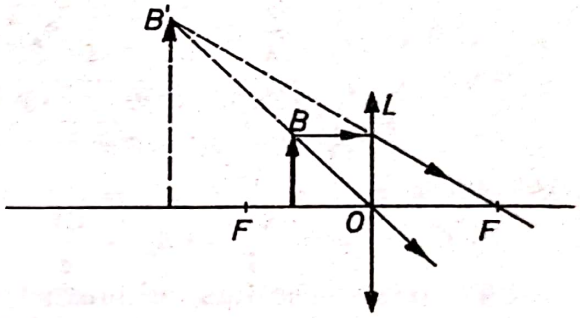


Fig. F.B.17

3°. Avem circuitul din figura F.B.18. a) Valoarea efectivă a intensităţii curentului electric este

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega c} - \omega L\right)^2}} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{96^2 + \left(\frac{10^6}{100\pi} - 100\pi \cdot 1{,}42\right)^2}} \cong 8{,}76 \cdot 10^{-2} \text{ A}.$$

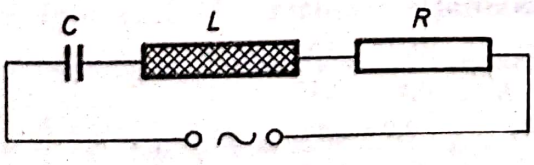


Fig. F.B.18

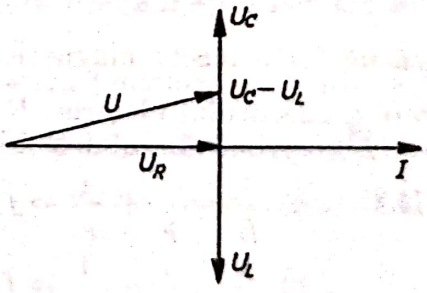


Fig. F.B.19

Din figura F.B.19, avem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C - U_L}{U_R} = \frac{\frac{1}{C\omega} - \omega L}{R} = \frac{3184 - 446}{96} = 28{,}52 \Rightarrow \varphi \cong 89°$.

b) $I_{ef\,max} = \frac{E_{ef}}{R} = \frac{240}{96} = 2{,}5$ A pentru $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, deci $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} =$

$= \frac{1}{6{,}28\sqrt{1{,}42 \cdot 10^{-6}}} \cong 133$ Hz.

c) $U_c = \frac{I}{C\omega} = \frac{E_{ef}}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} = \frac{E_{ef}}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}} = \frac{dU_c}{d\omega} =$

$= 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}42 \cdot 10^{-6}} - \frac{1}{2}\frac{96^2}{1{,}42^2}} \cong 836 \Rightarrow \nu =$

$= \frac{\omega}{2\pi} \cong \frac{836}{6{,}28} \cong 133{,}12$ Hz.

4°. a) $E_{extr.} = \frac{hc}{\lambda_p} \Rightarrow \lambda_p = \frac{hc}{E_{extr.}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}89 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6{,}576 \cdot 10^{-7}$ m $= 6576$ Å.

b) $h\nu = h\nu_p + \frac{1}{2} m_e v^2$.

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_p} + \frac{1}{2} m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \cdot \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda_p \lambda}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} \frac{(6{,}576 - 5) \cdot 10^{-7}}{6{,}576 \cdot 5 \cdot 10^{-14}}} \cong 0{,}41 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}.$$

c) $C = \frac{Q}{V} = \frac{n_e e}{V} \Rightarrow n_e = \frac{CV}{e} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 10^{-9} \cdot 300}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cong 3{,}125 \cdot 10^{11}$ fotoelectroni.

5°. a) Variația fluxului magnetic nu apare. Situația este aceeași ca în cazul conductorului liniar care se mișcă într-un cîmp magnetic. Electronii sînt puși în mișcare cu viteze tangențiale diferite, perpendiculare pe $\vec{B}$. Ca atare, ei vor fi acționați de forțe Lorentz $\vec{F_L} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, care are direcția razei discului și duce la o separare de sarcini (viteza fiind $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$), adică la apariția unui curent electric cînd se închide circuitul.

b) La schimbarea sensului de rotație ($\vec{\omega} \to -\vec{\omega}$) se schimbă sensul lui $\bar{v}$, deci se schimbă și sensul curentului electric.

c) Dispozitivul poate funcționa și ca motor electric. Curentul radial se află în cîmpul magnetic de inducție $\vec{B}$. Interacțiunea dintre curent și cîmpul magnetic este dată de forța electromagnetică $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$, $\vec{l}$ fiind orientat radial în sensul de curgere a curentului electric. $\vec{B}$ fiind perpendicular pe disc, $\vec{F}$ este tangențială. Ca atare, $\vec{F}$ imprimă discului o mișcare de rotație.

VII.1°. a) $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow f_1 = \frac{pp'}{p + p'} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}45}{0{,}9 + 0{,}45} = 0{,}3$ m;

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1'} \Rightarrow f = \frac{pp_1'}{p + p_1'} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}72}{0{,}9 \cdot 0{,}72} = 0{,}4$ m;

c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_2 = -\frac{ff_1}{f_1 - f} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}3 - 0{,}4} = -1{,}2$ m,

deci a doua lentilă este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

2°. a) $p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{p_1} = \frac{3,2}{32 \cdot 10^{-3}}\frac{8,31 \cdot 300}{10^6} = 0,2493$ m³;

b) în cazul dilatării izobare $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T}$, de unde $V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1} = 0,2493 \cdot \frac{400}{300} = 0,3324$ m³, deci $L = p_1(V_2 - V_1) = 10^6(0,3324 - 0,2493) = 8,31 \cdot 10^4$ J;

c) $Q = mc_p\Delta T = 3,2 \cdot 910(400 - 300) = 2,912 \cdot 10^5$ J.

Din primul principiu al termodinamicii, $Q = \Delta U + L$, rezultă $\Delta U = Q - L = 2,912 \cdot 10^5 - 0,831 \cdot 10^5 = 2,081 \cdot 10^5$ J.

3°. a) Procesul izocor are loc pentru $V = \text{const.}$, deci în acest proces volumul gazului nu variază, $\Delta V = 0$. Primul principiu al termodinamicii, $Q = \Delta U + L$, conduce la $Q = \Delta U$. Ținînd seama de expresia căldurii molare izocore $C_V = \frac{Q_V}{\Delta T} = \frac{\Delta U}{\Delta T}$, pentru un kilomol de gaz avem $Q = C_V\Delta T = C_V(T_2 - T_1)$.

Deoarece $C_V > 0$ pentru toate substanțele, temperatura sistemului crește, $\Delta T > 0$, cînd acesta primește căldură ($Q > 0$) și, invers, temperatura sistemului scade, $\Delta T < 0$. cînd sistemul cedează căldură ($Q < 0$).

Pentru o masă oarecare m de gaz, variația energiei interne este $\Delta U = Q = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T = mc_V\Delta T = mc_V(T_2 - T_1)$, unde μ este masa molară, iar c_V căldura specifică izocoră. Se observă că lucrul mecanic efectuat de gaz este $L = 0$.

b) $T[\text{K}] = \frac{1}{\alpha} + t[°\text{C}]$, unde $\frac{1}{\alpha} = 273,15°\text{C}$ (acest subiect a fost tratat la II.4°.b.).

c) Radiațiile electromagnetice emise sau absorbite au o structură discontinuă, fiind formate din porții discrete de energie numite cuante de energie, particula care posedă energia unei cuante purtînd numele de foton. Energia unui foton este dată de expresia $\varepsilon = h\nu = E_k - E_i$, h fiind constanta lui Planck, ν frecvența undei asociate fotonului, E_k și E_i energiile nivelurile între care au loc tranzițiile de electroni. Din teoria relativității restrînse se știe că între energia totală a unei particule și masă avem relația $\varepsilon = mc^2$. Deci din $\varepsilon = mc^2 = h\nu$ rezultă masa fotonului $m = \frac{h\nu}{c^2}$. Din relația $m_0 = m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, știind că pentru foton $v = c$, rezultă $m_0 = 0$ (pentru foton). Fotonul nu are un referențial propriu ($v = c$). Ca atare, noțiunea de masă de repaus a fotonului nu are sens. Din $\varepsilon = h\nu$ și $m = \frac{h\nu}{c^2}$ rezultă impulsul fotonului $p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, λ fiind lungimea de undă a undei asociată fotonului. În rezumat, caracteristicile fotonului sînt: energia $\varepsilon = h\nu$, masa de repaus $m_0 = 0$, masa de mișcare $m = \frac{h\nu}{c^2}$, viteza $v = c$, impulsul $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ și sarcina $q = 0$.

4°. a) Ecuația lui Einstein pentru efectul fotoelectric are forma $h\nu = E_{extr.} + \frac{1}{2}mv^2 = h\nu_p + \frac{1}{2}m_ev^2$, unde ν este frecvența undei asociate fotonului, ν_p frecvența de prag, m masa electronului (fotoelectronului) emis, iar v viteza electronului emis. Potențialul de frînare (tensiunea de tăiere) anulează intensitatea curentului

Scanned with OKEN Scanner

fotoelectric, deci compensează energia cinetică a fotoelectronilor: $eV_0 = \frac{1}{2} mv^2_{max}$, V_0 fiind potențialul de frînare. Atunci din ecuația $h\nu = h\nu_p + eV_0$ rezultă $V_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_p)$.

b) Unitatea atomică de masă s-a ales ca unitate de măsură pentru masa atomică, deoarece aceasta este o mărime foarte mică în raport cu unitatea de măsură utilizată în sistemul internațional [kg].

Unitatea atomică de masă reprezintă a 12-a parte din masa atomului de ${}^{12}_{6}C$: $1\ u = \frac{1}{12} \cdot \frac{12\ kg}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg$.

Masele atomice ale elementelor, exprimate în aceste unități, sînt foarte apropiate de un număr întreg (masa atomului de hidrogen este ≈ 1 u, cea a atomului de oxigen ≈ 16 u etc...).

Numărul întreg cel mai apropiat de masa atomică, exprimată în u, poartă numele de număr de masă și se notează cu A.

c) În cazul dezintegrării radioactive, legea de dezintegrare este $N = N_0 e^{-t/\tau}$, N fiind numărul de nuclee nedezintegrate la momentul t, N_0 numărul de nuclee nedezintegrate la momentul $t = 0$, iar τ viața medie a nucleelor. Probabilitatea de dezintegrare în unitatea de timp este $\lambda = \frac{1}{\tau}$. Ținînd seama de λ, legea de dezintegrare a nucleelor radioactive este $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Deoarece un nucleu poate rămîne în stare metastabilă un timp foarte scurt sau un timp foarte lung, se introduce timpul de înjumătățire care ne dă informații despre un număr mare de nuclee. Astfel, timpul de înjumătățire reprezintă timpul după care se dezintegrează jumătate din numărul inițial N_0 de nuclee aflate în stare metastabilă. Deci din $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ rezultă $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

5°. a) Acest subiect nu mai face parte din programa analitică pentru concurs.

b) În reacțiile nucleare se manifestă următoarele legi de conservare:

— Legea conservării energiei. În cazul relației $a + X \to Y + b$ (a fiind particula sau nucleul proiectil, X nucleul țintă, de obicei în repaus, Y nucleul rezidual și b particula sau nucleul mai ușor, rezultat din reacție), legea conservării energiei totale este $W_a + W_X = W_Y + W_b$, sau $m_{a_0}c^2 + E^a_c + m_{X_0}c^2 + E^X_c = m_{Y_0}c^2 + E^Y_c + m_{b_0}c^2 + E^b_c$, E_c fiind energiile cinetice.

Diferența dintre energiile de repaus ale particulelor în stările inițială și, respectiv, finală poartă numele de energie de reacție și se notează cu Q:

$$Q = E^b_c + E^Y_c - E^a_c - E^X_c.$$

Pentru $Q > 0$ reacția se numește exoenergetică, iar pentru $Q < 0$ reacția se numește endoenergetică.

De obicei o reacție nucleară se realizează experimental trimițînd particule sau nuclee a, accelerate, pe o țintă fixă care conține nuclee X în repaus (acest sistem de referință legat de ținta fixă poartă numele de sistemul laboratorului, SL). Energia cinetică minimă a particulei proiectil a în SL, suficientă pentru a produce o reacție nucleară la prag, este

$$E^L_a = \frac{m_{a_0} + m_{X_0}}{m_{X_0}} \cdot |Q|.$$

Scanned with OKEN Scanner

— Legea conservării impulsului (figurile F.B.20 și F.B.21):

$$p_Y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos \theta.$$

Energiile cinetice au expresiile $E_c^Y = \frac{p_Y^2}{2m_{Y_0}}$, $E_c^a = \frac{p_a^2}{2m_{a_0}}$ și $E_c^b = \frac{p_b^2}{2m_{b_0}}$, deoarece sînt mici în raport cu energiile de repaus. Introducînd aceste relații în relația care exprimă legea conservării impulsului, rezultă

$$2m_{Y_0}E_c^Y = 2m_{a_0}E_c^a + 2m_{b_0}E_c^b - 4\sqrt{m_{a_0}m_{b_0}E_c^a E_c^b} \cdot \cos \theta.$$

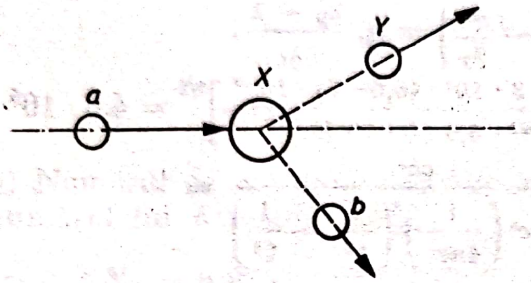


Fig. F.B.20

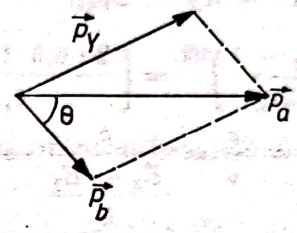


Fig. F.B.21

Ținînd seama de această relație și de faptul că în sistemul laboratorului $E_c^X = 0$, se obține relația care dă o altă metodă de măsură a energiei de reacție:

$$Q = \left(1 + \frac{m_{b_0}}{m_{Y_0}}\right)E_c^b - \left(1 - \frac{m_{a_0}}{m_{Y_0}}\right)E_c^b - \frac{2\sqrt{m_{a_0}m_{b_0}E_c^a E_c^b}}{m_{Y_0}} \cdot \cos \theta.$$

— Legea conservării sarcinii electrice. În cazul reacției

$$^{A_a}_{Z_a}a + {}^{A_X}_{Z_X}X \rightarrow {}^{A_Y}_{Z_Y}Y + {}^{A_b}_{Z_b}b,$$

legea conservării sarcinii electrice se exprimă prin $Z_a + Z_X = Z_Y + Z_b$.

— Legea conservării numărului de nucleoni, pentru aceeași reacție, se va scrie sub forma $A_a + A_X = A_Y + A_b$.

c) — Primul postulat al lui Bohr: „Stările legate ale atomului sînt stări în care atomul nu absoarbe și nu emite energie. Stările respective ale atomului se numesc stări staționare, atomul putîndu-se găsi în asemenea stări, ale căror valori ale energiilor formează un șir discret E_1, E_2, ..., E_n, un timp oricît de lung dacă nu este perturbat prin alte interacțiuni. Acest postulat explică stabilitatea nucleelor atomice.

— Al doilea postulat al lui Bohr: „Atomii absorb sau emit radiație electromagnetică numai la trecerea dintr-o stare staționară n în altă stare staționară m, radiație care are o frecvență ν_{nm} dată de relația $h\nu_{nm} = E_n - E_m$, unde $h\nu_{nm}$ este energia fotonului emis sau absorbit, iar E_n și E_m sînt energiile stărilor staționare între care are loc tranziția". Acest postulat exprimă că frecvența radiației emise de un atom este aceeași cu cea pe care o poate absorbi atomul respectiv și că frecvențele tranzițiilor atomice au valori discrete (spectrele radiațiilor emise sînt spectre de linii).

Pe baza acestor postulate și a condiției de cuantificare $rp = \frac{h}{2\pi}$ (r fiind raza orbitei pe care se află electronul, iar p impulsul acestuia) Niels Bohr a obținut expresia energiei totale a electronului într-o stare legată în modelul planetar al atomului.

Scanned with OKEN Scanner

VIII.1°. a) $p_1 = \nu \frac{RT_1}{V_1} = 1{,}67 \cdot \frac{8{,}31 \cdot 296}{5 \cdot 10^{-3}} = 8{,}216 \cdot 10^5 \ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$;

b) $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \rightarrow V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{396}{296} = 6{,}68 \cdot 10^{-3} \ \text{m}^3$;

c) $L = p_1(V_2 - V_1) = 8{,}216 \cdot 10^5 \cdot (6{,}68 - 5) \cdot 10^{-3} \cong 1{,}38 \cdot 10^3$ J.

2°. a) $E = Pt = nh\nu = nh\frac{c}{\lambda} \rightarrow n = \frac{Pt\lambda}{hc} = \frac{20 \cdot 60 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cong 3 \cdot 10^{21}$ fotoni;

b) $d = \frac{k\lambda}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 10^{-6}$ m;

c) $\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - E_{extr.} = h\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_p}\right) = h_c \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda\lambda_p}$,

$$v = \left(\frac{2hc}{m_e} \frac{\lambda_p - \lambda}{\lambda\lambda_p}\right)^{1/2} = \left[\frac{2 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot (6{,}6-5) \cdot 10^{-7}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 6{,}6 \cdot 5 \cdot 10^{-14}}\right]^{1/2} = 4{,}6 \cdot 10^5 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3°. a) $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\frac{E_2 - E_1}{h}} = \frac{ch^3}{2\pi^2 me^4 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} =$

$$= \frac{3 \cdot 10^8 \cdot (6{,}6 \cdot 10^{-34})^3}{2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \ (1{,}6 \cdot 10^{-19})^4 \ (8{,}98 \cdot 10^9)^2 \cdot 0{,}75} \cong 1{,}21 \cdot 10^{-7} \ \text{m};$$

b) $\frac{mv_2^2}{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_2^2} \rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{mr_2}\right)^{1/2}$,

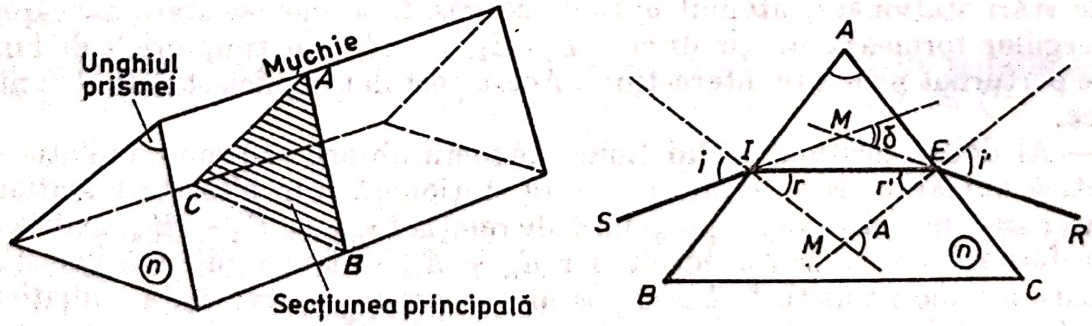
$r_2 = \frac{2^2h^2}{4\pi^2 \cdot m \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e^2}$. Din ultimele două relaţii rezultă

$$v_2 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{me^2\pi^2}{h^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi e^2}{h} =$$

$$= 8{,}98 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}14 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} \cong 1{,}093 \cdot 10^6 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

c) $N = \frac{L}{l} = \frac{v_2\tau}{2\pi r_2} = \frac{\pi^2 me^2\tau}{2h^3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 =$

$$= \frac{3{,}14^2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot (6{,}6 \cdot 10^{-34})^3} (8{,}98 \cdot 10^9)^2 = 8{,}27 \cdot 10^6 \ \text{rotaţii.}$$



a. Prisma optică b. Refracţia în prisma optică

Fig. F.B.22

4°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.4°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la VII.4°.b.

c) Prisma optică şi refracţia în prisma optică sînt date în figura F.B.22 a, b. Fasciculul SI este incident pe faţa AB a prismei şi se refractă în punctul I, apro-

Scanned with OKEN Scanner

piindu-se de normală, conform legii $\sin i = n \sin r$. Fasciculul suferă a doua refracție în punctul de emergență E, după parcurgerea materialului prismei, depărtîndu-se de normală după legea $n \sin r' = \sin i'$; $\delta = (\widehat{SI}, \widehat{ER})$ este numit unghi de deviație: $\delta = i + i' - (r + r') = i + i' - A$ (unghiul de deviație variază cu unghiul de incidență). Cînd unghiul de incidență variază continuu, unghiul de deviație variază luînd valori mai mari decît o anumită valoare minimă δ_m. Valoarea minimă δ_m se realizează în cazul mersului simetric al fasciculelor prin prismă, adică pentru condițiile $i = i'$ și $r = r'$; atunci $\delta_m = 2i - A$. Pentru indicele de refracție al prismei obținem

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{A + \delta_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

5°. a) Numărul de molecule dintr-un mol de orice substanță este același și egal cu numărul lui Avogadro, N_A:

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecule}}{\text{mol}} = 6{,}023 \cdot 10^{26} \frac{\text{molecule}}{\text{kmol}}.$$

Masa m a unei molecule va fi $m = \frac{\mu}{N_A}$, μ fiind masa molară a gazului. Numărul N de molecule se poate exprima în funcție de masa gazului, $N = \frac{M}{\mu} N_A$, unde $\frac{M}{\mu}$ este numărul de kilomoli de gaz.

b) În cazul transformării adiabatice, sistemul termodinamic nu schimbă (nu primește și nu cedează) căldură cu mediul exterior, adică, $\Delta Q = 0$. Variația entropiei într-un astfel de proces este, evident, nulă.

c) Reflexia luminii este însoțită totdeauna de refracție chiar și în cazul corpurilor opace, cînd lumina refractată este absorbită. Cînd lumina trece dintr-un mediu optic mai dens (1) într-altul mai puțin dens (2), $n_2 < n_1$ (figura F.B.23),

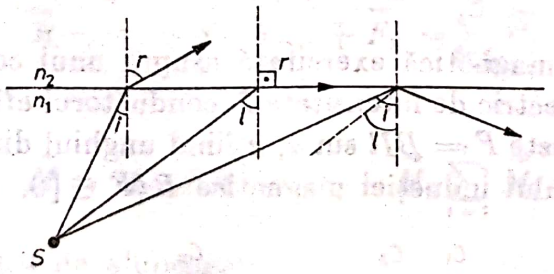


Fig. F.B.23

din „legea" refracției rezultă $\sin r > \sin i$. Se observă că, pentru o anumită valoare a unghiului de incidență $i = l$, unghiul de refracție poate atinge valoarea $r = \frac{\pi}{2}$, iar pentru $i > l$ raza refractată nu mai trece în cel de-al doilea mediu, producîndu-se fenomenul de reflexie totală a luminii. Unghiul minim de incidență l de la care are loc acest fenomen se numește unghi limită și valoarea sa se obține din relația $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, știind că pentru $i = l$ avem $r = \frac{\pi}{2}$. Deci $\sin l = \frac{n_2}{n_1}$, adică unghiul limită are o valoare bine determinată pentru o pereche de medii adiacente, el depinzînd numai de indicii de refracție ai celor două medii.

Scanned with OKEN Scanner

IX.1°. a) $W = \frac{1}{2} mv_1^2 + F_f s = \frac{1}{2} mv_1^2 + \mu mgs$,

$P_m = \frac{W}{t_1} = \frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{2} mv_1^2 + \mu mgs\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 15^2 + 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \times \right.$

$\left. \times \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10\right) = 3 \cdot 10^4 \text{ W} = 30 \text{ kW}$; s-a utilizat $s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} v_1 t$;

b) $P_{max} = F_f \cdot v_{max} = \mu mg v_{max} = 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 40 = 4 \cdot 10^4 \text{ W} = 40 \text{ kW}$;

c) $F_{tr} = \frac{P_{max}}{v} = \frac{40 \cdot 10^3}{20} = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$, $P_{max} = (F_f + ma)v \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{P_{max}}{v} - F_f}{m} = \frac{\frac{4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^1} - 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10}{2 \cdot 10^3} = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2°. a) $\eta = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_2 = \eta P_1 = 0{,}8 \cdot 625 = 500 \text{ W}$; b) $R_t = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} =$

$= 8 + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 20\,\Omega$, $P_2 = R_t I^2 \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{P_2}{R_t}} = \sqrt{\frac{500}{20}} = 5 \text{ A}$,

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 R_2 = I_3 R_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 + I_3 = 5 \\ 20 I_2 = 30 I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 3 \text{ A} \\ I_3 = 2 \text{ A} \end{cases};$$

c) $U_1 = R_1 I_1 = 8 \cdot 5 = 40 \text{ V}$, $U_2 = U_3 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ V}$.

3°. a) $I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{8}{4} = 2 \text{ A}$; b) $e = U + IR \Rightarrow r = \frac{e - U}{I} = \frac{12 - 10}{2} = 1\,\Omega$;

c) $R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2} = \frac{U - U_1}{I} = \frac{10 - 8}{2} = 1\,\Omega$, $l_2 = \frac{R_2 S_2}{\rho} = \frac{1 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{8}} = 20 \text{ m}$.

4°. a) Forţa electromagnetică exercitată asupra unui conductor de lungime l, parcurs de un curent electric de intensitate I, conductorul aflîndu-se într-un cîmp magnetic de inducţie B, este $F = BIl \sin \alpha$, α fiind unghiul dintre direcţia conductorului şi direcţia vectorului inducţiei magnetice B ($F \in [0, BIl]$).

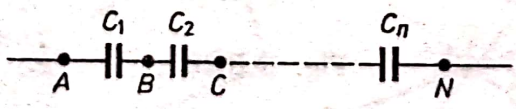


Fig. F.B.24

b) În cazul grupării condensatorilor în serie (figura F.B. 24)

$V_A - V_N = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + \ldots + (V_M - V_N) =$

$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n} = \frac{Q}{C}$, deci $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$;

C fiind capacitatea echivalentă a celor n condensatori grupaţi în serie.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul grupării condensatorilor în paralel (figura F.B.25),

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) + \ldots + C_n(V_A - V_B) =$$

$$= C(V_A - V_B), \text{ deci } C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

C fiind capacitatea echivalentă a celor n condensatori grupaţi în paralel.

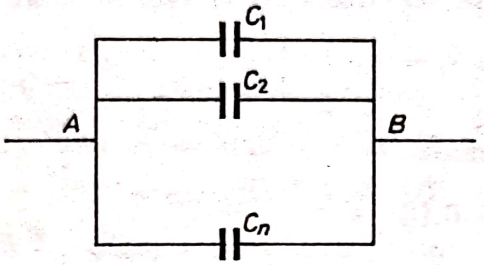


Fig. F.B.25

c) Dacă un sistem de puncte materiale este izolat sau dacă rezultanta forţelor externe care acţionează asupra sistemului este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă, $(\vec{P})_t = (\vec{P})_{t_0}$, t fiind un moment ulterior momentului t_0 şi $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$.

5°. a) Într-un cîmp de forţe conservativ, energia mecanică $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat, este constantă, adică energia mecanică a acestui sistem se conservă, $(E)_t = (E)_{t_0}$, t fiind un moment ulterior lui t_0.

b) Pentru ca un solid rigid liber să fie în echilibru, este necesar şi suficient ca suma vectorială a forţelor care acţionează asupra lui să fie nulă şi momentul rezultant al sistemului în raport cu un punct oarecare să fie nul, adică:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

şi

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0.$$

c) Legile frecării de alunecare:

— Forţa de frecare de alunecare F_f dintre două corpuri nu depinde de aria suprafeţei de contact dintre corpuri.

— Forţa de frecare de alunecare F_f este proporţională cu forţa de apăsare normală exercitată pe suprafaţa de contact, $F_f = \mu N$, unde N este forţa normală de apăsare pe suprafaţa de contact, iar μ coeficientul de frecare de alunecare, care depinde de natura corpurilor şi de felul prelucrării suprafeţelor în contact (gradul de şlefuire sau contaminare cu oxizi şi alte substanţe).

X.1°. a) $x = A \sin \omega t_1 \Rightarrow A = A \sin \omega t_1 \Rightarrow \sin \omega t_1 = 1 \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4\pi \cdot 10} = 0{,}025 \text{ s};$$

b) $\frac{A}{2} = A \sin \omega t_2 \Rightarrow \sin \omega t_2 = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{6 \cdot 2\pi\nu} = \frac{\pi}{6 \cdot 2\pi \cdot 10} \cong 8{,}33 \cdot 10^{-3}$ s;

c) $x_1 = \frac{A}{3} \Rightarrow \frac{A}{3} = A \sin \omega t_3 \Rightarrow 2\pi 10 t_3 \cong 0{,}1081\pi \Rightarrow t_3 \cong 5{,}4 \cdot 10^{-4}$ s,

$x_2 = \frac{2A}{3} \Rightarrow \frac{2A}{3} = A \sin \omega t_4 \Rightarrow 2\pi 10 t_4 = 0{,}2323\pi \Rightarrow t_4 \cong 11{,}61 \cdot 10^{-3}$ s,

$$\Delta t = t_4 - t_3 = (11{,}61 - 5{,}4) \cdot 10^{-3} = 6{,}21 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

2°. a) $v_1 = v_0 - gt \Rightarrow s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, $v_2 = v_0 + gt \Rightarrow s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$,

$H = s_1 + s_2 = 2 v_0 t_{\text{întîlnire}}$, $v_0 = \sqrt{2gH} \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$, $\frac{v_0^2}{2g} = 2 v_0 t_{\text{întîlnire}} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{\text{întîlnire}} = \frac{v_0}{4g} = \frac{5}{4 \cdot 10} = 0{,}125$ s;

b) $h = v t_{\text{întîlnire}} - g \frac{t^2_{\text{întîlnire}}}{2} = 5 \cdot 0{,}125 - 10 \frac{0{,}125^2}{2} = 0{,}546875$ m;

c) $v_1 = v_0 - g t_{\text{întîlnire}} = 5 - 10 \cdot 0{,}125 = 3{,}75$ m $\cdot$ s^{-1},
$v_2 = v_0 + g t_{\text{întîlnire}} = 5 + 10 \cdot 0{,}125 = 6{,}25$ m $\cdot$ s^{-1}.

3°. a) $I = \frac{U}{2} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}$, $\omega = 2\pi\nu$, $\nu \in [0, \infty)$,

$X = X_L - X_C = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14\sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}} \cong 16$ Hz;

b) $I_{max} = \frac{U}{R} = \frac{220}{100} = 2{,}2$ A;

c) $U_C = \frac{I_{max}}{C} = \frac{2{,}2}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2} \cong 440$ V,

$$U_{L,R} = I_{max} \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 2{,}2\sqrt{10^4 + 2^2 \cdot 10^4} \cong 490 \text{ V.}$$

4°. a) Nenumărate experienţe efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mişcare, cărora li s-au aplicat diferite forţe, au condus la următorul principiu: „Vectorul forţă este proporţional cu produsul dintre masă şi vectorul acceleraţie, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$". Unitatea de măsură pentru forţă va fi egală cu unitatea de masă înmulţită cu unitatea de acceleraţie:

$$[F] = [m] \cdot [a] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \text{ N.}$$

b) Acest subiect a fost tratat la IX.5°.a.

c) Legea lui Ohm pentru o porţiune de circuit se exprimă prin relaţia $I = \frac{U}{R}$, unde I este intensitatea curentului electric care trece prin rezistenţa electrică R, iar U este tensiunea electrică la bornele rezistenţei R.

Legea lui Ohm pentru un circuit simplu se exprimă prin relaţia $I = \frac{E}{R+r}$, unde E este tensiunea electromotoare din circuit, iar $R + r$ este rezistenţa totală a circuitului (r este rezistenţa interioară a sursei de tensiune electromotoare E).

Scanned with OKEN Scanner

5°. a) Expresia inductanței unui solenoid cu N spire este $L = \frac{\mu N^2 S}{l}$, unde μ este permeabilitatea magnetică a miezului său, S secțiunea spirei, iar l lungimea acesteia.

b) Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor liniar, de lungime l, care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ într-un cîmp magnetic uniform, de inducție $\vec{B}$, este $e = Blv \sin \alpha$, α fiind unghiul format de viteza $\vec{v}$ de deplasare a conductorului cu vectorul inducție magnetică $\vec{B}$.

c) Energia W consumată, în intervalul de timp Δt, într-un rezistor de rezistență R, în curent alternativ, este $W = RI_{ef}^2 \Delta t$, I_{ef} fiind valoarea efectivă a intensității curentului alternativ.

XI.1°. a) $F_{fr} = \mu G = \mu mg = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$ N,

$$v_1 = 90 \cdot \frac{1000}{3600} = 25 \frac{m}{s}, \quad P_{max} = F_{fr} \cdot v_1 = 9 \cdot 10^3 \cdot 25 = 2{,}25 \cdot 10^5 \text{ W},$$

$$P_{medie} = F_{fr} \cdot v_{medie} = F_{fr} \cdot \frac{v_1}{2} = \frac{1}{2} P_{max} = 112{,}5 \text{ kW};$$

b) $\mu mgd_2 = F_{fr} \cdot d_2 = \frac{m}{2} v_1^2 - \frac{m}{2} v_2^2$, $d_2 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\mu g} = \frac{25^2 - 5^2}{2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 4 \cdot 10^3$ m;

c) $L = F_{fr}(d_1 + d_2) = 9 \cdot 10^3 (500 + 5000) = 4{,}95 \cdot 10^7$ J.

2°. a) $C_V = \frac{1}{\gamma} \cdot C_p$, de unde $C_p = C_V + R = \frac{1}{\gamma} \cdot C_p + R$ și $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \frac{\frac{7}{5} R}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{7}{2} R$, deci $Q_p = \nu C_p \Delta T = \frac{m}{M} \cdot \frac{7R}{2} (t_1 - t_0) = \frac{10^{-3}}{32} \cdot 10^2 \cong 90{,}9$ J;

b) $V_1 = \frac{m}{M}, \frac{RT_i}{p_0} = \frac{10^{-3}}{32} \cdot \frac{8310 \cdot 373}{10^5} = 9{,}686 \cdot 10^{-4} \text{m}^3 (\cong 0{,}97\ l)$;

c) $\Delta S = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{10^{-3}}{32} \cdot 8310 \cdot 373 \cdot \ln 2{,}718 \cong 96{,}86 \frac{J}{K}$.

3°. a) $\text{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{\frac{4}{\pi} \cdot 2\pi \cdot 50 - \frac{3\pi}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 50}}{100} = 1$, deci $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

adică tensiunea este defazată cu $\frac{\pi}{4}$ radiani înaintea curentului;

b) $Z = \frac{R}{\cos\varphi} = 100\sqrt{2}\,\Omega$, $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{100\sqrt{2}} = 1{,}1\sqrt{2}$ A,

$P = U \cdot I \cos\varphi = 220 \cdot 1{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 242$ W,

$P_r = U \cdot I \sin\varphi = 220 \cdot 1{,}1\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 242$ W,

$P_a = U \cdot I = 220 \cdot 1{,}1\sqrt{2} = 342{,}24$ W;

c) $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{100}{3\pi} \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{12} \cong 3{,}46.$

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) V. răspunsul pentru subiectul V.1, în cadrul căruia este tratată problema „Energia cinetică, potențială și totală a oscilatorului armonic".

b) Fenomenul de producere a unei tensiuni electromotoare într-un circuit care înconjoară un flux magnetic variabil se numește *inducție electromagnetică*. Deoarece fluxul unui cîmp magnetic de inducție $\vec{B}$ printr-o suprafață de arie A și normală $\vec{n}$, care formează unghiul θ cu inducția $\vec{B}$ este

$$\Phi = BA \cos \theta. \tag{1}$$

Fenomenul de inducție electromagnetică poate fi observat (și studiat) în diferite cazuri particulare. Vom indica în continuare principalele cazuri particulare în care a fost evidențiat fenomenul de inducție electromagnetică și expresiile tensiunii electromotoare induse, obținute din respectivele experiențe:

(i) *cazul circuitului electric delimitînd o suprafață de arie A, cu normala* $\vec{n}$, *formînd un unghi constant* θ *cu inducția cîmpului magnetic exterior, în condițiile în care inducția cîmpului magnetic în interiorul circuitului variază în timp* (ca mărime), cu constatarea experimentală

$$e = -A \cos \theta \frac{\Delta B}{\Delta t}; \tag{2}$$

(ii) *cazul circuitului electric delimitat de un conductor de lungime l, care se deplasează în planul circuitului cu viteza* $\vec{v}$, *aflat într-un cîmp magnetic de inducție* $\vec{B}$, *perpendiculară — ca și viteza* $\vec{v}$ *— pe conductorul l* (figura F.B.26), pentru care se constată experimental valabilitatea expresiei

$$e = -Blv \sin \alpha, \tag{3}$$

unde $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$;

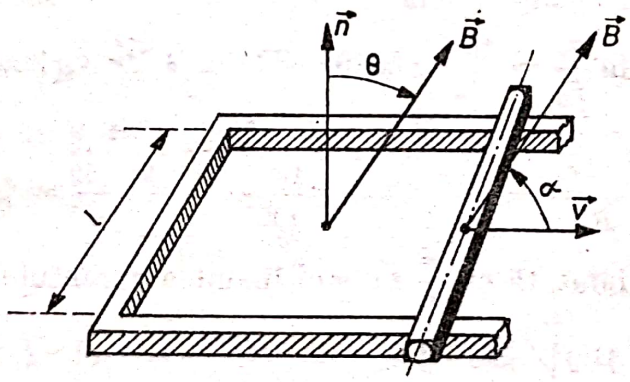


Fig. F.B.26

(iii) *cazul unui circuit electric delimitînd o suprafață de arie A constantă, în raport cu care inducția* $\vec{B}$ *(de mărime constantă B) prezintă o rotație relativă*, cu expresia dedusă experimental

$$e = BA \sin \theta \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t}. \tag{4}$$

Sintetizînd relațiile (2) — (4) deduse din principalele experiențe de evidențiere a fenomenului de inducție electromagnetică, prin intermediul expresiei (1) a fluxului magnetic, deducem legea lui Faraday a inducției electromagnetice,

Scanned with OKEN Scanner

$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, în cazul unei viteze constante în timp de variație a fluxului magnetic, respectiv (în cazul general):

$$e(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Toate experimentele efectuate (în particular cele descrise în cazurile (i)—(iii)) arată că *tensiunea indusă are un astfel de sens, încît prin cîmpul magnetic la care dă naștere se opune variației fluxului magnetic inductor* (regula lui Lenz). Acestei constatări îi corespunde semnul minus din legea lui Faraday.

Maxwell a demonstrat teoretic și experiențele au confirmat că *fenomenul de inducție electromagnetică se produce datorită unui cîmp magnetic variabil, chiar în absența unui circuit. În sens mai larg, prin inducție electromagnetică se înțelege apariția unui cîmp electric variabil în regiunea în care există un cîmp magnetic variabil.*

c) Din considerente statistice, rezultă că numărul moleculelor dintr-o zonă spațială, care se deplasează într-o anumită direcție și într-un anumit sens, este $\frac{1}{6}$ din numărul moleculelor din zona considerată. Dacă în unitatea de volum a incintei avem n molecule de gaz cu viteze cuprinse în intervalul $(v, v + \Delta v)$, unde $\Delta v \ll v$, numărul moleculelor care vor lovi, în intervalul de timp Δt, un element de suprafață cu aria ΔA, al unui perete al incintei, va fi $\frac{1}{6}\Delta n \cdot v\Delta t \cdot \Delta A$. Deoarece ciocnirile moleculelor gazelor ideale, cu pereții incintei, sînt considerate elastice, datorită schimbării sensului de mișcare al moleculelor după ciocnirea cu peretele, variația impulsului moleculelor cu viteze cuprinse în intervalul $(v, v + \Delta v)$, care lovesc elementul de arie ΔA în intervalul de timp Δt va fi $\Delta^3 H = 2 \cdot \frac{1}{6}\Delta n \cdot v\Delta t \cdot \Delta A \cdot mv$, contribuția moleculelor cu vitezele cuprinse între v și $v + \Delta v$, la presiunea exercitată de gazul ideal asupra peretelui, fiind astfel $\Delta p = \frac{\Delta^3 H}{\Delta t \cdot \Delta A} = \frac{1}{3} \cdot \Delta n \cdot mv^2$.

Rezultă că presiunea exercitată de toate moleculele (de diferite viteze) va fi $p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot \tilde{v}^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \tilde{w}$, unde n este concentrația totală a moleculelor în unitatea de volum a incintei, iar $\tilde{w}$ și $\tilde{v}^2$ sînt mediile energiei cinetice de translație a moleculelor gazului ideal și, respectiv, pătratului vitezei moleculei.

5°. a) $a_c = g(\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta)$, $a_u = -g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta)$, unde a_c și a_u sînt accelerațiile la coborîrea și, respectiv, la urcarea pe planul înclinat (luate cu semnul corespunzător în raport cu sensul mișcării), g este accelerația gravitațională, θ este unghiul planului înclinat, iar μ este coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat.

b) $\int_{\substack{\text{proces}\\ \text{ciclic}}} \frac{dQ}{T} \leqslant 0$, sau $\int_{\substack{\text{proces}\\ \text{ciclic}}} dS = 0$, în care semnul $=$ corespunde proceselor ciclice reversibile, iar semnul $<$ (valoarea negativă a integralei) proceselor ireversibile (S fiind entropia termodinamică).

c) Pentru expresia fluxului magnetic printr-o suprafață, v. relația (1) de la XI.4°.b.

XII.1°. a) $V_1 = a_1 t = 1{,}25 \cdot 4 = 5\ \frac{m}{s}$, $AB = \frac{a_1}{2} t^2 = \frac{1{,}25}{2} \cdot 4^2 = 10$ m,

$CD = \frac{V_1^2}{2a_2} = \frac{5^2}{2 \cdot 1{,}25} = 10$ m, $BC = AD - AB - CD = 100$ m, $t_{BC} = \frac{BC}{V_1} = \frac{100}{5} =$

$= 20$ s, $t_{CD} = \frac{V_1}{a_2} = \frac{5}{1{,}25} = 4$ s, $t_{BD} = t_{BC} + t_{CD} = 24$ s;

Scanned with OKEN Scanner

b) $T_{AB} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{10-1,25}} \cong 1,343$ s, $T_{BC} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} =$
$= 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{10}} \cong 1,256$ s, $T_{CD} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+|a_2|}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,4}{10+1,25}} \cong 1,175$ s;

c) $N = \frac{t_{AB}}{T_{AB}} + \frac{t_{BC}}{T_{BC}} + \frac{t_{CD}}{T_{CD}} = \frac{4}{1,343} + \frac{20}{1,256} + \frac{4}{1,175} \cong 22,30$ oscilaţii.

2°. a) $\nu = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{10^5 \cdot 1}{8310 \cdot 300} = 4,01 \cdot 10^{-2}$ kmol, $Q_p = mc_p\Delta T = \nu Mc_p\Delta T =$
$= 4,01 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 1,42 \cdot 10^4(227 - 27) \cong 2,28 \cdot 10^5$ J.

b) $u = \sqrt{\tilde{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8310 \cdot 500}{2}} \cong 2496,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $C_V = C_p - R = Mc_p - R =$
$= 2 \cdot 14\,200 - 8\,310 = 2,009 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol}}$, $\Delta U = \nu C_V\Delta T = 4,01 \cdot 10^{-2} \cdot 2,009 \cdot 10^4 \cdot 200 \cong$
$\cong 1,61 \cdot 10^5$ J;

c) $p_3 = p_1 + \frac{mg}{S} = 10^5 + \frac{10^3 \cdot 10}{0,1} = 2 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, $V_3 = \frac{\nu RT_3}{p_3} =$
$= \frac{4,01 \cdot 10^{-2} \cdot 8310 \cdot 500}{2 \cdot 10^5} = 0,833$ m^3.

3°. a) $\frac{mv^2}{R} = qvB$, de unde $\frac{q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{200}{0,2086 \cdot 1} = 958,8 \frac{C}{\text{kg}}$;

b) $qU = \frac{mv^2}{2}$, deci $U = \frac{mv^2}{2q} = \frac{(2 \cdot 10^2)^2}{2 \cdot 958,8} \cong 20,86$ V; c) $t = \frac{R\frac{\pi}{2}}{v} =$
$= \frac{0,2086 \cdot 3,14}{2 \cdot 200} \cong 1,64 \cdot 10^{-3}$ s.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la III.4°.a.

b) În conformitate cu ipotezele admise la definirea gazelor ideale, interacţiunile dintre molecule sînt neglijabile, cu alte cuvinte energia potenţială corespunzătoare interacţiunilor dintre molecule este neglijabilă în raport cu energia corespunzătoare mişcărilor moleculei. Prin urmare, temperatura fiind constantă, energia internă a unui gaz ideal nu variază cu volumul (poate varia numai energia potenţială de interacţiune a moleculelor, care este neglijabil de mică). Pentru a deduce variaţia energiei interne a gazului ideal cu temperatura, se consideră o transformare izocoră, pentru care primul principiu al termodinamicii ne dă $\Delta U = Q_V - L_V =$
$= \nu C_V\Delta T$. Rezultă că $U = \nu C_V T$.

În cazul gazelor cu molecule monoatomice, energia cinetică a moleculelor se reduce la cea de translaţie, a cărei valoare medie — în conformitate cu teoria cinetico-moleculară — este $\tilde{w} = \frac{m\tilde{v}^2}{2} = \frac{3kT}{2}$. Întrucît în ν kilomoli de gaz avem νN_A molecule (N_A fiind numărul lui Avogadro), atunci $U = \nu N_A\tilde{w} = \nu N_A\frac{3kT}{2} = \nu\frac{3RT}{2}$.

c) Acest subiect a fost tratat la III.5°.c.

5°. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, unde T este perioada oscilaţiilor proprii ale unui pendul elastic de masă m şi constantă elastică k.

b) $Q = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t$, unde Q este cantitatea de căldură dezvoltată într-un conductor, de rezistenţă electrică R, străbătut de un curent electric de intensitate I, sub o tensiune electrică U, în intervalul de timp t.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.a.

Scanned with OKEN Scanner

XIII.1°. a) $a = \frac{F}{m} - g = \frac{108}{6} - 10 = 8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $h = \frac{at^2}{2} = \frac{8 \cdot 5^2}{2} = 100\ \text{m}$;

b) $v = at = 8 \cdot 5 = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $h_{max} = h + \frac{v^2}{2g} = 100 + \frac{40^2}{2 \cdot 10} = 180\ \text{m}$, $t_m = t + \frac{v}{g} = 5 + \frac{40}{10} = 9\ \text{s}$;

c) $L = Fh = 108 \cdot 100 = 1{,}08 \cdot 10^4\ \text{J}$, $W_{p\ max} = mgh_{max} = 6 \cdot 10 \cdot 180 = 1{,}08 \cdot 10^4\ \text{J}$, $W_c = W_{p\ max} = 1{,}08 \cdot 10^4\ \text{J}$.

2°. a) $C_p = C_V + R = \frac{C_p}{\gamma} + R$, deci $C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3} - 1} R = \frac{5}{2} R$ şi $Q_p = \nu C_p \Delta T = \nu \frac{5R}{2} \Delta T = \frac{5}{2} p(V_2 - V_1)$, rezultînd că $V_2 = V_1 + \frac{2Q_p}{5p} = 5 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 500}{5 \cdot 10^5} = 7 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 (= 7\ \text{l})$;

b) $L_p = p(V_p - V_1) = \frac{2}{5} Q_p = \frac{2}{5} \cdot 500 = 200\ \text{J}$;

c) $\Delta U_p = Q_p - L_p = \frac{3}{5} Q_p = \frac{3}{5} \cdot 500 = 300\ \text{J}$.

3°. a) $\text{ctg}\ \varphi = \frac{p}{p_r} = \frac{346{,}4}{200} = 1{,}732$, deci $\varphi = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}\ (= 30°)$, iar $R = Z \cos \varphi = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 86{,}6\ \Omega$;

b) $P = UI \cos \varphi = \frac{U^2}{Z} \cos \varphi$, deci $U = \sqrt{\frac{PZ}{\cos \varphi}} = \sqrt{\frac{346{,}4 \cdot 100}{0{,}866}} = 200\ \text{V}$ şi $I = \frac{U}{Z} = \frac{200}{100} = 2\ \text{A}$;

c) $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, deci $X_L X_C = L\omega \cdot \frac{1}{C\omega} = Q^2 R^2 = \frac{2}{3} \left[10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = 5\,000\ \Omega^2$; pe de altă parte, $X = X_L - X_C = Z \sin \varphi = 100 \cdot 0{,}5 = 50\ \Omega$, deci $X^2 + 4X_L X_L = (X_L + X_C)^2 = 50^2 + 4 \cdot 5\,000 = 22\,500\ \Omega^2$ şi deci $X_L + X_C = \sqrt{22\,500} = 150\ \Omega$, de unde $X_L = 100\ \Omega$, $X_C = 50\ \Omega$, $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{2\pi \cdot 50} \cong 0{,}318\ \text{H}$, $C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 50} \cong 6{,}36 \cdot 10^{-5}\ \text{F}$.

4°. a) Considerăm o undă plană ale cărei oscilaţii se propagă cu viteza de fază v în sensul pozitiv al axei Ox. Dacă dependenţa de timp a elongaţiei oscilaţiilor care se produc în originea O a axei Ox este $y = A \sin \omega t$, unde A este amplitudinea oscilaţiilor, iar ω pulsaţia acestor oscilaţii, atunci dependenţa de timp a elongaţiei oscilaţiilor care se vor produce într-un punct P, de abscisă x, va fi $y_P = A \sin \omega(t - \Delta t)$, unde $\Delta t = \frac{x}{v}$ reprezintă durata necesară pentru propagarea fazei oscilaţiilor din origine pînă în punctul considerat. Deoarece între pulsaţia ω şi perioada T a oscilaţiilor există relaţia $\omega = \frac{2\pi}{T}$, rezultă că dependenţa de timp

a elongației oscilațiilor în punctul P va fi $y_P = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \right.$ $\left. - \frac{x}{\lambda}\right)$, unde $\lambda = vT$ este lungimea de undă.

b) Acest subiect a fost tratat la XVIII.3°.a.

c) Datorită echilibrării forței Lorentz de către forța centrifugă, $qvB = \frac{mv^2}{R}$, viteza unghiulară de rotație a particulei încărcate electric (cu sarcina q), în cîmpul magnetic uniform de inducție B, va fi $\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$. Ținînd seamă de relația dintre perioada de rotație și viteza unghiulară ω a rotației, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obținem $T = \frac{2\pi m}{qB}$, unde m este masa particulei încărcate electric.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XIX.4°.b.

b) Energia internă a unui sistem reprezintă suma energiilor cinetice ale mișcărilor de translație, rotație și vibrație, ale particulelor care compun sistemul, și a energiilor potențiale determinate de totalitatea forțelor de interacțiune (de regulă, în expresia energiei interne utilizate în studiul unui proces termodinamic sînt incluse sumele acelor energii (ale particulelor), care variază în procesul considerat).

c) $\rho = \frac{RS}{l}$, unde ρ este rezistivitatea materialului din care este confecționat un rezistor cilindric, cu lungimea l, aria secțiunii transversale S și rezistența electrică R.

XIV.1°. a) Moleculele a căror energie cinetică este egală cu cea medie, au viteza egală cu cea pătratică medie $u = \sqrt{\widetilde{v^2}}$. Avem $t = \frac{R - r}{u} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f}$ (figura F.B.27), de unde $u = 2(R - r)f = 2(0{,}22 - 0{,}02) \cdot 1{,}325 \cdot 10^3 = 530 \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

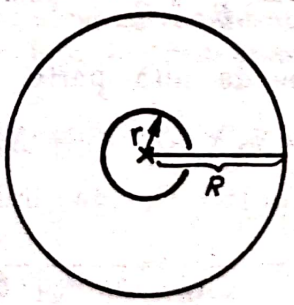


Fig. F.B.27

b) $\frac{mu^2}{2} = \frac{3kT}{2}$, deci $m = \frac{3kT}{u^2} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}(948 + 273)}{530^2} \cong 1{,}801 \cdot 10^{-25}$ kg;

c) $\widetilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\sigma} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-19}} \cong 1{,}414$ m, $p = nkT = 5 \cdot 10^{18} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot$ $\cdot 1221 = 8{,}425 \cdot 10^{-2} \frac{N}{\text{m}^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2°. a) $C_p = C_V + R = \frac{3R}{2} + R = \frac{5R}{2}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5R}{2}}{\frac{3R}{2}} = \frac{5}{3}$. Fie T_3 temperatura la începutul comprimării adiabatice. Atunci $p_3^{1-\gamma} T_3^{\gamma} = p_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma}$, deci

$$T_3 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_3}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 400 \left(\frac{3 \cdot 10^4}{9{,}6 \cdot 10^5}\right)^{1-\frac{3}{5}} = 100 \text{ K}.$$

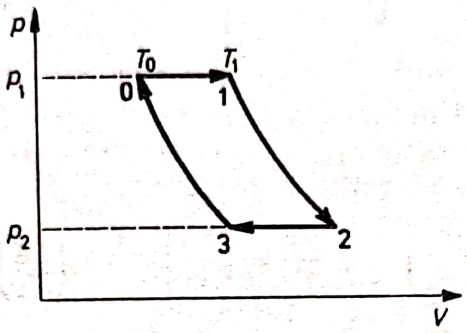


Fig. F.B.28

Aceasta este, evident, temperatura minimă atinsă în ciclul considerat (figura F.B.28), întrucît

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 600 \left(\frac{3 \cdot 10^4}{9{,}6 \cdot 10^5}\right)^{1-\frac{3}{5}} = 150 \text{ K} (> T_3).$$

b) $L_{01} = p_1(V_1 - V_0) = R(T_1 - T_0) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8310(600 - 400) = 3324$ J,

$$L_{12} = -\Delta U_{12} = U_1 - U_2 = \nu \frac{3R}{2}(T_1 - T_2) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3 \cdot 8310}{2}(600 - 450) = 11\,218{,}5 \text{ J},$$

$$L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_3 - T_2) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8310(100 - 150) = -831 \text{ J},$$

$$L_{30} = -\Delta U_{30} = U_3 - U_0 = \nu \frac{3R}{2}(T_3 - T_0) =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3 \cdot 8310}{2}(100 - 400) = -7\,479 \text{ J},$$

$$L_{ciclu} = L_{01} + L_{12} + L_{23} + L_{30} = 3\,324 + 11\,218{,}5 - 831 - 7\,479 = 6232{,}5 \text{ J}.$$

c) $Q_{\text{primit ciclu}} = Q_{01} = \nu C_p \Delta T = \nu \cdot \frac{5R}{2}(T_1 - T_0) =$

$$= 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{5 \cdot 8310}{2}(600 - 400) = 8\,310 \text{ J},$$

$$\eta = \frac{L_{ciclu}}{Q_{\text{primit ciclu}}} = \frac{6232{,}5}{8310} = 0{,}75\,(75\%), \quad \eta_c = 1 - \frac{T_3}{T_1} =$$

$$= 1 - \frac{100}{600} = \frac{5}{6} \cong 0{,}833\,(83{,}3\%).$$

3°. a) $i = \frac{D\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} = 10^{-2}$ m.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\Phi_{rez} = \Phi_1 + \Phi_2 + 2\sqrt{\Phi_1\Phi_2}\cos\Delta\varphi$. Pentru maximele de interferență $\Delta\varphi_{max} = 2m\pi$, iar pentru minime $\Delta\varphi_{min} = (2m+1)\pi$, deci la mijlocul distanței dintre un maxim de interferență și minimul următor $\Delta\varphi_{mijloc} = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi$, adică avea $\cos\Delta\varphi_{mijloc} = 0$. Deoarece $\Phi_1 \cong \Phi_2$, rezultă că $\Phi_{mijloc} \cong 2\Phi_1$, iar $\Phi_{max} \cong 4\Phi_1$, de unde $\frac{\Phi_{mijloc}}{\Phi_{max}} \cong \frac{2\Phi_1}{4\Phi_1} = \frac{1}{2}$.

c) $w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, deci $E = \sqrt{\frac{2\omega_{el}}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}} = 600\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

4°. a) Căldura primită de mașina Otto este $Q_1 = \nu C_V(T_3 - T_2)$, iar căldura cedată de mașină este $Q_2 = \nu C_V(T_4 - T_1)$ (v. figura F.B.29). Ținînd seamă că pe adiabatele 1 — 2 și 3 — 4 sînt satisfăcute egalitățile:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \text{ și } \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

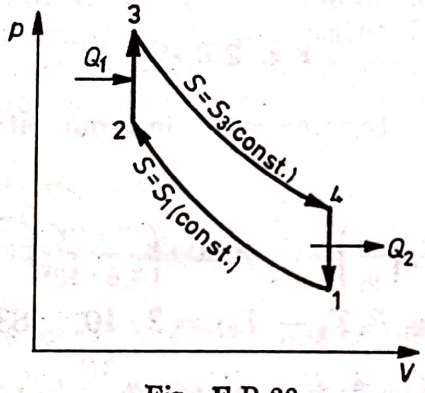


Fig. F.B.29

găsim că $T_2 = T_1\varepsilon^{\gamma-1}$ și $T_3 = T_4\varepsilon^{\gamma-1}$. Introducînd aceste relații în expresiile Q_1 și Q_2, rezultă că randamentul ciclului Otto este $\eta_0 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$, unde $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ este raportul de compresie caracteristic ciclului parcurs. Randamentul mașinii Otto poate fi exprimat și prin temperaturi în forma $\eta_0 = 1 - \frac{T_4}{T_3}$. Întrucît temperatura T_4 este mai mare decît temperatura T_1, randamentul mașinii Otto este mai mic decît randamentul $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ al mașinii Carnot care vor funcționa între aceleași temperaturi extreme (concluzie în acord cu formularea Carnot a principiului II al termodinamicii).

b) Acest subiect a fost tratat la XVIII.3°b.

c) Acest subiect a fost tratat la XVII.5°.c.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XVIII.5°.a.

b) Entropia oricărui sistem tinde către o constantă universală, finită, care poate fi egală cu zero pentru sistemele pure condensate, atunci cînd temperatura absolută tinde spre zero.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.b.

Scanned with OKEN Scanner

XV.1°. a) $F_{min} \sin \theta = mg \cos \alpha$ (v. figura F.B.30), deci $F_{min} = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \theta} = \frac{2 \cdot 9{,}8 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 24{,}01$ N;

b) $F \cos \theta = m(g \sin \alpha + a_1) + \mu(mg \cos \alpha - F \sin \theta) \Rightarrow F(\cos \theta + \mu \sin \theta) = m[g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + a_1] \rightarrow F = \frac{m[g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] + a_1}{\cos \theta + \mu \sin \theta} = \frac{2\left[9{,}8\left(0{,}5 + 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \cong 20{,}26$ N;

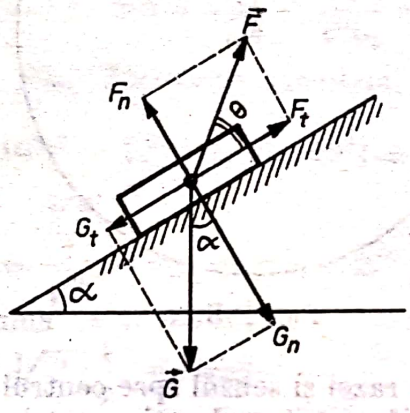


Fig. F.B.30

c) $mg \sin \alpha = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \theta) + F \cos \theta + ma_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = \frac{m[g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - a_2]}{\cos \theta - \mu \sin \theta} = \frac{2\left[9{,}8\left(0{,}5 - 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2}} \cong 7{,}787$ N.

2°. a) $Q_{top} = Q_t - m_g c_g \Delta t_g - m_a c_a \Delta t_a = Q_t + m_g c_g t_1 - m_a c_a t_v = 772{,}9 - 10^{-3} \cdot 2090 \cdot 10 - 10^{-3} \cdot 4\,180 \cdot 100 = 334$ J; b) $L = \nu R T_v \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} T R_v \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{10^{-3}}{18} \cdot 8310 \cdot 373 \ln 2 \cong 119{,}3$ J; c) $L_p = p\Delta V = \nu R \Delta T = \nu R(T - T_v)$, de unde $T = T_v + \frac{L}{\nu R} = 373 + \frac{4{,}15}{\frac{10^{-3}}{18} \cdot 8310} \cong 382$ K.

3°. a) $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{L}{T_1 - T_2} = \frac{1800}{300} = 6 \frac{J}{K}$;

b) $V = \frac{\nu R T_2}{p} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8310 \cdot 300}{1{,}66 \cdot 10^5} \cong 3 \cdot 10^{-2}$ m^3; ;

c) $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8310 \cdot 300}{2}} \cong 1934 \frac{m}{s}$, $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \cdot \sigma} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 1{,}66 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-19}} \cong 5{,}9 \cdot 10^{-8}$ m $(= 590$ Å).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la V.1°.

b) Variaţia $\Delta\vec{v}$ a vitezei unui corp, aflat într-o mişcare circulară uniformă într-un interval de timp Δt mult mai mic decît perioada T a mişcării, poate fi calculată considerînd-o ca bază a unui triunghi isoscel de laturi egale v, cu unghiul la vîrf $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ neglijabil de mic în raport cu 1 radian (figura F.B.31).

Rezultă $|\Delta\vec{v}| \cong v\Delta\alpha = v\omega\Delta t$.

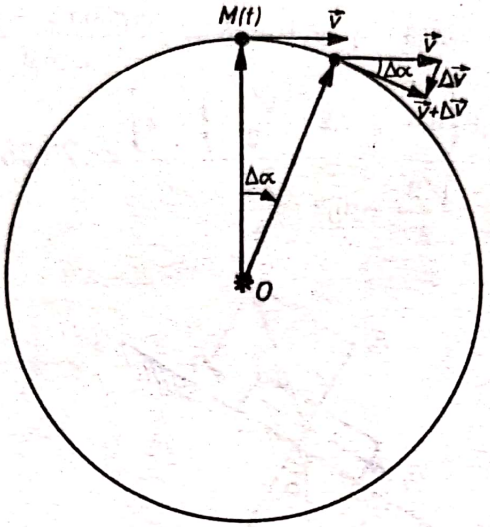


Fig. F.B.31

Deoarece $\Delta\vec{v}$ are direcţia razei şi sensul spre centrul mişcării de rotaţie, acceleraţia mişcării de rotaţie uniformă (acceleraţia centripetă) are direcţia radială, sensul spre centrul mişcării de rotaţie şi valoarea dată de expresia $a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, unde R este raza traiectoriei circulare.

c) Acest subiect a fost tratat la II.4°.a.

5°. a) $\Delta\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2\right) = L_{ext}$, adică variaţia sumei energiei cinetice de translaţie şi energiei cinetice de rotaţie (în raport cu axa Δ) a sistemului rigid este egală cu lucrul mecanic efectuat asupra sistemului de forţele exterioare. În această relaţie m este masa, I_Δ este momentul de inerţie faţă de axa Δ a sistemului rigid, v este viteza de translaţie, iar ω este viteza unghiulară de rotaţie (în jurul axei Δ) a sistemului rigid.

b) $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT}{V}$, unde p este presiunea gazului, ν numărul de kilomoli, T temperatura gazului, V volumul, R constanta gazelor ideale, m masa gazului, iar μ masa unui kilomol de gaz.

c) Pentru definiţia căldurii specifice v. răspunsul de la III.5°.b. Produsul dintre masa unui corp şi căldura sa specifică se numeşte *capacitate calorică* a corpului. Capacitatea calorică pentru un kilomol de substanţă se numeşte *căldură (kilo)molară* a substanţei.

XVI.1°. a) $U_R = Ri = R\dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$, rezultînd că $U_R = \text{maxim}$ dacă $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, deci $C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 Lf_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 0{,}318(5\cdot 10^4)^2} \cong 3{,}18\cdot 10^{-11}$ F.

Scanned with OKEN Scanner

b) $U_{R\,max} = U$. Fie ω_1 şi ω_2 pulsaţiile pentru care tensiunea la bornele rezistorului este $R\dfrac{U}{\sqrt{R^2+\left(L\omega_{1,2}-\dfrac{1}{C\omega_{1,2}}\right)^2}} = \dfrac{U_{R\,max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$. Prin urmare $\left(L\omega_{1,2} - \dfrac{1}{C\omega_{1,2}}\right)^2 = R^2$, deci $L\omega_{1,2} - \dfrac{1}{C\omega_{1,2}} = \pm R$, de unde $LC\omega_{1,2}^2 \mp RC\omega_{1,2} - 1 = 0$ şi $\omega_{1,2} = \dfrac{\pm RC \pm \sqrt{R^2C^2+4LC}}{2LC}$. Deoarece pulsaţia este pozitiv definită, doar soluţiile cu semnul plus în faţa radicalului au semnificaţie fizică, deci $\omega_1 - \omega_2 = \dfrac{2RC}{2LC} = \dfrac{R}{L}$, de unde $f_1 - f_2 = \dfrac{R}{2\pi L} = \dfrac{100}{2\pi \cdot 0{,}318} = 50$ Hz.

c) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{L\omega_0 - \dfrac{1}{C'\omega_0}}{R} = 1$, adică $L\omega_0 - \dfrac{1}{C'\omega_0} = R$, de unde $\dfrac{1}{C'\omega_0} = L\omega_0 - R$, deci $\dfrac{d'}{\varepsilon_0 A} = \dfrac{1}{C'} = L\omega_0^2 - R\omega_0$. Efectuînd calculele, găsim $d' = \varepsilon_0 A(L\omega_0^2 - R\omega_0) = \dfrac{10^{-3}}{36\pi \cdot 10^9}[0{,}318(2\pi \cdot 5 \cdot 10^4)^2 - 100 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4] \cong 2{,}775 \cdot 10^{-4}$ m.

2°. a) $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = 0{,}5$, deci $r = 30°\left(= \dfrac{\pi}{6}\text{ radiani}\right)$.

b) La deviaţie minimă $A = 2r$, deci în cazul de faţă $A = 2 \cdot 30 = 60°$; $\sin\dfrac{A+D_m}{2} = n\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}$, de unde $\dfrac{A+D_m}{2} = 60°$ şi $D_m = 120 - A = 60°$.

c) $\sin i = n\sin r = n\sin(A - r') \leqslant n\sin(A - l)$, unde l este unghiul limită, $l = \arcsin\dfrac{1}{n}$. Deoarece $\sin l = \dfrac{1}{n}$, iar $\cos l = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$, obţinem $\sin i_{min} = n\sin(A - l) = n\left[\sin A \cdot \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} - \cos A \cdot \dfrac{1}{n}\right] = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-1}{2} \cong 0{,}7245$.

3°. a) $\nu_{1\to 2} = R\left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2}\right) = \dfrac{3R}{4} = \dfrac{3 \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15}}{4} \approx 2{,}47 \cdot 10^{15}$ Hz.

b) Deoarece $\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, energia totală a electronului atomului de hidrogen este $W = W_c + U = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\dfrac{mv^2}{2}$, respectiv, în stări staţionare,

$$W_n = -\frac{mv_n^2}{2} = -hR\cdot\frac{1}{n^2}, \text{ deci } W_{c_1} = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{hR}{2^2} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}29 \cdot 10^{15}}{4} \approx$$

$$\approx 5{,}4285 \cdot 10^{-19}\text{ J } (\approx 3{,}39\text{ eV}).$$

c) $\dfrac{hc}{\lambda} \geqslant -W_1 = \dfrac{hR}{1^2}$, prin urmare $\lambda_{max} = \dfrac{c}{R} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{3{,}29 \cdot 10^{15}} \cong 9{,}12 \cdot 10^{-8}$ m (912 Å).

4°. a) Acest subiect a fost tratat la I.4°.c.

b) Acest subiect a fost tratat la XII.5°.b.

c) Principalele constatări experimentale privind efectul fotoelectric sînt: (i) curentul fotoelectric, în regim de saturaţie, este proporţional cu fluxul de lumină monocromatică; (ii) viteza fotoelectronilor este dependentă doar de frecvenţa radiaţiei; (iii) există un prag fotoelectric sub care efectul nu se mai observă. Ulti-

Scanned with OKEN Scanner

nele două constatări pot fi sintetizate sub forma celei de a doua legi a efectului otoelectric: „Energia totală pe care o primește electronul de la lumină este egală cu produsul dintre constanta lui Planck și frecvența radiației". În baza acestei legi poate fi determinată și frecvența de prag în funcție de energia de extracție a unui electron din fotocatod.

5°. a) $R = \rho \frac{l}{S}$, unde ρ este rezistivitatea materialului conductorului, iar l și S sînt lungimea și, respectiv, aria secțiunii transversale a conductorului (presupus cilindric).

b) $H = \frac{I}{2r}$, unde H este intensitatea cîmpului magnetic în centrul spirei circulare, de rază R, parcursă de un curent electric de intensitate I.

c) Acest subiect a fost tratat la III.5°.c.

XVII.1°. a) $u = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8310 \cdot 300}{2}} \approx 1934 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \sigma} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1{,}414 \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-20}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-8}$ m (= 108 Å);

b) $m = M \frac{pV}{RT} = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{8310 \cdot 300} \approx 0{,}18$ kg, $p_1 = p \frac{T_1}{T} = 9 \cdot 10^6 \cdot \frac{260}{300} = 7{,}8 \cdot 10^6$ N · m^{-2};

c) $T_{exp} = p_{exp} \cdot \frac{T}{p} = 1{,}2 \cdot 10^7 \cdot \frac{300}{9 \cdot 10^6} = 400$ K.

2°. a) $\lambda_a = v_a T = \frac{c}{n_a} T = \frac{\lambda}{n_a}$, deci $i_a = \frac{\lambda_a D}{a} = \frac{\lambda D}{n_a a} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{1 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-4}$ m.

b) $\lambda_{apă} = \frac{\lambda}{n_{apă}}$, deci $i_{apă} = \frac{\lambda_{apă} D}{a} = \frac{\lambda D}{n_{apă} a} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{1{,}33 \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-3}} \approx 3{,}76 \cdot 10^{-4}$ m.

c) Variația diferenței de drum prin introducerea lamei transparente este: $\Delta\delta = l(n_{lamă} - 1) = 10^{-5}(1{,}5 - 1) = 5 \cdot 10^{-6}$, deci variația ordinului de interferență este $\Delta m = \frac{\Delta\delta}{\lambda_a} = \frac{\Delta\delta \cdot n_a}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{5{,}5 \cdot 10^{-7}} \approx 9{,}09$, iar deplasarea sistemului de franje de interferență pe ecranul de observație va fi

$$\Delta x = i_a \Delta m \cong 5 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}09 = 4{,}545 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

3°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b (principiul I), IV.4°.b (principiul II) și XIV.5°.b (principiul III); b) presiunea totală, corespunzătoare unui amestec de gaze, este egală cu suma presiunilor („parțiale") exercitate de fiecare gaz al amestecului, în absența celorlalte: $p_t = \sum_{i=1}^{n} p_i$; c) acest subiect a fost tratat la VII.4°.c.

4°. a) Într-o transformare adiabatică (transformare în cursul căreia nu se schimbă căldură între sistem și exterior, $Q = 0$), parametrii de stare ai gazului ideal satisfac ecuațiile (echivalente între ele) $pV^\gamma = \text{csont.}$, $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ și $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const.}$, unde p, V și T sînt presiunea, volumul și, respectiv, temperatura pentru o stare oarecare de echilibru termodinamic atinsă în cursul transformării adiabatice, iar $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ este exponentul adiabatic (ecuațiile menționate pot fi scrise, folosind parametrii termodinamici corespunzători unor stări oarecare 1 și 2 atinse în cursul transformării adiabatice a cantității considerate (constante) de gaz ideal, în forma: $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ etc.).

b) $W_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$, unde W_n este energia totală corespunzătoare stării staționare de număr cuantic principal n a unui atom de hidrogen, m este masa

Scanned with OKEN Scanner

electronului (într-un model teoretic riguros, luînd în considerație „antrenarea nucleului" în mișcarea de rotație în jurul centrului de masă, $m = \frac{m_e m_n}{m_e + m_n}$ este masa „redusă", exprimată prin masele de repaus ale electronului, m_e, și respectiv, nucleului, m_n), e este sarcina electrică elementară, ε_0 este permitivitatea vidului, iar h este constanta lui Planck.

c) $C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, unde C este convergența lentilei subțiri, f este distanța focală a lentilei subțiri, n este indicele relativ de refracție al materialului lentilei în raport cu mediul în care se găsește lentila, iar R și R' sînt razele de curbură ale fețelor lentilei (R sau/și R' fiind luate pozitive dacă respectiva față este convexă, sau negative dacă respectiva față a lentilei este concavă).

5°. a) Expresia variației cu temperatura a energiei interne poate fi dedusă pornind de la expresia particulară, pentru o transformare izocoră, a primului principiu al termodinamicii. Deoarece într-o transformare izocoră lucrul mecanic schimbat de sistem cu exteriorul, $L = p\Delta V$, este nul, atunci $\Delta U = Q - L = \nu C_V \Delta T$; în condițiile în care căldura molară la volum constant, C_V, nu depinde de temperatură, rezultă că $U = \nu C_V T$.

Contribuția mișcărilor de translație dezordonată (termică) a moleculelor unui gaz perfect la energia internă a acestuia poate fi dedusă pornind de la expresia energiei cinetice (de translație) medii a unei molecule, dată de teoria cinetico-moleculară a gazelor: $\widetilde{W} = \frac{m\widetilde{v^2}}{2} = \frac{3k_B T}{2} = \frac{3RT}{N_A}$. Deoarece într-o cantitate de ν kilomoli de gaz există νN_A molecule (N_A = numărul lui Avogadro), avem $U_{\text{transl.}} = \nu N_A \cdot \widetilde{W} = \nu \cdot \frac{3RT}{2}$.

În cazul gazelor cu molecule poliatomice (pentru care $C_V > \frac{3R}{2}$), diferența $U - U_{\text{transl.}}$ se datorează mișcărilor de rotație dezordonată (termică) a moleculelor poliatomice.

b) Din condiția de egalitate a forței centrifuge cu forța Lorentz care acționează asupra particulei încărcate electric (cu sarcina q) în cîmpul magnetic uniform (de inducție B; v. figura F.B.32), $qvB = \frac{mv^2}{R}$, rezultă expresia razei R a

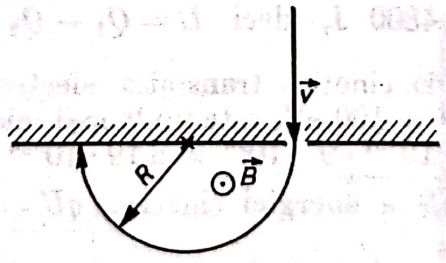


Fig. F.B.32

traiectoriei particulei încărcate electric, $R = \frac{mv}{qB}$ (m este masa particulei încărcate electric).

c) În cazul incidenței normale a radiațiilor electromagnetice pe rețeaua de difracție, și a unor fascicule difractate a căror direcție este cuprinsă în planul ce conține direcția de incidență și perpendiculara pe direcțiile zgîrieturilor (conținută

în planul rețelei), formînd unghiul α cu direcția de incidență (v. figura F.B.33), diferența de drum dintre oscilațiile provenite din puncte similare ale unor fante succesive (spre exemplu, din punctele B și A) va fi $BH = AH \sin \alpha = d \sin \alpha$.

Deoarece, în conformitate cu proprietatea de tautocronism (timp egal de străbatere, pe orice traseu, a drumului dintre sursă și imaginea sa) a lentilelor optice, între frontul de undă AH și „imaginea" M a acestuia în planul ecranului E de observație nu intervine nici o diferență de drum (optic) suplimentară, condiția de obținere a unui maxim de difracție (luminozitate) în punctul M se va scrie în forma $BH = d \sin \alpha = n\lambda$, unde λ este lungimea de undă a radiației monocromatice difractate, iar $n =$ întreg.

XVIII.1°. a) Într-o transformare izobară

$$\Delta U = Q - L_{ef} = \nu C_p \Delta T - p\Delta V = \nu C_p \Delta T - \nu R \Delta T = \nu(C_p - R)\Delta T =$$

$$= \nu\left(\frac{5R}{2} - R\right)\Delta T = \nu\frac{3R}{2} = \Delta T = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3 \cdot 8310}{2} \cdot 1 = 24{,}93 \text{ J};$$

b) $L_a = -\Delta U = \nu \frac{3R}{2}(T_1 - T_2)$ (figura F.B.34), deci $T_1 - T_2 = \frac{2L_a}{3\nu R}$ și

$$T_1 = T_2 + \frac{2L_a}{3\nu R} = 300 + \frac{2 \cdot 2493}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8310} = 400 \text{ K};$$

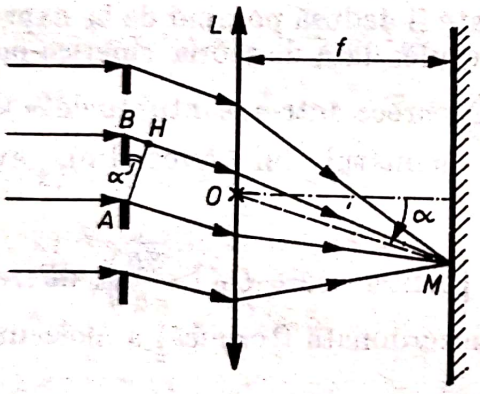


Fig. F.B.33

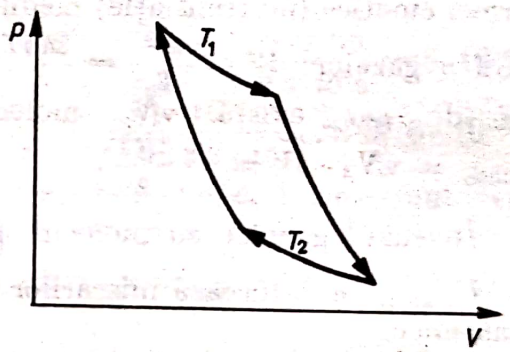


Fig. F.B.34

c) $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{100}{400} = 0{,}25$ (25%); dar $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, de unde $\frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \eta$ și $Q_1 = \frac{Q_2}{1-\eta} = \frac{3600}{1-0{,}25} = 4800$ J, deci $L = Q_1 - Q_2 = 4800 - 3600 = 1200$ J.

2°. a) Deoarece energia cinetică transmisă electronilor prin accelerarea în cîmp electrostatic, $E_c = qU = 100$ eV, este mult mai mică decît energia de repaus a electronului, $m_0c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8{,}19 \cdot 10^{-14}$ J $\approx 5{,}11 \cdot 10^5$ eV, putem folosi expresia nerelativistă a energiei cinetice, $qU = E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, de unde

$$p = \sqrt{2mqU} \text{ și } \lambda_{as} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} \approx$$

$$\approx 1{,}22 \cdot 10^{-9} \text{ m } (= 12{,}2 \text{ Å});$$

b) $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}22 \cdot 10^{-9}} \approx 1{,}62 \cdot 10^{-16}$ J, iar $p_f = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{1{,}22 \cdot 10^{-9}} \approx$

$\approx 5{,}4 \cdot 10^{-25}$ kg $\cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $d \sin\theta = m\lambda$, de unde $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = mN\lambda = 1 \cdot \frac{10^3}{10^{-3}} \cdot 1{,}22 \cdot 10^{-2} = 1{,}22 \cdot 10^{-3}$; deoarece $\sin\theta \ll 1$, se poate aproxima că $\theta \approx 1{,}22 \cdot 10^{-3}$ rad.

3°. a) În intervalul Δt o moleculă cu viteza relativă medie (față de alte molecule) $\tilde{v}_r$ și secțiune eficace (pentru ciocniri) σ „mătură" un domeniu spațial de volum $\Delta V = \tilde{v}_r \Delta t \cdot \sigma$, în care se găsesc $\Delta N = n\tilde{v}_r \Delta t \cdot \sigma$ molecule (n = concentrația moleculelor în unitatea de volum), deci durata medie dintre două ciocniri succesive ale unei molecule este $\tilde{t} = \frac{\Delta t}{\Delta N} = \frac{1}{n\sigma\tilde{v}_r}$; prin urmare drumul liber mediu al unei molecule, între două ciocniri succesive, este $\tilde{\lambda} \cong \tilde{v}\tilde{t} = \frac{\tilde{v}}{n\sigma\tilde{v}_r}$. Modulul v_r al vitezei relative $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ a moleculei 2 față de molecula 1 este: $v_r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}$, unde $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Deoarece, într-un spațiu izotrop, valoarea medie a unghiului θ este nulă, iar $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 = \tilde{v}$, putem estima media $\tilde{v}_r$ prin $\tilde{v}\sqrt{2}$; înlocuind în expresia drumului liber mediu al unei molecule, obținem $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$.

b) Ținînd seamă de proprietățile optice ale focarelor F și F' și ale centrului optic O al unei lentile, rezultă că poziția imaginii $B'A'$ a unei surse AB față de o lentilă poate fi găsită printr-o construcție geometrică de tipul celei indicate în figura F.B.35. Notînd distanțele obiectului, imaginii și focarelor pînă la lentilă prin $p = AO$, $p' = A'O$, $f = FO$, iar mărimile obiectului și imaginii prin $o = AB$, $i = A'B'$ și luînd în considerație faptul că triunghiurile AOB și $A'OB'$, respectiv IOF' și $B'A'F'$ ($OI = AB = o$), sînt asemenea, obținem:

$$\frac{o}{i} = \frac{AO}{A'O} = \frac{p}{p'} \text{ și, respectiv, } \frac{o}{i} = \frac{IO}{A'B'} = \frac{OF'}{F'A'} = \frac{f}{p' - f}. \qquad (1)$$

Din relațiile (1) rezultă că $\frac{p}{p'} = \frac{f}{p' - f}$, de unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ (formula lentilelor).

c) Considerăm o secțiune a dispozitivului Young, cu un plan perpendicular pe cele două surse secundare S_1 și S_2, avînd forma unor fante fine, paralele (v. figura F.B.36). Întrucît spațiul în care se observă franjele de interferență pe ecranul de

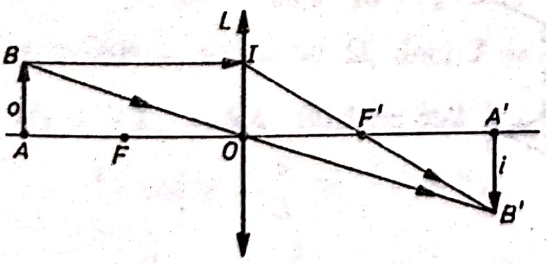


Fig. F.B.35

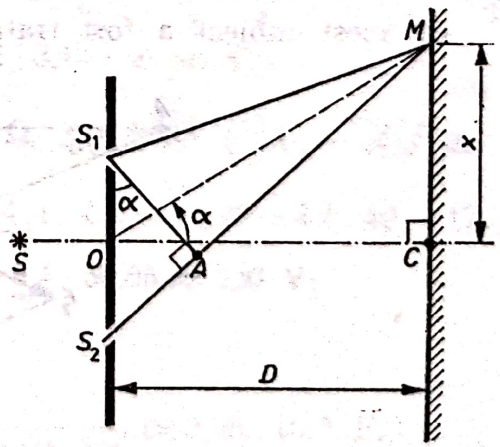


Fig. F.B.36

observație are dimensiuni $MC = x$ mult mai restrînse decît distanța D de la planul fantelor la ecranul de observație, frontul S_1A, al undelor incidente în punctul M de observație de la fantele S_1 și S_2, este aproximativ perpendicular pe direcțiile

S_1M și S_2M ale celor două fascicule, triunghiurile S_1AS_2 și OMC fiind practic asemenea, deci $\frac{a}{D} = \frac{S_1S_2}{OC} \approx \frac{S_1S_2}{OM} = \frac{S_2A}{MC} = \frac{d}{x}$. Prin urmare diferența drumurilor oscilațiilor electromagnetice incidente în punctul M de observație, de la sursele secundare S_2 și S_1, este $S_2A = d = \frac{ax}{D}$.

Pentru ca în punctul M să se observe o franjă luminoasă, este necesar ca diferența de drum, d, să fie un multiplu întreg al lungimii de undă λ a radiației incidente, adică $d = \frac{ax}{D} = k\lambda$, unde $k =$ întreg. Deci pentru franja luminoasă de ordinul k rezultă că $x_k = k \cdot \frac{\lambda D}{a}$, distanța dintre două franje luminoase succesive (interfranja) fiind $i = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - k \cdot \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$.

4°. a) Pentru expresia ecuației fundamentale a teoriei cinetice a gazelor v. răspunsul pentru subiectul XI.4.c.

b) $h\nu = E_{ex} + E_c = E_{ex} + eU_0$, unde h este constanta lui Planck, ν frecvența radiației monocromatice incidente, $h\nu$ energia unui foton absorbit, E_c energia cinetică a fotoelectronului emis, E_{ex} energia de extracție a acestuia, e sarcina electrică elementară, iar U_0 potențialul electric de tăiere (frînare) a curentului fotoelectric.

c) Acest subiect a fost tratat la XVII.5°.b.

5°. a) Dacă un sistem termodinamic este scos din starea de echilibru și se izolează de mediul exterior, atunci el revine întotdeauna, de la sine, în starea de echilibru și nu poate ieși din această stare fără acțiunea unor forțe exterioare (postulatul I al termodinamicii).

În starea de echilibru termodinamic, toți parametrii interni ai unui sistem sînt funcții de parametrii externi și de temperatură (postulatul II al termodinamicii), cu formularea echivalentă: „Parametrul T, care caracterizează starea de echilibru termodinamic a unui sistem și care are aceeași valoare în tot sistemul, independent de numărul de particule din sistem, se numește temperatură".

b) 1. Legile și principiile fizicii rămîn nemodificate atunci cînd sînt exprimate față de diverse sisteme inerțiale [postulatul (principiul) relativității]. 2. Valoarea vitezei luminii în vid este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale.

c) Acest subiect a fost tratat la VII.5°.b.

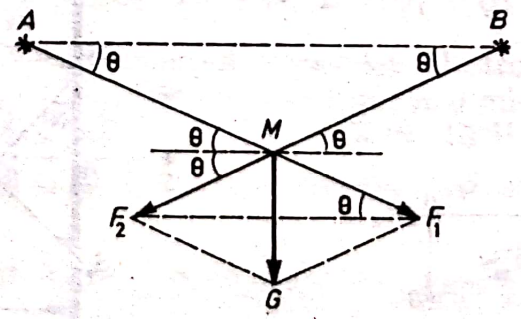


Fig F.B.37

XIX.1°. a) Lungimea firului în noua poziție de echilibru este (v. figura F.B.37) $l = 2 \cdot \frac{l_0}{2 \cos\theta} = \frac{l_0}{\cos\theta}$. Rezultă că $F_1 = \frac{ES}{l_0/2} \cdot \frac{l_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$. Deoarece $2\theta = 60°$,

la echilibru $F_1 = \frac{G}{2\sin\theta} = G$, deci $G = E \cdot S\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$, şi $m = \frac{ES}{g}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) =$

$= \frac{1{,}2 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{9{,}8}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right) \approx 0{,}758$ kg.

2°. a) Fie I_1, I_2 şi I intensităţile curenţilor care străbat sursele E_1, E_2, respectiv prin rezistorul R_2, cu sensurile indicate în figura F.B.38. Legile lui Kirchhoff scrise pentru ochiurile AE_1R_1B, respectiv AE_2B, şi pentru nodul A, ne dau:

$$E_1 = I_1R_1 - IR_2, \qquad E_2 = IR_2, \qquad I_2 = I + I_1.$$

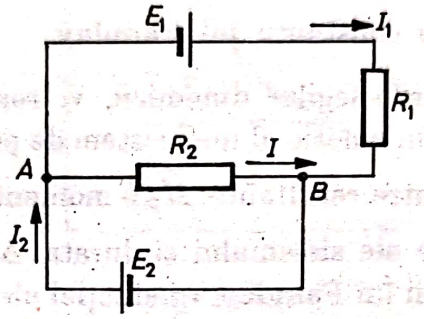


Fig. F.B.38

Din primele două ecuaţii, rezultă că:

$$I = \frac{E_2}{R_2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ A}, \quad I_1 = \frac{E_1 + E_2}{R_1} = \frac{6+4}{2} = 5 \text{ A},$$

iar din ultima ecuaţie rezultă că

$$I_2 = I + I_1 = 1 + 5 = 6 \text{ A}.$$

b) $Q = R_2I^2t = 4 \cdot 1^2 \cdot 60 = 240$ J.

c) $\Delta U = U_{+E_1} - U_{-E_2} = I_1R_1 = 5 \cdot 2 = 10$ V.

Observaţie. Deoarece electrodul pozitiv al sursei E_2 este legat direct (prin fire de rezistenţe neglijabile) cu electrodul negativ al sursei E_1, la acelaşi rezultat se ajunge şi pe calea: $\Delta U = U_{+E_1} - U_{-E_2} = E_1 - (-E_2) = E_1 + E_2 = 6 + 4 = 10$ V.

3°. a) $X_L = L\omega = L\,2\pi f = 255 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \approx 80{,}1\ \Omega$, $X_C = \frac{1}{C\omega} =$

$= \frac{1}{C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{63{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} \approx 50{,}05\ \Omega$, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \cong$

$\cong \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ \Omega$, deci $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{50} = 4{,}4$ A, $U_R = I \cdot R = 4{,}4 \cdot 40 = 176$ V,

$U_L = IX_C = 4{,}4 \cdot 80{,}1 \approx 352$ V, $U_C = IX_C = 4{,}4 \cdot 50{,}05 \approx 220$ V;

b) $\cos\varphi = \frac{R}{Z} \approx \frac{40}{50} = 0{,}8$;

c) $C_{acord} = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{L \cdot 4\pi^2f^2} \approx \frac{1}{255 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 50^2} \cong 3{,}98 \cdot 10^{-5}$ F.

4°. a) $\vec{F}_{12} = K \cdot \frac{m_1m_2}{r^3} \cdot \vec{r}_{21}$, unde $\vec{F}_{12}$ este forţa de atracţie a corpului 1 (de masă m_1) de către corpul 2 (de masă m_2), K este constanta atracţiei universale, $\vec{r}_{21}$

este raza vectoare a corpului 2 față de corpul 1, iar $r = |\vec{r}_{21}|$ este modulul razei vectoare $\vec{r}_{21}$ (distanța dintre cele două corpuri);

b) $I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, unde I_Δ este momentul de inerție al unui sistem rigid, format din n puncte materiale, față de axa Δ, m_i este masa punctului material i ($i = 1, 2, \ldots, n$), iar r_i este distanța de la punctul material i până la axa Δ;

c) $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot It$, unde m este masa de substanță (metal) depusă la catod în timpul t de un curent electric de intensitate I care străbate electrolitul, A este masa atomică a metalului, n este valența metalului (elementului), iar $F\left(\approx 96500 \frac{C}{\text{echivalent}}\right)$ este constanta lui Faraday.

5°. a) Pentru enunțurile legilor dinamicii, v. răspunsul subiectului III.5.a;

b) variația momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale în intervalul Δt este egală cu produsul dintre rezultanta $\vec{M}_F$ a momentelor forțelor care acționează asupra punctelor materiale ale sistemului și durata Δt: $\Delta\vec{L} = \vec{M}_F \cdot \Delta t$;

c) pentru enunțul legii lui Faraday a inducției electromagnetice, v. răspunsul subiectului XI.4.b.

XX.1°. a) Ecuația oscilației este de forma $y = A \sin \omega t$; defazajul este nul ($\varphi = 0$), deoarece, la $t = 0$, $y = 0$. Viteza oscilatorului la un moment dat este $v = \omega A \cos \omega t$. Pentru cele două momente t_1 și t_2 avem

$$y_1 = A \sin \omega t_1, \qquad y_2 = A \sin \omega t_2,$$
$$v_1 = A\omega \cos \omega t_1, \qquad v_2 = A\omega \cos \omega t_2;$$

prin ridicare la pătrat și însumare se obține $y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = A^2$ și $y_2^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2} = A^2$, sau $y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = y_2^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2}$, de unde rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{y_2^2 - y_1^2}} = \sqrt{\frac{0{,}04 - 64 \cdot 10^{-4}}{0{,}04 - 0{,}01}} = 1{,}058 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Amplitudinea este dată de $A = \sqrt{y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}} = \sqrt{0{,}01 + \frac{0{,}04}{1{,}12}} = 0{,}214$ m, deci ecuația de mișcare va fi $y = 0{,}214 \sin 1{,}058\, t$[m].

Constanta elastică este dată de relația $k = m\omega^2 = 0{,}2 \cdot 1{,}12 = 0{,}224 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

b) Accelerația la un moment dat este

$$a = -\omega^2 y \Rightarrow y = \frac{a}{\omega^2} = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{1{,}12} = 0{,}053 \text{ m}.$$

c) Energia cinetică $E_c = \frac{mv^2}{2}$, iar energia potențială $E_p = \frac{k}{2} y^2$. Egalîndu-le, se obține $m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = k^2 A^2 \sin^2 \omega t$, sau, punînd $k = m\omega^2$, $\cos^2 \omega t = \sin^2 \omega t$. Întrucît $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, rezultă $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}$ sau $\sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Accelerația va avea valoarea dată pentru $y = A \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{0{,}214}{\sqrt{2}} = 0{,}151$ m.

Scanned with OKEN Scanner

2°. a) Calculăm cantităţile de căldură schimbate de sistem cu exteriorul în cele trei transformări (figura F.B.39):

$$Q_{12} = L_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0 \qquad (V_2 > V_1)$$

$$Q_{23} = \nu C_p \Delta T = \nu C_p (T_3 - T_2) < 0 \quad (T_3 < T_2)$$

$$Q_{31} = \nu C_V \Delta T' = \nu C_V (T_1 - T_3) > 0 \quad (T_1 > T_3).$$

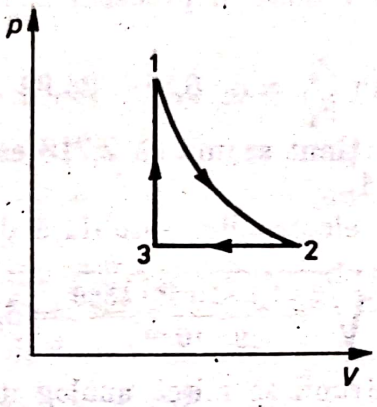


Fig. F.B.39

Gazul primeşte căldură în transformările $1 \to 2$ şi $3 \to 1$, deci $Q_1 = Q_{12} + Q_{31}$ şi cedează în transformarea $2 \to 3$, deci $Q_2 = Q_{23}$. Randamentul va fi

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|\nu C_p (T_3 - T_2)|}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu C_V (T_1 - T_3)}.$$

Din ecuaţia de stare a gazelor ideale, $pV = \nu RT$, pentru o transformare izocoră rezultă $V\Delta p = \nu R \Delta T$, deci variaţia de temperatură în transformarea $3 \to 1$ este $\Delta T = \frac{V_1 \Delta p}{\nu R}$, unde $\Delta p = p_1 - p_2$ ($p_3 = p_2$). Ţinînd seama că $T_2 = T_1$, randamentul devine

$$\eta = 1 - \frac{C_p \frac{V_1}{R}(p_1 - p_2)}{\nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \frac{V_1}{R}(p_1 - p_2)} = 1 - \frac{\frac{7}{2}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}.$$

În obţinerea ultimei expresii am observat că $\frac{C_p}{C_V} = \gamma = \frac{7}{5}$ şi cum $C_p + C_V = R$, rezultă $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$.

Ţinînd seama că $p_1 V_1 = p_2 V_2$, randamentul devine

$$\eta = 1 - \frac{\frac{7}{2}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)}{\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)} = 1 - \frac{\frac{7}{2}\left(1 - \frac{1}{2{,}718}\right)}{\ln 2{,}718 + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{2{,}718}\right)} = 0{,}142 = 14{,}2\%.$$

b) $\Delta U_{23} = Q_{23} - L_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2) - p_2 (V_3 - V_2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuaţia generală a gazelor rezultă $T_3 - T_2 = \frac{p_2}{\nu R}(V_3 - V_2)$, deci

$$\Delta U_{23} = (V_1 - V_2)p_2\left(\frac{7}{2} - 1\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_1 V_1}{V_2}(V_1 - V_2) =$$

$$= \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1}{2{,}718} - 1\right) = -3{,}16 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Energia internă a gazului se reduce în procesul izobar (căldura cedată este mai mare decît lucrul primit).

c) $\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = \frac{\nu R T_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = 3 \cdot 8{,}31 = 24{,}93 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

În cursul calculului s-a ţinut seama că 2,718 este aproximativ e (baza logaritmilor naturali) şi ln e = 1.

3°. a) Viteza iniţială a electronilor este dată de

$$\frac{m v_0^2}{2} = eU_a \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_a}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4550}{9 \cdot 10^{-31}}} = 3{,}97 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) În condensator electronii se mişcă analog unei mişcări în cîmp gravitaţional. Pe verticală acţionează forţa $F = -eE = -e\frac{U}{d}$, care imprimă electronului acceleraţia $a = -\frac{eU}{md}$ dirijată către placa pozitivă (figura F.B.40). Pe

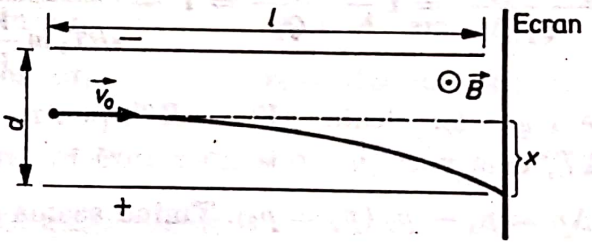


Fig. F.B.40

orizontală mişcarea este uniformă cu viteza v_0. În timpul $t = \frac{l}{v_0}$, în care electronul parcurge condensatorul, deplasarea pe verticală este

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{eU}{2md} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} = \frac{l^2}{4d} \cdot \frac{U}{U_a} = \frac{16 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4450} = 1{,}79 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1{,}79 \text{ mm}.$$

c) Forţa cu care electronul interacţionează cu un cîmp magnetic este forţa Lorentz $\vec{F}_m = e(\vec{v}_0 \times \vec{B})$, orientarea ei fiind normală la planul determinat de vectorii $\vec{v}_0$ şi $\vec{B}$. Pentru ca $\vec{F}_m$ să fie opusă ca sens forţei electrice $\vec{F}_e = e\vec{E}$, trebuie ca $\vec{B}$ să fie orientat perpendicular pe planul determinat de $\vec{v}_0$ şi $\vec{E}$, iar sensul lui $\vec{B}$ trebuie să fie spre observator (figura F.B.40).

Deplasarea laterală va fi nulă atunci cînd cele două forţe vor fi egale ca mărime, adică $eE = ev_0B$, de unde

$$B = \frac{E}{v_0} = \frac{U}{dv_0} = \frac{100}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}97 \cdot 10^7} \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Se numește kilomol cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în kilograme, este numeric egală cu masa moleculară relativă a substanței date.

b) Acest subiect a fost tratat la III.5°.a.

c) Condiția de rezonanță într-un circuit serie RLC este $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, sau $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, unde L este inductanța bobinei, C capacitatea condensatorului, iar ω_0 este frecvența de rezonanță.

5°. a) Nu mai este inclus în actuala program[illegible] analitică.

b) La gruparea în paralel (figura F.B.41) tensiunea pe fiecare rezistor este U. Din prima lege a lui Kirchhoff $I = I_1 + I_2 + I_3$ și notînd R rezistența echivalentă rezultă

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}; \text{ deci } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \text{ sau în general } \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

La gruparea în serie (figura F.B.42) intensitatea curentului este aceeași prin toți rezistorii. Conform celei de-a doua legi a lui Kirchhoff $U = U_1 + U_2 + U_3$ sau $IR = IR_1 + IR_2 + IR_3$, deci $R = R_1 + R_2 + R_3$, sau, în general, $R = \sum_i R_i$.

c) Condiția de conservare a impulsului unui sistem de puncte materiale este ca nici un punct al sistemului să nu fie în interacțiune cu corpuri exterioare sistemului (sistemul să fie izolat).

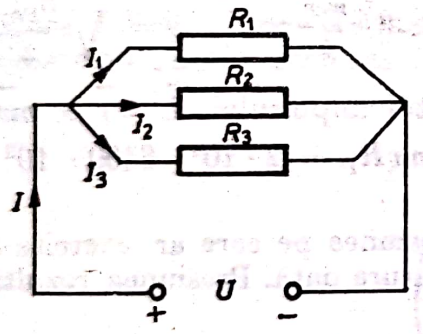


Fig. F.B.41

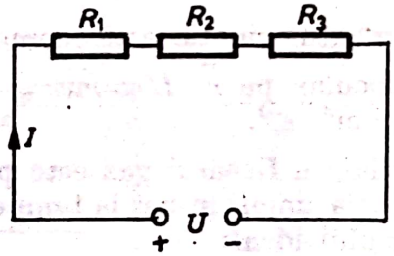


Fig. F.B.42

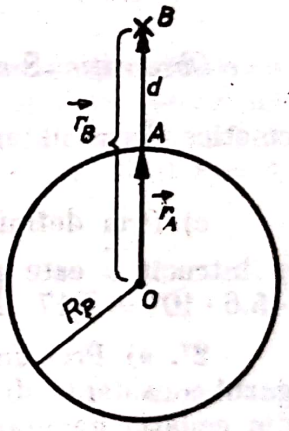


Fig. F.B.43

XXI.1°. a) Forța de interacțiune dintre Pămînt și corpul considerat este forța gravitațională $F = K\frac{mM}{r^2}$, unde r este distanța de la centrul Pămîntului la corp (centrul său). Lucrul mecanic efectuat la deplasarea pe distanța $d = r_B - r_A$ este $L = F_m d$, unde F_m este forța medie. În cazul de față forța medie este media geometrică a valorilor inițială și finală: $F_m = \sqrt{F_A F_B} = K\frac{mM}{r_A r_B}$. Întrucît $r_A = R_P$ și $r_B = 2R_P$ (figura F.B.43) rezultă $L = KmM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = KmM\frac{1}{2R_P}$. Prin definiție, greutatea unui corp este forța cu care este atras corpul de către Pămînt cînd el se află la suprafața acestuia: $mg = K\frac{mM}{R_P^2} \Rightarrow K = \frac{gR_P^2}{M}$. Atunci lucrul mecanic devine $L = mg\frac{R_P}{2} = 10^4 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{6400 \cdot 10^3}{2} = 3{,}13 \cdot 10^{11}$ J.

b) Viteza liniară trebuie să fie tangentă la traiectoria circulară de rază $2R_P$ (figura F.B.44) şi să aibă valoarea dată de condiţia de echilibru pe traiectorie, adică de egalitatea dintre forţa gravitaţională şi forţa centrifugă: $\frac{mv^2}{r} = K\frac{mM}{r^2}$.

Rezultă $v = \sqrt{\frac{KM}{r}} = \sqrt{\frac{gR_P^2}{2R_P}} = \sqrt{\frac{gR_P}{2}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 6400 \cdot 10^3}{2}} = 5{,}6 \cdot 10^3 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

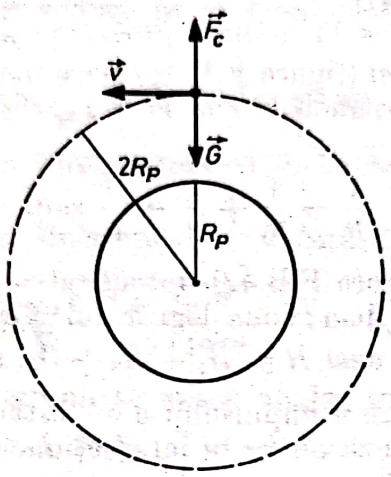


Fig. F.B.44

Observaţie. S-ar fi ajuns la acelaşi rezultat utilizînd ecuaţia variaţiei energiei cinetice. Întrucît energia cinetică iniţială este nulă, rezultă $\frac{mv^2}{2} = L \Rightarrow v = \sqrt{\frac{R_P g}{2}}$.

c) Prin definiţie momentul cinetic este momentul impulsului, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{mv}$, şi întrucît $\vec{v}$ este perpendicular pe $\vec{r}$, $L = mvr = 2mvR_P = 2 \cdot 10^4 \cdot 6400 \cdot 10^3 \cdot 5{,}6 \cdot 10^3 = 7{,}17 \cdot 10^{14} \ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2°. a) Presiunea parţială a fiecărui gaz este presiunea pe care ar exercita-o gazul considerat, dacă s-ar afla singur în vas la temperatura dată. Presiunea rezultă din ecuaţia generală a gazului ideal:

$p_{N_2} = \nu_{N_2}\frac{RT}{V}$ şi $p_{O_2} = \nu_{O_2}\frac{RT}{V}$; dar cum $\nu_{O_2} = \nu_{N_2}$, rezultă $p_{O_2} = p_{N_2} = \frac{p}{2} = \frac{10^5}{2} = 5 \cdot 10^4 \ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Scoţînd volumul din ecuaţia generală de stare, se obţine

$$V = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}} \cdot \frac{RT}{p_{O_2}} = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{32} \ \frac{8310 \cdot 800}{5 \cdot 10^4} = 3{,}32 \cdot 10^{-2} \ \text{m}^3.$$

b) Energia cinetică medie a mişcării de translaţie a moleculelor gazului fiind $(3/2)\,k_B T$, rezultă $\widetilde{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, unde s-a ţinut seama de relaţiile $k_B N_A = R$ şi $mN_A = \mu$. Raportul vitezelor pătratice medii pentru cei doi componenţi va fi

$$\sqrt{\frac{\widetilde{v^2}_{O_2}}{\widetilde{v^2}_{N_2}}} = \sqrt{\frac{\mu_{N_2}}{\mu_{O_2}}} = \sqrt{\frac{28}{32}} \cong 0{,}935.$$

c) Cele două gaze se comportă ca gaze ideale, deci, în orice transformare, sistemul se comportă ca şi cum ar fi compus dintr-un singur gaz. În transformarea adiabatică $TV^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$, de unde $T_1 = T\left(\frac{V}{V_1}\right)^{\gamma-1} = T\left(\frac{1}{32}\right)^{0,4} = T\left(\frac{1}{2^5}\right)^{2/5} = \frac{T}{2^2} = \frac{T}{4} = 200$ K.

3°. a) Puterea disipată în rezistor este $P = RI_{ef}^2$ şi va fi maximă atunci cînd amplitudinea curentului va fi maximă. Dar $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$.

Amplitudinea curentului este maximă cînd Z este minim, deci cînd $Z = R$, adică la rezonanţă:

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi\nu_0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{30 \cdot 10^{-3} \cdot 27 \cdot 10^{-6}}} =$$

$= 176{,}8$ Hz.

b) $I_{max} = \frac{U_0}{R}$ şi $(I_{ef})_{max} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, deci $P_{max} = R\,\frac{U_0^2}{2R^2} = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{400}{2 \cdot 2} = 100$ W.

c) Factorul de supratensiune sau factorul de calitate este dat de raportul dintre tensiunea la bornele capacităţii (inductanţei), în condiţii de rezonanţă, şi tensiunea aplicată circuitului:

$$Q = \left(\frac{U_C}{U}\right)_{\omega_0} = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{30 \cdot 10^{-3}}{27 \cdot 10^{-6}}} = 16{,}66.$$

4°. a) Ecuaţiile mărimilor care caracterizează mişcarea oscilatorie armonică se obţin din ecuaţiile mărimilor corespunzătoare mişcării circulare uniforme (figura F.B.45). Proiecţia mişcării circulare uniforme pe un diametru reprezintă o mişcare oscilatorie armonică: $y = r\sin\varphi = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, unde am notat $r = A$

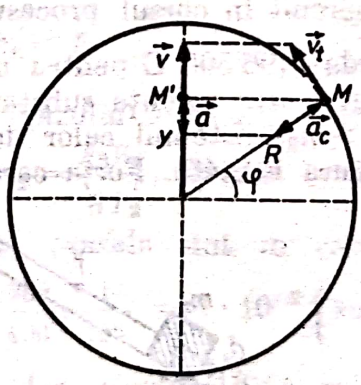


Fig. F.B.45

şi am ţinut seama că $\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}$; $v = v_t\cos\varphi = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0)$, unde am ţinut seama că viteza tangenţială este $v_t = \omega r = \omega A$; $a = a_c\sin\varphi = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$, unde am ţinut seama că acceleraţia centripetă este $a_c = -\omega^2 A$ (este orientată în sens opus razei vectoare);

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0),\quad E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

b) Randamentul unui motor termic este, prin definiție, raportul dintre lucrul mecanic L efectuat de motor și căldura Q_1 primită de la sursa caldă într-un ciclu: $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$, unde $Q_2 < 0$ este căldura cedată sursei reci. Pentru un ciclu Carnot, $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$, deci $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, unde T_1 este temperatura sursei calde, iar T_2 temperatura sursei reci.

c) Forța de interacțiune dintre două conductoare paralele parcurse de curent electric reprezintă forța electromagnetică cu care fiecare conductor interacționează cu cîmpul magnetic generat de celălalt conductor; astfel $F_1 = I_1 l B_2$ va reprezenta forța care se exercită pe o lungime l a conductorului 1 parcurs de curentul I_1.

Considerînd conductoarele foarte lungi, atunci cîmpul magnetic generat de conductorul prin care circulă curentul I_2 la distanța r (distanța dintre conductoare) este caracterizat de inducție $B_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I_2}{2\pi r}$, unde μ_0 este permeabilitatea vidului, iar μ_r permeabilitatea relativă a substanței. Introducînd în expresia forței, rezultă

$$F_1 = \frac{\mu_0 \mu_r I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Forța F_2 care acționează asupra conductorului parcurs de curentul I_2 va avea aceeași expresie, dar va fi de sens opus (este satisfăcută legea acțiunii și reacțiunii).

5°. a) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Momentul unei forțe în raport cu un punct din spațiu este produsul vectorial dintre vectorul de poziție $\vec{r}$ al forței, în raport cu punctul considerat, și forța $\vec{F}$.

b) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.

c) Echivalentul electrochimic K este constanta de proporționalitate dintre masa m depusă la catod în cursul unui fenomen de electroliză și cantitatea de electricitate Q care a trecut prin circuit în cursul procesului: $m = KQ$, $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}$, unde F este numărul lui Faraday (96 500 C pentru un echivalent-gram), A este masa atomică a substanței, iar n este valența substanței.

XXII.1°. a) Întrucît $m_1 > m_2$, sistemul celor două corpuri se va pune în mișcare în sensul forței G_1 (figura F.B.46). Forța care imprimă accelerație sistemului este $F = G_1 - G_t - \mu G_n$, unde $G_t = m_2 g \sin \theta$ și $G_n = m_2 g \cos \theta$. Scriind legea fundamentală a dinamicii $F = (m_1 + m_2)a$, rezultă

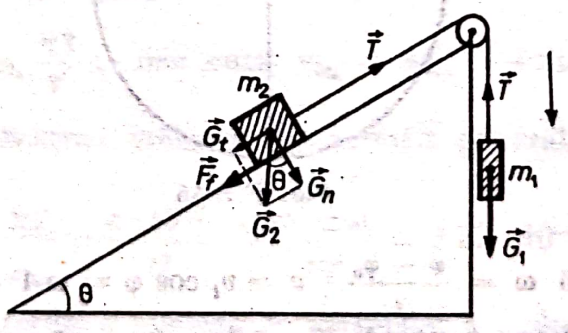


Fig. F.B.46

$$a = g \frac{m_1 - m_2(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{m_1 + m_2} = 10 \cdot \frac{1{,}5 - 0{,}5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1{,}5 + 0{,}5} = 5{,}62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Tensiunea în fir se obține scriind legea fundamentală a dinamicii pentru unul dintre cele două corpuri, de exemplu pentru corpul m_1: $G_1 - T = m_1 a$, deci $T = m_1(g - a) = 1{,}5 \cdot (10 - 5{,}62) = 6{,}57$ N.

c) $E_c = \frac{m_1 v^2}{2}$, unde viteza căpătată de corp în cădere liberă pe distanța h este $v = \sqrt{2gh}$, deci $E_c = \frac{m_1 v^2}{2} = m_1 gh = 1{,}5 \cdot 10 \cdot 20 = 300$ J.

Observație. Rezultatul se obține și dacă se aplică legea conservării energiei. Inițial corpul are numai energie potențială, $mgh (v_0 = 0)$, iar în starea finală corpul are numai energie cinetică ($h = 0$).

2°. a) Scriind ecuația de stare a gazului ideal din cele două baloane din figura F.B.47: $p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT_1$ și $p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT_2$, rezultă $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{p_1 \mu}{RT_1}$ și $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{p_2 \mu}{RT_2}$.

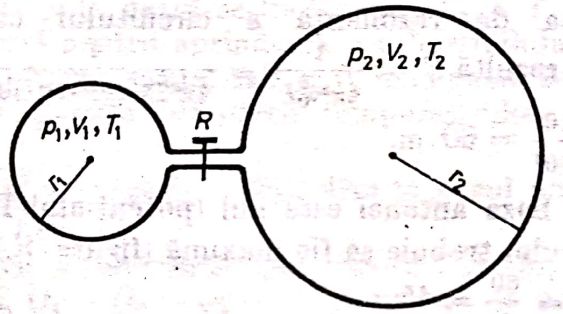


Fig. F.B.47

Prin împărțire membru cu membru, se obține

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$, de unde $p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{10^5 \cdot 200}{3{,}125 \cdot 10^4 \cdot 400} = 1{,}6$ N $\cdot$ m^{-2}.

b) Ecuațiile de stare a gazului ideal din cele două vase în starea finală sînt, respectiv, $\nu_1' = \frac{p_1' V_1'}{RT_1'}$ și $\nu_2' = \frac{p_2' V_2'}{RT_2'}$. Ținînd seama că $T_1' = T_1$, $V_1' = V_1$, $T_2' = T_2$, $V_2' = V_2$ și $p_1' = p_2'$ (vasele sînt în comunicație între ele), rezultă $\frac{\nu_1'}{\nu_2'} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{200}{400} \cdot \frac{1}{125} = 4 \cdot 10^{-3}$ (s-a ținut seama că volumul sferei de rază r este $\frac{4\pi r^3}{3}$), deci $\nu_1' = 4 \cdot 10^{-3} \nu_2' = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 10^{-5}$ kmol.

c) Energia internă a gazului ideal este $U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \nu N_A kT = \frac{3}{2} \nu RT$. Cantitatea de gaz din fiecare vas se modifică prin deschiderea robinetului. Variația numărului de molecule (a numărului de kilomoli) duce la variația energiei interne din fiecare vas, deși temperatura nu se modifică. Așadar, pentru cele două vase, $\Delta U_1 = \frac{3}{2} RT_1(\nu_1' - \nu_1)$ și $\Delta U_2 = \frac{3}{2} RT_2(\nu_2' - \nu_2)$, iar variația energiei interne a heliului din cele două vase va fi $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{3}{2} R[T_1(\nu_1' - \nu_1) + T_2'(\nu_2' - \nu_2)]$.

Numărul total de moli rămîne constant: $\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2' = 10^{-5} + 2{,}5 \cdot 10^{-3} = 2{,}51 \cdot 10^{-3}$ kmol. O a doua ecuație pentru ν_1 și ν_2 se obține din rapor-

Scanned with OKEN Scanner

tul densităților: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{m_1}{V_1}}{\frac{m_2}{V_2}} = \frac{\frac{\nu_1}{V_1}}{\frac{\nu_2}{V_2}} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$, de unde $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 =$

$= 3{,}125 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{125} = 250.$

Asociind cu ecuația $\nu_1 + \nu_2 = 2{,}51 \cdot 10^{-3}$ kmol, rezultă $\nu_2 + 250\nu_2 = 2{,}51 \cdot 10^{-3}$ sau $\nu_2 = \frac{2{,}51 \cdot 10^{-3}}{251} = 10^{-5}$ kmol și $\nu_1 = 2{,}51 \cdot 10^{-3} - 10^{-5} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ kmol. Variația energiei interne devine

$$\Delta U = \frac{3}{2} 8310[400(10^{-5} - 2{,}5 \cdot 10^{-3}) + 200(2{,}5 \cdot 10^{-3} - 10^{-5})] = -6207{,}6 \text{ J}.$$

Energia internă a gazului scade, deoarece gazul evoluează de la sine (după deschiderea robinetului) către o nouă stare de echilibru mai stabilă.

3°. a) Frecvența de rezonanță a circuitului oscilant este dată de $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ de unde rezultă $C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 25 \cdot 10^{12} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \cong 2 \cdot 10^{-11} F = 20\,\text{pF}.$

b) $\lambda = \frac{c}{\nu_0} \cong \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6} = 60$ m.

c) Potențialul la baza antenei este nul (potențialul Pământului), iar la vîrf amplitudinea potențialului trebuie să fie maximă (figura F.B.48). Astfel înălțimea l a firului este $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{60}{4} = 15$ m.

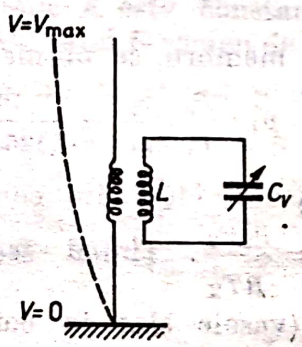


Fig. F.B.48

4°. a) Teorema impulsului pentru un punct material are expresia $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, unde $\Delta\vec{p}$ este variația impulsului punctului material în timpul Δt de acțiune a forței (constante) $\vec{F}$.

Considerăm un sistem de n puncte materiale. Asupra unui punct material i acționează atît o forță externă $\vec{F}_i$ cît și o forță internă $\vec{\mathcal{F}}_i$, datorată interacțiunii cu celelalte puncte ale sistemului. Variația impulsului punctului i va fi $\Delta\vec{p}_i = (\vec{F}_i + \vec{\mathcal{F}}_i)\Delta t$. Însumînd pentru toate punctele sistemului, rezultă $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, unde $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ este impulsul total al sistemului, iar $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ este suma tuturor

forţelor externe care acţionează asupra punctelor sistemului (s-a ţinut seama de faptul că $\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathcal{F}}_i = 0$, conform principiului acţiunii şi reacţiunii).

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat, atunci $\vec{F} = 0$ şi deci $\Delta\vec{p} = 0$, sau $\vec{p}$ = constant. Cu alte cuvinte, „Impulsul total al unui sistem de puncte materiale, izolat, se conservă".

b) Conform principiului întîi al termodinamicii, în orice transformare variaţia ΔU a energiei interne depinde numai de stările iniţială şi finală, fiind independentă de stările intermediare şi anume, este egală cu suma algebrică a lucrului mecanic şi căldurii schimbate de sistem cu exteriorul în cursul transformării: $\Delta U = Q - L$.

Un proces adiabatic este o transformare în care nu există schimb de căldură între sistem şi exterior, $Q = 0$, deci $\Delta U = -L$. Dacă $L < 0$, adică dacă gazul este comprimat adiabatic, $\Delta U > 0$, gazul se încălzeşte, $T_2 > T_1$. Acest fenomen este utilizat în motoarele Diesel pentru aprinderea combustibilului. Dacă $L > 0$, gazul se dilată, iar energia lui internă scade, $\Delta U < 0$, deci gazul se răceşte. Destinderea adiabatică este utilizată pentru obţinerea temperaturilor coborîte, inclusiv în cazul lichefierii gazelor.

La un gaz ideal $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1)$, deci în cazul unei transformări adiabatice $L = -\nu C_V(T_2 - T_1)$.

c) La legarea în serie a condensatorilor (figura F.B.49), sarcina de pe fiecare condensator este aceeaşi, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Diferenţa de potenţial U la bornele grupării este egală cu suma diferenţelor de potenţial U_i pe fiecare condensator: $U = U_1 + U_2 + U_3$. Ţinînd seama de relaţia $C = \frac{Q}{U}$, rezultă $\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$ sau $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$.

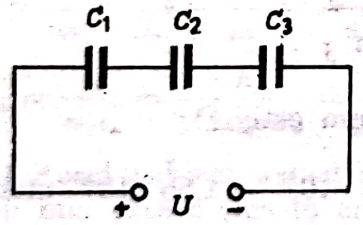


Fig. F.B.49

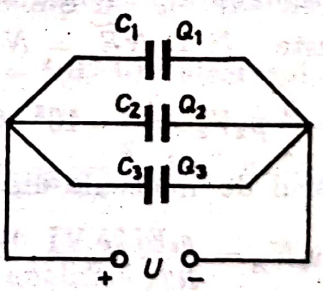


Fig. F.B.50

La gruparea în paralel (figura F.B.50), tensiunea este aceeaşi pe fiecare condensator, $U = U_1 = U_2 = U_3$, deci sarcina totală este $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Ţinînd seama de ecuaţia $Q = CU$, rezultă $CU = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3$ sau $C = \sum_i C_i$.

5°. a) În limita deformărilor elastice, efortul unitar $\frac{F}{S}$ este direct proporţional cu alungirea relativă $\frac{\Delta l}{l_0}$, adică $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$, unde E este modulul de elasticitate (modulul lui Young), S secţiunea probei, $\Delta l = l - l_0$ alungirea, iar l_0 lungimea iniţială.

b) $E_c = \frac{m\widetilde{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$; aici $\widetilde{v^2}$ este viteza pătratică medie, m masa unei molecule, k constanta lui Boltzmann, iar T temperatura absolută la care se află gazul.

c) $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$; aici Q este mărimea sarcinii punctuale, ε_0 permitivitatea vidului, ε_r permitivitatea relativă a mediului, iar r distanța de la sarcina Q la punctul în care potențialul este V.

XXIII.1°. a) Din ecuația termică de stare a gazului ideal rezultă $m = \frac{\mu pV}{RT}$, deci cantitatea de gaz consumată din butelie este

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\cdot\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) = \frac{4\cdot 60\cdot 10^{-3}}{8310}\cdot\left(\frac{1{,}5\cdot 10^7}{300} - \frac{10^6}{280}\right) = 1{,}34 \text{ kg}.$$

b) Drumul liber mediu este dat de ecuația $\widetilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0}$, unde σ este raza moleculară, iar n_0 numărul de molecule din unitatea de volum. Făcînd raportul valorilor corespunzătoare celor două situații rezultă

$$\frac{\widetilde{\lambda}_2}{\widetilde{\lambda}_1} = \frac{n_{0_1}}{n_{0_2}} = \frac{\nu_1\frac{N_A}{V}}{\nu_2\frac{N_A}{V}} = \frac{\frac{p_1}{RT_1}}{\frac{p_2}{RT_2}} = \frac{p_1T_2}{p_2T_1} = \frac{1{,}5\cdot 10^7\cdot 280}{10^6\cdot 300} = 14.$$

Viteza pătratică medie este dată de

$$\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \text{ de unde } \sqrt{\frac{\widetilde{v_1^2}}{\widetilde{v_2^2}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{300}{280}} = 1{,}035.$$

c) Notînd cu $\widetilde{E_c}$ energia medie moleculară, energia gazului format din N molecule este $U = N\widetilde{E_c} = N\frac{3kT}{2}\cdot\frac{3}{2}\nu N_A kT = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$. Pentru starea finală, $U = \frac{3}{2}p_2V_2 = \frac{3}{2}\cdot 10^6\cdot 60\cdot 10^{-3} = 9\cdot 10^4$ J.

Numărul de molecule din unitatea de volum este

$$N_2 = \nu_2 N_A = \frac{p_2V}{RT_2}N_A = \frac{106\cdot 60\cdot 10^{-3}}{8310\cdot 280}\cdot 6{,}02\cdot 10^{26} = 1{,}55\cdot 10^{25} \text{ molecule}.$$

2°. a) Randamentul ciclului Carnot este $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ sau $\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta$. Asociind cu ecuația $T_1 - T_2 = 350$ K, rezultă $T_1 = \frac{T_1 - T_2}{\eta} = \frac{350}{0{,}55} = 636{,}4$ K și $T_2 = 636{,}4 - 350 = 286{,}4$ K.

b) Pentru izoterma $1 \to 2$ (figura F.B.51), $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1}$, deci $Q_1 = T_1\Delta S$, iar pentru izoterma $3 \to 4$ $\Delta S = \frac{Q_2}{T_2}$, de unde $Q_2 = -T_2\Delta S = -286{,}4\cdot 8310 = -234$ kJ. Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este $L = Q_1 - |Q_2| = \Delta S(T_1 - T_2) = 8{,}31\cdot 10^3\cdot 350 = 2908{,}5$ kJ. (În transformările adiabatice sistemul nu schimbă căldură cu exteriorul.)

Scanned with OKEN Scanner

c) Transferul de căldură către sursa rece se produce în transformarea izotermă $3 \to 4$. Raportul cerut este $\frac{p_3}{p_4} = \frac{V_4}{V_3}$. Din ecuaţia $\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} = \frac{-\nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_2}$ rezultă $\ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{\Delta S}{\nu R} = -\frac{8{,}31 \cdot 10^3}{1 \cdot 8310} = -1$, deci $\frac{V_4}{V_3} = e^{-1}$ şi $\frac{p_4}{p_3} = e^1 \cong 2{,}718$.

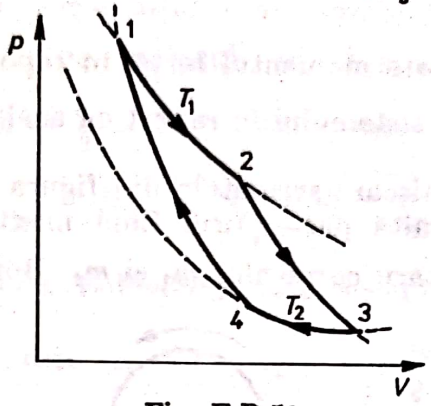


Fig. F.B.51

3°. a) Tensiunea de frînare U_s împiedică fotoelectronii să ajungă la anod, dacă energia lor cinetică este mai mică decît eU_s, unde e este sarcina electronului. Va exista curent fotoelectric numai dacă $\frac{mv_e^2}{2} \geqslant eU_s$.

Conform legii conservării energiei în procesul fotoelectric (ecuaţia lui Einstein), vom avea $h\nu = eU_0 + \frac{mv_e^2}{2}$, de unde $\frac{mv_e^2}{2} = h\nu - eU_0$. Înlocuind $\nu = \frac{c}{\lambda}$, vom obţine $eU_s = h\frac{c}{\lambda} - eU_0$, de unde $\lambda = \frac{hc}{e(U_s + U_0)} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}88} = 3{,}199 \cdot 10^{-7}$ m $= 319{,}9$ nm.

b) Dacă w este energia radiantă incidentă în timpul t, atunci numărul de fotoni incidenţi, deci şi numărul de fotoelectroni emişi în unitatea de timp, este

$$N_f = \frac{w}{th\nu} = \frac{w\lambda}{thc} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}199 \cdot 10^{-7}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1{,}6 \cdot 10^{16} \text{ electroni} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) $\lambda_B = \frac{\lambda}{m_e v_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU_s}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5}} = 10^{-9}$ m $= 1$ nm.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°.b şi IV.4°.b.
b) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.
c) Acest subiect a fost tratat la IV.4°.c.

5°. a) Pentru aspectul corpuscular sînt caracteristice energia ε şi impulsul p, în timp ce, pentru aspectul ondulator sînt caracteristice lungimea de undă λ şi frecvenţa ν. Între aceste mărimi există relaţiile $\varepsilon = h\nu$ şi $p = \frac{h}{\lambda}$, unde h este constanta lui Planck. În cazul fotonului $\lambda = \frac{c}{\nu}$, deci $p = \frac{h\nu}{c} = \left(\frac{h\nu}{c^2}\right)c$. Atribuind fotonului masa $m_f = \frac{h\nu}{c^2}$, rezultă $\varepsilon = m_f c^2$.

b) Presiunea exercitată de un gaz asupra pereţilor vasului în care se află este dată de relaţia $p = \frac{1}{3} nm\tilde{v^2} = \frac{2}{3} \cdot n\frac{m\tilde{v^2}}{2} = nk_B T$, unde n este numărul de

molecule din unitatea de volum, m masa unei molecule, $\widetilde{v^2}$ viteza pătratică medie, iar T temperatura absolută a gazului.

c) Conform primului principiu al termodinamicii, $\Delta U = Q - L$. Într-o transformare adiabatică $Q = 0$, deci $\Delta U = -L$. Aici ΔU este variaţia energiei interne, iar L şi Q sînt lucrul mecanic şi, respectiv, căldura schimbate de sistem cu exteriorul în procesul considerat.

XXIV.1°. a) Pentru mişcarea de rotaţie legea fundamentală a dinamicii devine $\vec{M}_F = I\vec{\varepsilon}$ unde $\vec{M}_F$ este momentul forţei în raport cu centrul de rotaţie, I este momentul de inerţie al sistemului în raport cu acelaşi punct, iar $\vec{\varepsilon}$ este acceleraţia unghiulară.

Forţele care pun în mişcare scripetele din figura F.B.52 sînt T_2 şi T_1 deci $M_F = (T_2 - T_1)R$. Pe de altă parte, firul fiind inextensibil, vom avea $a = r\varepsilon$, unde a este acceleraţia mişcării corpurilor m_1 şi m_2. Rezultă $T_2 - T_1 = I\frac{a}{R^2}$ (1).

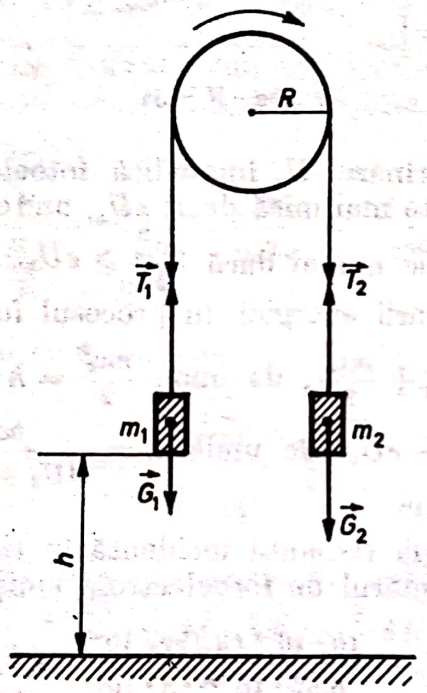


Fig. F.B.52

Ecuaţiile fundamentale pentru corpurile m_1 şi m_2 sînt $T_1 - G_1 = m_1 a$ şi, respectiv, $G_2 - T_2 = m_2 a$. Prin adunare, rezultă $T_1 - T_2 = m_1(g+a) + m_2(a-g)$ (2). Însumînd ecuaţiile (1) şi (2) obţinem $0 = I\frac{a}{k^2} + m_1(g+a) - m_2(g-a)$, de unde

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = 10\frac{0{,}3 - 0{,}2}{0{,}2 + 0{,}3 + \frac{5\cdot 10^{-4}}{0{,}01}} = 1{,}818 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Tensiunile în fire vor fi $T_1 = m_1(a+g) = 0{,}2\cdot(10 + 1{,}818) = 2{,}36$ N şi $T_2 = m_2(g-a) = 0{,}3\cdot(10 - 1{,}818) = 2{,}45$ N.

b) Fiecare corp parcurge o distanţă $S = \frac{1}{2}d$ în mişcare cu acceleraţia a, fără viteză iniţială, deci

$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}at^2, \text{ de unde } t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{1{,}83}{1{,}818}} = 1{,}003 \text{ s} \approx 1 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Momentul cinetic este dat de

$$J = I\omega = I\varepsilon t = I\,\frac{at^2}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}818 \cdot 1}{0{,}1} = 9{,}09 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) În momentul ruperii firului viteza celor două corpuri are aceeaşi mărime, $v_0 = at = 1{,}818\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, iar ele se află la înălţimile $h_{01} = h + \frac{d}{2}$ şi $h_{02} = h - \frac{d}{2}$.

Pentru corpul 1 ecuaţia înălţimii va fi $h_1 = h_{01} + v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$. În final $h_1 = 0$, deci $\frac{gt_1^2}{2} - v_0 t_1 - h - \frac{d}{2} = 0$. Soluţia acestei ecuaţii este

$$t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + g(2h + d)}}{g}.$$

Numai valoarea cu + în faţa radicalului este acceptabilă, deci timpul total de mişcare al corpului m_1 este $t_1' = t + t_1 = t + \frac{v_0}{g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g(2h + d)}{v_0^2}}\right) =$

$$= 1 + \frac{1{,}818}{10} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{10(2 \cdot 4 + 1{,}83)}{1{,}818^2}}\right) \cong 2{,}189\ \text{s}.$$

Pentru corpul 2 ecuaţia înălţimii este $h_2 = h_{02} - v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$. Pentru $h_2 = 0$ rezultă $gt_2^2 + 2v_0 t_2 - 2h + d = 0$. Soluţia acestei ecuaţii este

$$t_2 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + g(2h - d)}}{g}.$$

Numai valoarea cu + în faţa radicalului este acceptabilă, deci timpul cît durează mişcarea corpului m_2 este $t_2' = t + t_2 = t + \frac{v_0}{g} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{g(2h - d)}{v_0^2}} - 1\right) =$

$$= 1 + \frac{1{,}818}{10}\left(\sqrt{1 + \frac{10(2{,}4 - 1{,}83)}{1{,}818^2}} - 1\right) \cong 1{,}642\ \text{s}.$$

2°. a) Scriind $p_1 = aV_1$ şi $p_2 = aV_2$ şi făcînd raportul lor rezultă

$$p_2 = \frac{p_1 V_2}{V_1} = p_1 \frac{3V_1}{V_1} = 3p_1 = 9 \cdot 10^4\ \text{N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

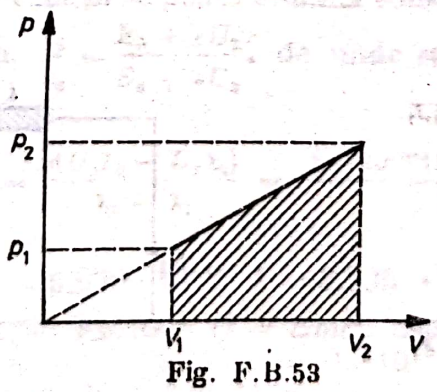


Fig. F.B.53

b) Lucrul mecanic efectuat de gaz este egal cu aria haşurată pe figura F.B.53. Aceasta este un trapez, deci

$$L = \frac{(p_2 + p_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{4p_1 \cdot 2V_1}{2} = 4p_1 V_1 = 4 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 0{,}3 = 3{,}6 \cdot 10^4\ \text{J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Variația energiei interne depinde numai de temperaturile finală T_2 și inițială T_1 indiferent de tipul de transformare, adică $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1)$. Considerînd căldura specifică molară la volum constant $C_V = \frac{3}{2}R$, ecuația devine $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(9p_1V_1 - p_1V_1) = 12p_1V_1 = 10{,}8 \cdot 10^4$ J. Dar $\Delta U = Q - L$, deci $Q = \Delta U + L = 16p_1V_1 = 14{,}4 \cdot 10^4$ J.

3°. Legea conservării impulsului pentru acest caz este $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$. Întrucît ciocnirea este frontală, $p_2 = 0$ și ecuația devine $mv_1 = m\frac{v_1}{4} + Mv$ (1).

Legea conservării energiei în acest caz va fi $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{32} + \frac{Mv^2}{2}$ (2).

Ecuațiile (1) și (2) se mai pot scrie $3mv_1 = 4Mv$ și $15mv_1^2 = 16\,Mv^2$. Împărțind membru cu membru cea de-a doua ecuație la prima, rezultă $5v_1 = 4v$, de unde $v = \frac{5v_1}{4}$, care înlocuită în prima ecuație conduce la $3mv_1 = 4M\frac{5v_1}{4}$, de unde $M = \frac{3m}{5} = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9$ g.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la IX.5°c.

b) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.

c) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.

5°. a) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.

b) Din ecuațiile pentru transformările simple ale unui gaz ideal se obține o dependență între parametrii de stare ai gazului ideal aflat într-o stare de echilibru. Pentru a obține această ecuație considerăm două stări ale gazului, caracterizate de parametrii p_0, V_0, T_0 și, respectiv, p, V, T. Unim cele două stări cu ajutorul unei succesiuni de două transformări simple oarecare, de exemplu o izotermă de temperatură T_0, urmată de o izocoră de volum V_1, conform figurii F.B.54. În starea intermediară, parametrii gazului sînt $T_A = T_0$, $V_A = V_1$ și p_A. Ecuațiile celor două transformări sînt $p_0V_0 = p_AV_A$ și $\frac{p_A'}{T_A} = \frac{p_1}{T_1}$. Făcînd înlocuirile rezultă $\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$. Introducînd notația $\frac{p_0V_{0\,m}}{T_0} = R$ unde $V_{0\,m}$ este volumul molar în condiții normale, rezultă $pV = \nu RT$, unde ν este numărul de moli.

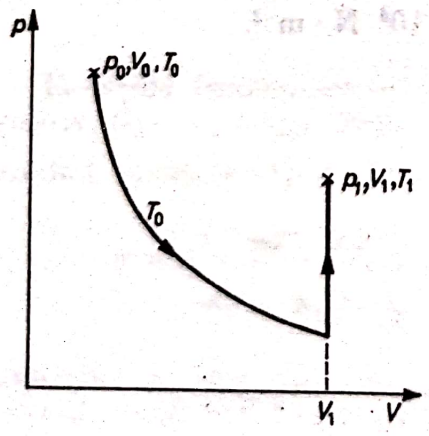


Fig. F.B.54

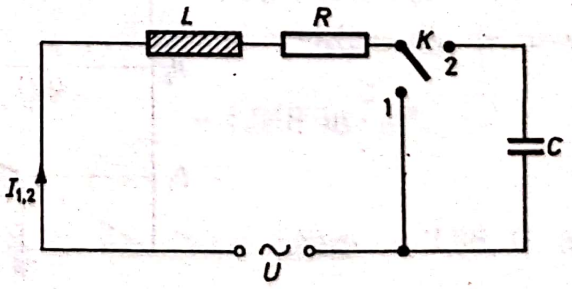


Fig. F.B.55

XXV.1°. a) Cînd comutatorul K din figura F.B.55 se află în poziția 1, curentul este dat de $I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$. Cînd comutatorul K se află în poziția 2,

curentul este $I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$. Egalînd cele două valori rezultă $R^2 + L^2\omega^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$, de unde $2L = \frac{1}{C\omega^2}$ sau

$$L = \frac{1}{2C\omega^2} = \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 4\pi^2 \cdot 50^2} = 0{,}253 \text{ H}. \quad R^2 + L^2\omega^2 = \frac{U^2}{I_1^2},$$

de unde $R = \sqrt{\frac{U^2}{I_1^2} - L^2\omega^2} = \sqrt{\left(\frac{220}{2}\right)^2 - 0{,}064 \cdot 4\pi^2 \cdot 50^2} \approx 76\ \Omega$.

b) $P_a = RI^2 = 76 \cdot 4 = 304$ W, iar $P_r = XI^2$. În primul caz $X = L\omega$, deci $P_r = L\omega I^2 = 0{,}253 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 4 = 317{,}9$ VAR. În cel de al doilea caz $X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2C\omega} - \frac{1}{C\omega} = -\frac{1}{2C\omega} = -L\omega$, deci puterea reactivă va fi aceeaşi.

c) Factorul de supratensiune este $Q = \left(\frac{U_L}{U}\right)_{\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R}$. Condiţia de rezonanţă este $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$. Înlocuind expresia $L = \frac{1}{2C\omega^2}$, rezultă $\omega_0 = \omega\sqrt{2}$. Factorul Q devine $Q = \frac{L\omega\sqrt{2}}{R} = \frac{0{,}253 \cdot 2\pi \cdot 50\sqrt{2}}{76} = 1{,}479$.

2°. a) Ecuaţia lui Einstein pentru efectul fotoelectric în cele două cazuri are formele $h\nu_1 = E_0 + eU_1$ şi, respectiv, $h\nu_2 = E_0 = eU_2$, unde E_0 este energia de extracţie. Scăzîndu-le membru cu membru, rezultă $h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1)$, de unde $h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{e(U_2 - U_1)}{\frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}(1{,}2 - 0{,}66)}{3 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{10^{10}}{2450} - \frac{10^{10}}{2790}\right)} = 6{,}50 \cdot 10^{-34}$ J · s.

b) La prag, energia fotonului este suficientă numai pentru extracţia fotoelectronului, $h\nu_0 = E_0$. Utilizînd prima ecuaţie, aceasta devine $h\frac{c}{\lambda_0} = h\frac{c}{\lambda_1} - eU_1$, de unde $\lambda_0 = \frac{c}{\frac{c}{\lambda_1} - \frac{eU_1}{h}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\frac{3 \cdot 10^8}{2790 \cdot 10^{-10}} - \frac{1{,}6 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}66}{6{,}5 \cdot 10^{-34}}} = 3{,}286 \cdot 10^{-7}$ m $= 328{,}6$ nm.

c) Din primele două ecuaţii se poate elimina constanta lui Planck prin împărţire membru cu membru, $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{E_0 + eU_1}{E_0 + eU_2}$, de unde rezultă $E_0 = \frac{e(U_2\nu_1 - U_1\nu_2)}{\nu_2 - \nu_1} =$

$$= \frac{e\left(U_2\frac{c}{\lambda_1} - U_2\frac{c}{\lambda_2}\right)}{\frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1}} = \frac{e(U_2\lambda_2 - U_1\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}(1{,}27 \cdot 2450 - 0{,}66 \cdot 2790)}{2790 - 2450} =$$

$$= 5{,}976 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3{,}735 \text{ eV}.$$

3°. a) Conform ecuaţiei Einstein $Q = \Delta mc^2$, deci $Q = c^2(m_{Po} - m_{Pb} - m_\alpha) =$
$= c^2u(211{,}98887 - 207{,}97665 - 4{,}00260) = 9 \cdot 10^{16} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}62 \cdot 10^{-3} =$
$= 1{,}437 \cdot 10^{-12}$ J $= 8{,}98 \cdot 10^6$ eV $= 8{,}98$ MeV.

b) Întrucît nucleul de poloniu este în repaus, înseamnă că impulsurile nucleului de plumb şi particulei α sînt egale şi de sens opus (conservarea impulsului), $p_\alpha = p_{Pb}$. Pe de altă parte, energia Q rezultată din reacţie revine celor două particule finale ca energie cinetică, $Q = E_{c\,\alpha} + E_{c\,Pb}$. Utilizînd relaţia dintre energia

Scanned with OKEN Scanner

cinetică și impuls, $E_c = \frac{p^2}{2m}$, aceasta devine $Q = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_{Pb}^2}{2m_{Pb}}$. Cum $p_\alpha = p_{Pb}$, rezultă $p_{Pb} = \sqrt{\frac{Q}{\frac{1}{2m_\alpha} + \frac{1}{2m_{Pb}}}}$. Dar $p_{Pb} = m_{Pb} v_{Pb}$, deci

$$v_{Pb} = \frac{p_{Pb}}{m_{Pb}} = \sqrt{\frac{2Qm_\alpha}{m_{Pb}(m_\alpha + m_{Pb})}} = 3{,}96 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Forța exercitată de cîmpul magnetic de inducție $\vec{B}$ asupra particulei α este forța Lorentz $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ a cărei mărime este $F = qvB = 2ev_\alpha B$. Raza traiectoriei circulare descrise de particula α se obține din condiția de echilibru pe traiectorie $F = F_c$ sau $2ev_\alpha B = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{r}$. Rezultă $r = \frac{m_\alpha v_\alpha}{2eB}$. Utilizînd relația $p_\alpha = p_{Pb}$, adică $m_\alpha v_\alpha = m_{Pb} v_{Pb}$, rezultă $r = \frac{m_{Pb} v_{Pb}}{2eB} = \frac{207{,}97665 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}96 \cdot 10^5}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 0{,}427$ m.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

b) Acest subiect a fost tratat la IV.4°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la VII.5°.c.

5°. a) Considerăm două lentile subțiri care au axul optic comun și care se află una față de alta la distanța d. Construcția imaginii unui obiect AB așezat perpendicular pe axa optică este arătată în figura F.B.56. Atunci $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'}$, unde f_1 și f_2 sînt distanțele focale ale celor două lentile subțiri. Adunînd cele două relații și luînd în considerație că $d = x_2 + (-x_1')$, se obține $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{d + x_1'} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'}$.

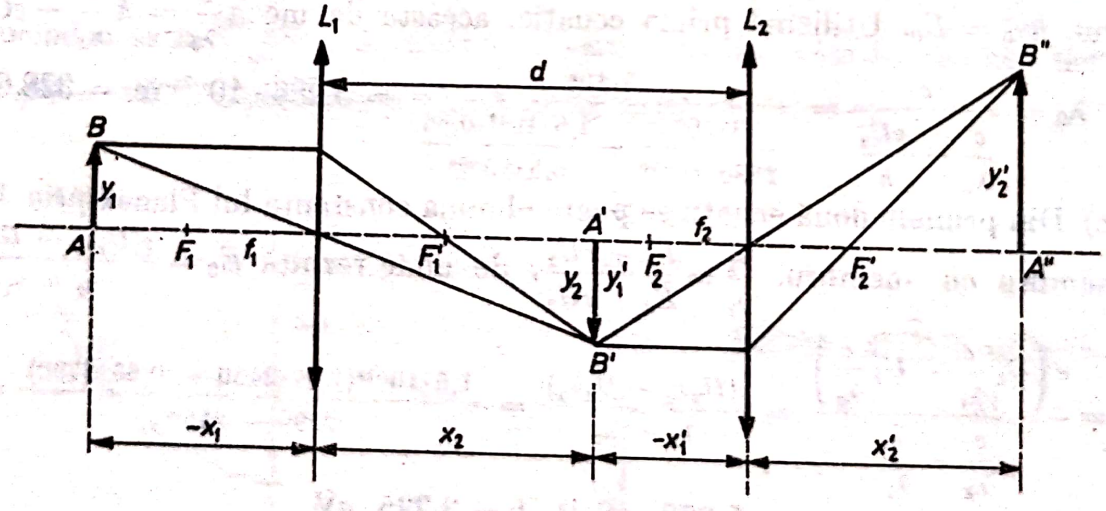


Fig. F.B.56

Pentru cazul în care $d = 0$, deci cînd sistemul este format din lentile subțiri lipite, relația devine $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1}$. Deoarece x_2' reprezintă distanța de la sistem la imagine, iar x_1 distanța de la sistem la obiect, partea din stînga a egalității reprezintă convergența $\frac{1}{F}$ a sistemului, adică $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Generalizînd pentru un sistem de n lentile lipite, convergența sistemului va fi $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\ldots+\frac{1}{f_n}$.

b) Legea dezintegrării radioactive este $N=N_0e^{-\lambda t}$. Timpul după care numărul de atomi nedezintegrați devine jumătate din valoarea inițială, $N=\frac{N_0}{2}$, poartă numele de timp de înjumătățire, $T_{1/2}$. Înlocuind în expresia legii dezintegrării, rezultă $\frac{1}{2}=e^{-\lambda T_{1/2}}$. Logaritmînd, se obține $\ln 2=\lambda T_{1/2}$ sau $T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}$.

XXVI.1°. a) Nu este inclus în actuala programă analitică.

b) Conform primului principiu al termodinamicii $\Delta U=Q-L$. Oricare ar fi transformarea suferită de gazul ideal, variația energiei interne depinde numai de temperaturile stărilor finală și inițială. Întrucît în transformarea izocoră $\Delta V=0$, deci $L=0$, rezultă $\Delta U=\nu C_V\Delta T$, unde ν este numărul de moli, iar C_V căldura specifică molară a gazului. În transformarea izobară $\Delta U=Q_p-p\Delta V=$ $=\nu C_p\Delta T-p\Delta V$. Din ecuația de stare a gazului scrisă pentru cele două stări caracterizate de parametrii p, V_1, T_1 și p, V_2, T_2, rezultă $p\Delta V=\nu R\Delta T$. Variația energiei interne devine $\Delta U=\nu\Delta T(C_p-R)$. Ținînd seama de relația Robert-Mayer $C_p-R=C_V$, rezultă $\Delta U=\nu C_V\Delta T$. Dacă ΔT are aceeași valoare, ΔU este același indiferent de transformarea care leagă stările caracterizate de temperaturile T_2 și T_1. În procesul izoterm $\Delta T=0$, deci $\Delta U=0$.

c) Ecuațiile celor două unde care interferă într-un punct P sînt $E_1=E_0\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_1}{c}\right)$ și $E_2=E_0\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_2}{c}\right)$, unde r_1 și r_2 sînt distanțele de la sursele S_1 și S_2 la punctul P. Oscilația rezultantă în P va fi descrisă de suprapunerea (însumarea) celor două oscilații incidente: $E=E_1+E_2=E_0\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_1}{c}\right)+\right.$ $\left.+\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_2}{c}\right)\right]=2E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{r_2-r_1}{2c}\right)\cdot\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r_1+r_2}{2c}\right)$. Amplitudinea acestei oscilații este $A=2E_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{r_2-r_1}{2c}\right)=2E_0\cos\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$. Intensitatea rezultantă în P este $I\sim A^2=4E_0^2\cos^2\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$. Intensitatea luminoasă I va fi maximă în P și egală cu $4E_0^2$, atunci cînd $\cos^2\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=1$, deci cînd $r_2-r_1=2k\frac{\lambda}{2}$, unde k este un număr întreg ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$).

Intensitatea luminoasă va fi minimă, $I=0$, cînd $\cos^2\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=0$, deci cînd $r_2-r_1=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$.

Diferența r_2-r_1 poartă numele de diferență de drum geometric. Dacă n este indicele de refracție al mediului în care se propagă undele, atunci în locul diferenței de drum geometric apare diferența de drum optic, $n(r_2-r_1)$, iar λ este tot lungimea de undă a radiației în vid.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la VII.5°.c.

b) Aproximația lui Gauss se mai numește și aproximație paraxială deoarece ea este valabilă pentru fascicule apropiate de axa optică și cît mai puțin divergente față de aceasta. Astfel de fascicule se numesc fascicule paraxiale.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.c.

3°. a) Louis de Broglie a emis ipoteza că orice particulă în mișcare (electron, proton, atom etc.) are și o comportare ondulatorie. Legătura dintre lungimea de undă asociată și impulsul p al particulei este $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$.

Dovada experimentală a acestei ipoteze au adus-o fenomenele de difracție pe care le generează fasciculele de particule. Să considerăm, de exemplu, un fascicul de electroni accelerați de o diferență de potențial U. Viteza acestora va fi $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, deci electronii fasciculului vor fi caracterizați de lungimea de undă asociată $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me}} \frac{1}{\sqrt{U}}$. Valoarea lungimii de undă λ este de același ordin de mărime cu lungimile de undă întîlnite în cazul radiației X. Elsasser în anul 1926 a arătat că difracția unui fascicul de electroni ar putea fi observată în același mod ca pentru radiațiile X, adică cu ajutorul unui cristal. Așezarea ordonată a atomilor cristalului în plane reticulare determină cristalul să se comporte ca o rețea tridimensională de difracție. Această idee a permis lui Davisson și Germer (1927) să pună în evidență experimental fenomenele de difracție de electroni.

Un fascicul de electroni generat de un tun electronic cade pe suprafața unui monocristal de nichel. Monocristalul, datorită așezării ordonate a atomilor, acționează ca o rețea de difracție. Distanța d dintre planele reticulare adiacente este de același ordin de mărime cu lungimea de undă λ. Fasciculul de electroni difractat (reflectat pe planele reticulare) sub unghiul α este captat de un cilindru Faraday (C), iar curentul de electroni este măsurat de galvanometrul (G). S-a constatat că pentru anumite unghiuri θ (figura F.B.57) se obțin maxime și minime de curent.

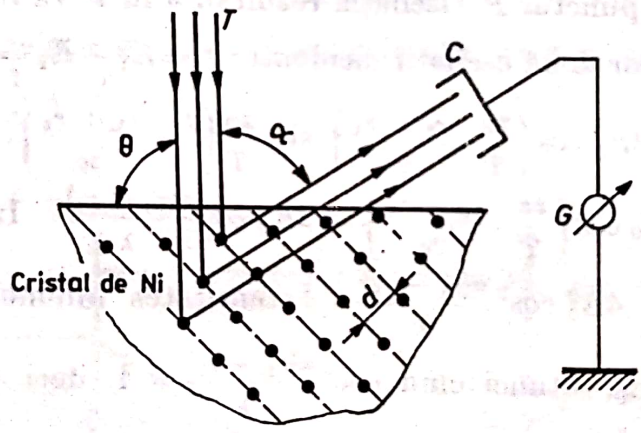


Fig. F.B.57

Din punct de vedere ondulatoriu aceasta se explică prin faptul că, pentru anumite direcții, intensitatea undei asociate electronilor este mai mare. Din teoria difracției se știe că intensitatea maximă a undelor rezultante după interferență se obține dacă diferența de drum δ este un număr întreg de λ, deci $\delta = 2d \sin \theta = n\lambda$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Dacă se modifică lungimea de undă prin variația potențialului de accelerare U, curentul arătat de galvanometru înregistrează maxime pentru diferite valori ale tensiunii de accelerare. Din caracteristicile maximelor și din caracteristicile cristalului de nichel se poate calcula lungimea de undă a unui fenomen ondulatoriu de difracție în condițiile observate. Valorile obținute coincid cu o precizie excelentă cu valorile calculate pentru lungimea de undă asociată.

Experiențe similare au fost făcute și cu alte particule și în toate cazurile s-a constatat o verificare foarte bună a relației lui de Broglie.

Scanned with OKEN Scanner

b) Manifestările corpusculare ale fenomenului luminos sînt descrise de particula de lumină numită foton. Caracteristicile fotonului sînt aceleași ca pentru alte particule, adică masă, impuls (viteză), energie. Energia fotonului este $\varepsilon = h\nu$. Conform relației lui Einstein dintre masă și energie, $\varepsilon = mc^2$, masa fotonului va fi $m_f = \frac{h\nu}{c^2}$. Viteza fotonului fiind c, impulsul său va fi $p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$, unde λ este lungimea de undă.

Caracteristicile corpusculare ale fotonului apar în toate interacțiunile microscopice ale radiațiilor cum ar fi: efectul fotoelectric, efectul Compton, excitarea atomilor și moleculelor prin absorbție de radiație.

c) Prin energie internă U a unui sistem termodinamic înțelegem suma dintre energiile cinetice ale mișcărilor termice, energiile potențiale determinate de forțe intermoleculare și energiile potențiale în cîmpurile de forțe exterioare ale tuturor moleculelor din care este format sistemul. Dacă sistemul are și o mișcare de ansamblu caracterizată de energia cinetică E_c și energia potențială E_p, atunci energia totală este suma dintre acestea și energia internă: $E_t = U + E_c + E_p$.

4°. a) Energia fotonilor este $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4{,}1 \cdot 10^{-11}} =$
$= 4{,}84 \cdot 10^{-15}$ J $= 3{,}02 \cdot 10^4$ eV.

b) Energia unui electron incident revine în întregime unui foton caracterizat de energie maximă, deci de lungime de undă minimă λ_0. Notînd cu U_a tensiunea de accelerare, vom scrie $eU_a = \varepsilon$, de unde $U_a = \frac{\varepsilon}{e} = \frac{4{,}84 \cdot 10^{-15}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 3{,}02 \cdot 10^4$ V.

c) Prin definiție $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_e}$, unde viteza electronului este cea obținută în urma procesului de accelerare la tensiunea U_a. Conform legii conservării energiei (în aproximația nerelativistă), $\frac{m_e v_e^2}{2} = eU_a$, de unde $v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$, deci

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U_a}} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3{,}02 \cdot 10^4}} = 7{,}05 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

5°. a) ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1p = {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$.

b) În această reacție se degajă o cantitate Q de energie care este legată de defectul de masă Δm prin ecuația lui Einstein $Q = \Delta mc^2$, unde Δm este diferența dintre masele particulelor care intră în reacție și masele celor care rezultă din reacție, adică $Q = c^2(m_{\text{Li}} + m_p - 2m_\alpha) = c^2\text{u}(7{,}0160053 + 1{,}0078522 - 2 \cdot 4{,}0026036) =$
$= 931{,}478 \cdot 0{,}186503 = 17{,}37$ MeV.

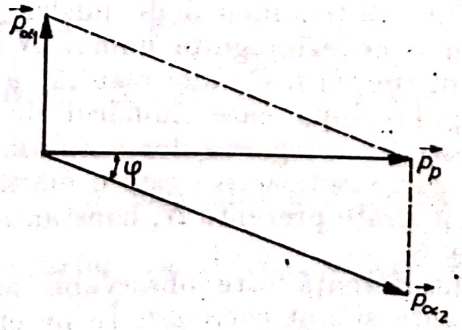


Fig. F.B.58

Considerînd nucleul de litiu în repaus, atunci impulsul protonului va fi egal cu suma impulsurilor celor două particule α, așa cum arată figura F.B.58.

Scanned with OKEN Scanner

Relația dintre impulsuri se va scrie $p_p^2 + p_{\alpha_1}^2 = p_{\alpha_2}^2$. Împărțind ecuația cu $2m_\alpha$ și ținînd seama că energia cinetică E_c este legată de impuls prin ecuația $E_c = p^2/2m$, ecuația devine $E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{p_p^2}{2m_\alpha}$, sau $E_{c_2} - E_{c_1} = E_{cp}\frac{2m_p}{2m_\alpha}$. (1)

O altă ecuație care leagă energiile celor două particule se obține ținînd seama că energia Q degajată în reacție este diferența dintre suma energiilor cinetice ale celor două particule și energia protonului proiectil, $Q = E_{c_1} + E_{c_2} - E_{cp}$, deci $E_{c_1} + E_{c_2} = Q + E_{cp}$. (2)

Scăzînd ecuația (1) din ecuația (2) rezultă $2E_{c_1} = Q + E_{cp}\left(1 - \frac{m_p}{m_\alpha}\right)$, de unde $E_{c_1} = \frac{Q}{2} + \frac{E_{cp}}{2}\cdot\frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha} = \frac{17{,}37}{2} + \frac{2}{2}\cdot\frac{4{,}0026036 - 1{,}0078522}{4{,}0026036} =$
$= 8{,}685 + 0{,}748 = 9{,}433$ MeV.

c) Conform figurii F.B.58, $\sin\varphi = \frac{p_{\alpha_1}}{p_{\alpha_2}} = \sqrt{\frac{E_{c_1}}{E_{c_2}}}$. Din ecuația (2) rezultă $E_{c_2} = Q + E_{cp} - E_{c_1} = 17{,}37 + 2 - 9{,}433 = 9{,}937$ MeV. Astfel, $\sin\varphi = \sqrt{\frac{9{,}433}{9{,}937}} =$
$= 0{,}974$, deci $\varphi \cong 77°$.

XXVII.1°. Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.b.

b) Ipoteza lui de Broglie extinde caracterul ondulatoriu de la foton la orice particulă elementară. Mișcării oricărei particule i se asociază o lungime de undă — numită lungime de undă de Broglie — dată de relația $\lambda_B = \frac{h}{p}$, unde h este constanta lui Planck, iar p este impulsul microparticulei.

c) În formularea lui Thomson: „Nu este posibilă o transformare ciclică monotermă în care sistemul să efectueze lucru mecanic". În formularea lui Clausius: „Nu este posibil să se producă transfer de căldură spontan de la un corp mai rece la un corp mai cald". Cele două formulări sînt echivalente.

2°. a) Nu este inclus în actuala programă analitică.

b) Energia degajată într-o reacție nucleară este dată de ecuația lui Einstein $Q = \Delta mc^2$, unde c este viteza luminii în vid, iar Δm defectul de masă care apare în reacție, adică diferența dintre suma maselor de repaus ale particulelor care intră în reacție și suma maselor de repaus ale particulelor care rezultă din reacție.

c) Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.c.

3°. a) Ecuația calorică de stare descrie energia internă a sistemului U în funcție de parametrii de stare, în timp ce ecuațiile termice de stare leagă parametrii de stare între ei. De exemplu, în cazul unui gaz ideal, ecuația calorică de stare este $U = U(T)$, iar ecuația termică de stare este $pV = \nu RT$.

b) Dacă la momentul $t = 0$ numărul de nuclee este N_0, atunci, după un timp oarecare t, vor rămîne nedezintegrate numai $N = N_0 e^{-\lambda t}$ nuclee, celelalte $N_0 - N$ dezintegrîndu-se în timpul t. De aici rezultă că constanta de dezintegrare λ reprezintă inversul timpului după care numărul de nuclee nedezintegrate se reduce la $N_0 e^{-1}$, unde e este baza logaritmilor naturali.

Activitatea Λa unei surse radioactive este o mărime direct proporțională cu numărul de nuclee nedezintegrate prezente N, constanta de proporționalitate fiind λ: $\Lambda = \lambda N$, deci $\Lambda = \Lambda_0 e^{-\lambda t}$.

c) Fenomenul de interferență este observabil numai dacă radiațiile care interferă au aceeași frecvență și sînt coerente. În practică, fasciculele coerente se realizează prin divizarea, în două sau mai multe părți, a fasciculului emis de o sursă monocromatică. Fasciculele parțiale sînt coerente între ele, deoarece, provenind de la aceeași sursă, conțin în mod identic toate undele elementare emise de atomii sursei monocromatice.

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Transformarea complexă descrisă este posibilă numai dacă masa de gaz se modifică în timpul procesului. De aceea nu poate fi reprezentată grafic integral într-o diagramă (V, p).

În transformarea izocoră $Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu \cdot \frac{5}{2} R(T_2 - T_1)$. Ținînd seama că $\nu = \frac{m}{\mu}$, rezultă $T_2 = \frac{Q_1}{\frac{m}{\mu} \cdot \frac{5}{2} R} + T_1 = \frac{7{,}4 \cdot 10^3}{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8310} + 300 = 478$ K.

Pentru procesul izocor, în cazul unei mase date de gaz putem scrie $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, de unde $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = \frac{\nu R T_1}{V_1} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{\nu R T_2}{V_1} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} 8310 \cdot \frac{478}{20 \cdot 10^{-3}} =$ $= 3{,}92 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m$^{-2} = 3{,}87$ atm, deci $p_2 < p'$. În cursul încălzirii izocore supapa nu se deschide. Transformările următoare fiind izoterme, temperatura finală a gazului este $T_2 = 478$ K.

b) În timpul comprimării izoterme presiunea nu poate crește peste valoarea p', deci la sfîrșitul acestei transformări parametrii gazului vor fi $V_3 = \frac{V_1}{2}$, $p_3 = p'$, $T_3 = T_2$ și $m' \neq m$. Din ecuația de stare rezultă $m' = \frac{\mu p_3 V_3}{R T_3} = \frac{\mu p' V_1}{2 R T_2} =$ $= \frac{2 \cdot 4 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8310 \cdot 478} = 2{,}04 \cdot 10^{-3}$ kg $= 2{,}04$ g.

c) După destinderea izotermă parametrii gazului sînt $V_4 = V_1$ și $T_4 = T_2$. Masa m' de gaz fiind constantă, este valabilă ecuația transformării izoterme $p_4 V_4 =$ $= p_3 V_3$, de unde $p_4 = \frac{p_3 V_3}{V_4} = \frac{p' \frac{V_1}{2}}{V_1} = \frac{p'}{2} = 2$ atm.

5°. a) Activitatea inițială a sursei este $\Lambda_0 = \lambda N_0$, unde numărul inițial de nuclee (atomi) este dat de legea lui Avogadro $N_0 = \nu_{Ra} N_A = \frac{m_0}{\mu_{Ra}} N_A$, iar constanta de dezintegrare de relația $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, deci $\Lambda_0 = \frac{\ln 2 \cdot m N_A}{T_{1/2} \mu_{Ra}} =$ $= \frac{0{,}693 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}}{1620 \cdot 365{,}4 \cdot 86400 \cdot 226} = 7{,}22 \cdot 10^9$ dez $\cdot$ s^{-1}.

b) Timpul în care se dezintegrează nucleele din masa $m' = 2 \cdot 10^{-5}$ g se obține din legea dezintegrării radiactive. Numărul de atomi dezintegrați într-un timp t este $\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$. Multiplicînd această relație cu $\frac{\mu_{Ra}}{N_A}$, rezultă $m' = m_0(1 - e^{-\lambda t}) \approx m_0 \lambda t$, unde am utilizat aproximația $e^{-x} \approx 1 - x$. Timpul în care se dezintegrează nucleele din masa m' va fi $t = \frac{m'}{m_0 \lambda} = \frac{m' T_{1/2}}{m_0 \ln 2} =$ $= \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 1620}{0{,}2 \cdot 0{,}693} \cong 0{,}2337$ an $\cong 7{,}38 \cdot 10^6$ s.

c) Fiecare nucleu de radiu dezintegrat, pînă ajunge nucleu de plumb, conduce la formarea a $n = \frac{226 - 206}{4} = 5$ particule α. Numărul total de particule α, deci, în final, de atomi de heliu, va fi $N_{He} = \Delta N \cdot n = \frac{m' N_A}{\mu_{Ra}} n$. Numărul de kilomoli de heliu va fi $\nu_{He} = \frac{N_{He}}{N_A} = \frac{m' n}{\mu_{Ra}}$, iar presiunea $p = \frac{\nu_{He} R T}{V} =$ $= \frac{m' n R T}{\mu_{Ra} V} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 8310 \cdot 300}{226 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 11{,}03$ N $\cdot$ m^{-2}

Scanned with OKEN Scanner

XXVIII.1°. a) Conform teoremei variației energiei cinetice $L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$, de unde $m = \frac{2L}{v_2^2 - v_1^2}$, deci $G = mg = \frac{2gL}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 375 \cdot 10^3}{400 - 25} = 2 \cdot 10^4$ N.

b) Ecuațiile pentru mișcarea uniform accelerată sînt $S = v_1 \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}$ și $v_2 = v_1 + a\Delta t$. Înlocuind $a\Delta t$ în prima ecuație, rezultă $S = v_1 \Delta t + \frac{v_2 - v_1}{2} \Delta t = \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t$. Întrucît $\Delta t = \frac{L}{P}$, atunci $S = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \frac{L}{P} = \frac{20 + 5}{2} \cdot \frac{375}{75} = 62{,}5$ m.

c) Forța de tracțiune este constantă, deci $L = FS$, de unde

$$F = \frac{L}{S} = \frac{375 \cdot 10^3}{62{,}5} = 6 \text{ kN}.$$

2°. a) Capacitatea condensatorului plan este $C = \frac{\varepsilon S}{d}$, de unde $\varepsilon = \frac{Cd}{S}$. Condensatorul se încarcă pînă cînd tensiunea dintre plăci ajunge egală cu tensiunea electromotoare a bateriei (figura F.B.59), $U = E = 24$ V. Întrucît $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E}$, rezultă $\varepsilon = \frac{Qd}{ES} = \frac{10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = 6{,}25 \cdot 10^{-5}$ F · m^{-1}.

b) Cînd comutatorul K (figura F.B.60) este pe poziția 1, intensitatea curentului în circuit este $I_1 = \frac{E}{R + nr}$, iar cînd este pe poziția 2, $I_2 = \frac{\frac{E}{2}}{R + \frac{n}{2} r}$.

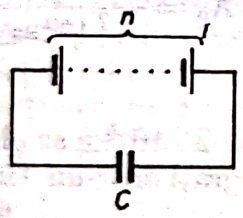


Fig. F.B.59

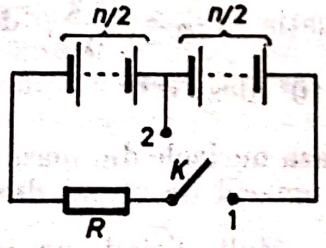


Fig. F.B.60

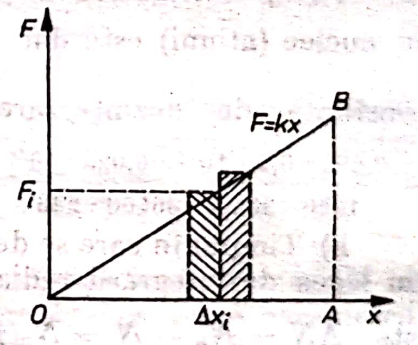


Fig. F.B.61

Aceste ecuații se pot scrie: $n = \frac{E - I_1 R}{I_1 r}$ și $n = \frac{E - 2I_2 R}{I_2 R}$. Eliminînd pe n, adică $\frac{E - I_1 R}{I_1 r} = \frac{E - 2I_2 R}{I_2 R}$, rezultă $R = \frac{E(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} = \frac{24(2 - 1{,}5)}{2 \cdot 1{,}5} = 4\ \Omega$.

Eliminînd pe R din ecuațiile $R = \frac{E - nI_1 r}{I_1}$ și $R = \frac{E - nI_2 r}{2I_2}$, rezultă $\frac{E - nI_1 r}{I_1} = \frac{E - nI_2 r}{2I_2}$, de unde $n = \frac{E(2I_2 - I_1)}{I_1 I_2 r} = \frac{24(3 - 2)}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}4} = 20$.

3°. a) Forța de deformare elastică este dată de expresia $F = kx$. Reprezentarea grafică în funcție de deformarea x va fi o dreaptă care trece prin origine (figura F.B.61). Pentru o forță F constantă pe întreaga deplasare S, lucrul mecanic este dat de produsul $F \cdot S$. Dacă se împarte distanța x în intervale foarte mici Δx,

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît pe fiecare interval forța să poată fi considerată constantă, egală cu valoarea medie, atunci lucrul pentru un interval i este $\Delta L_i = F_i \Delta x_i$, adică egal cu aria dreptunghiului de laturi F_i și Δx_i. Lucrul total se obține însumînd toate valorile ΔL_i, deci el va fi egal cu aria delimitată de dreapta $F = kx$ și axa Ox pînă la valoarea (maximă) considerată a deformării. Aceasta este aria triunghiului dreptunghic OAB ale cărui catete sînt $AB = kx$ și $OA = x$, deci $L = \frac{xkx}{2} = \frac{kx^2}{2}$.

b) Legea conservării energiei se demonstrează pe baza teoremei variației energiei cinetice și definiției energiei potențiale. Dacă asupra unui corp de masă m acționează o forță F care produce o deplasare S în direcția forței, atunci lucrul mecanic al forței este $L = FS = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{c_2} - E_{c_1}$, unde $E_c = \frac{mv^2}{2}$ este energia cinetică a corpului în mișcare cu viteza v. Dacă un corp se află într-un cîmp de forțe (cîmp gravitațional, cîmp elastic, cîmp electric pentru corpuri care au sarcină electrică etc.), lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului, cînd corpul este deplasat pe o distanță dată din zona cu cîmp, se poate exprima prin diferența a două valori: una corespunzătoare stării finale, cealaltă corespunzătoare stării inițiale, ale unei mărimi numite energie potențială: $-L = E_{p_2} - E_{p_1}$. Adunînd cele două expresii pentru L, rezultă $E_{c_1} + E_{p_1} = E_{c_2} + E_{p_2} = \text{constant}$.

c) Nu mai este inclus în actuala programă analitică.

4°. a) $v_t = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, unde E este modulul de elasticitate al mediului în care se propagă unda, iar ρ densitatea acestuia.

b) $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$, unde ΔU este căderea de tensiune care trebuie aplicată diodei semiconductoare pentru ca intensitatea curentului care trece prin ea să varieze cu ΔI.

c) $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$, unde R este rezistența circuitului, L inductanța bobinei, C capacitatea condensatorului, iar ω frecvența unghiulară ($\omega = 2\pi\nu$) a curentului.

XXIX.1°. a) Forța care imprimă corpului accelerație pe plan este, conform figurii F.B.62, $F = G_t - F_f = G_t - \mu G_n$. Din legea fundamentală a dinamicii $F = ma$ rezultă $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 9{,}8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4{,}85\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

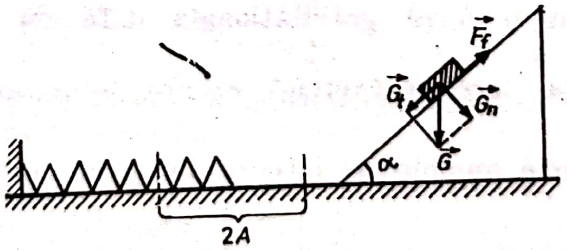


Fig. F.B.62

b) Mișcarea pe plan este uniform accelerată, deci $v = v_0 + at = 2 + 4{,}85 \cdot 2 = 11{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Deformarea resortului sub acțiunea corpului se obține ținînd seama că la sfîrșitul comprimării energia sistemului corp+resort se află înmagazinată în resort ca energie potențială de deformare. Inițial, energia sistemului este energia

cinetică a corpului. Scriind legea conservării energiei: $\frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, de aici rezultă mărimea maximă a deformării (amplitudinea), $A = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 11{,}7\sqrt{\frac{2}{5 \cdot 10^3}} = 0{,}234$ m.

Viteza maximă în timpul oscilației va corespunde valorii de 11,7 $m \cdot s^{-1}$. Întrucît $v_{max} = \omega A$, rezultă $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{2}} = 50$ rad $\cdot s^{-1}$, sau

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = 7{,}96 \text{ Hz}.$$

2°. a) Capacitatea unui condensator plan este $C = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{3.54 \cdot 10^{-4}} = 10^{-9}\ F = 1$ nF.

b) La rezonanță tensiunea pe inductanță este egală cu tensiunea pe capacitate, $U_L = U_C$, sau $X_L = X_C$, adică $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, unde $C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ este capacitatea echivalentă a celor doi condensatori în serie (figura F.B.63). Prin urmare $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, sau $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-9}}}} =$

$= 1{,}95 \cdot 10^5$ Hz.

c) $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}95 \cdot 10^5} = 1{,}54 \cdot 10^3$ m.

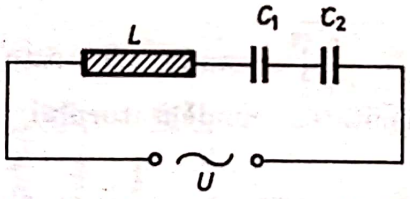


Fig. F.B.63

3°. a) Considerăm un corp de formă sferică cu masa M și raza R. Orice alt corp, caracterizat de o masă m și aflat la o distanță r de centrul primului corp, este atras de acesta cu o forță gravitațională dată de ecuația lui Newton $\vec{F} = K\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$. Forța care se exercită asupra unui corp cu masa egală cu unitatea adică $\frac{\vec{F}}{m}$, poartă numele de intensitate a cîmpului gravitațional, deci $\vec{\Gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = K\frac{M}{r^3}\vec{r}$. Se observă că, în cazul unui corp cu simetrie sferică, vectorul $\vec{\Gamma}$ este orientat radial spre centrul corpului de masă M(K este negativ) și depinde de distanța dintre centru și punctul considerat din cîmp.

b) Cîmpul electric poate fi caracterizat nu numai cu ajutorul mărimii vectoriale $\vec{E}$, ci și cu ajutorul unei mărimi scalare V, numită potențial. Potențialul se definește cu ajutorul lucrului mecanic efectuat de forța de interacțiune pentru

deplasarea unei sarcini de probă q între două puncte A şi B din cîmp. Dacă cîmpul este generat de o sarcină punctuală Q, atunci forţa de interacţiune este $F = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$. Lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea pe distanţa $d = r_B - r_A$ este $L = F_{med} \cdot d$, unde F_{med} este forţa medie care produce acelaşi lucru mecanic ca şi forţa cîmpului care este dependentă de distanţă. F_{med} este dat de media geometrică a valorilor iniţială şi finală ale forţei, adică $F_{med} = \sqrt{F_A F_B} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_A r_B}$. Expresia lucrului mecanic devine

$$L = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Prin definiţie lucrul mecanic efectuat pentru transportul unei sarcini pozitive, egale cu unitatea, dintr-un punct dat A din cîmp la infinit reprezintă potenţialul în punctul A. Făcînd $r_B \to \infty$ în expresia lucrului mecanic, rezultă

$$V_A = \frac{L}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r_A}.$$

Orice cîmp electric poate fi caracterizat prin potenţialul corespunzător fiecărui punct; ecuaţia anterioară este valabilă numai pentru cîmpul generat de o sarcină punctuală. Diferenţa de potenţial dintre două puncte într-un cîmp este diferenţa potenţialelor celor două puncte, $U = V_B - V_A$.

c) Inducţia magnetică B, a cîmpului generat de un circuit în care circulă un curent electric, este direct proporţională cu intensitatea curentului care circulă prin circuit. De exemplu, în cazul unei bobine de lungime l, avînd N spire, în care se află un mediu cu permeabilitatea magnetică relativă μ_r, avem $B = \mu_0\mu_r \frac{N}{l} I$. Aria secţiunii bobinei fiind constantă, rezultă că şi fluxul Φ, al inducţiei magnetice, prin secţiunea bobinei, este proporţional cu intensitatea, $\Phi \sim I$. Constanta de proporţionalitate, notată cu L, este o mărime care caracterizează fiecare circuit şi poartă numele de inductanţă a circuitului. Vom scrie $\Phi = LI$. În cazul unei bobine cu N spire, aria circuitului magnetic este de N ori aria S a unei spire, deci $\Phi = NSB = \mu_0\mu_r \frac{N^2S}{l} I$. Rezultă că inductanţa bobinei este $L = \mu_0\mu_r \frac{N^2S}{l}$.

4°. a) $L = Fd$, deci $[L]_{SI} = [F]_{SI}[d]_{SI} = \mathrm{N \cdot m} = \mathrm{J}$.

Un Joule este lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1 Newton pe o distanţă de 1 m.

$$P = \frac{L}{t}, \quad [P]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[t]_{SI}} = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}.$$

Un Watt este puterea unui dispozitiv care produce (consumă) un lucru mecanic de 1 J în timp de o secundă.

b) $E = \frac{F}{q}$, $[E]_{SI} = \frac{[F]_{SI}}{[q]_{SI}} = \frac{N}{C}$.

Cîmpul într-un punct are intensitatea de 1 N/C dacă plasînd un corp de probă cu sarcina de 1 C în punctul considerat, forţa care acţionează asupra lui este de 1 C.

c) $\Phi = BS$, $[\Phi]_{SI} = [B]_{SI}[S]_{SI} = \mathrm{T \cdot m^2} = \mathrm{Wb}$.

Fluxul magnetic printr-un circuit este de 1 Weber dacă aria circuitului este de 1 $\mathrm{m^2}$, iar inducţia magnetică este de 1 Tesla şi are direcţia perpendiculară pe planul circuitului.

Scanned with OKEN Scanner

XXX.1°. a) Ţinînd seama de expresiile greutăţii corpului 1 şi forţei inerţiale care acţionează asupra sa datorită mişcării accelerate a planului înclinat, $G_1 = m_1 g$ şi $F_i = m_1 a$, rezultă $G_{1t} = m_1 g \sin \theta$, $G_{1n} = m_1 g \cos \theta$, $F_{it} = m_1 a \cos \theta$, $F_{in} = m_1 a \sin \theta$, unde G_{1t}, G_{1n}, F_{it}, F_{in} sînt componentele tangenţiale (în lungul planului înclinat) şi normale (perpendiculare pe planul înclinat) ale celor două forţe considerate (figura F.B.64). Avînd în vedere şi sensurile acestor compo-

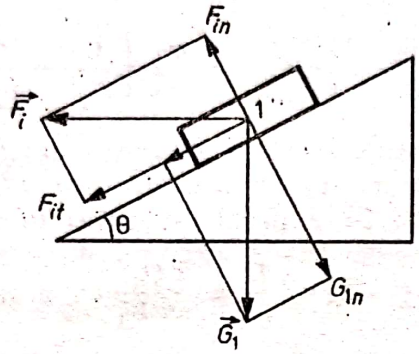


Fig. F.B.64

nente, găsim că forţa activă care acţionează asupra ansamblului celor două corpurr şi forţa de frecare dintre corpul 1 şi planul înclinat sînt $F_{act} = G_2 - F_{it} - G_{1t} = i = m_2 g - m_1(a \cos \theta - g \sin \theta)$ şi $F_{fr} = \mu(G_{1n} - F_{in}) = \mu m_1(g \cos \theta - a \sin \theta)$, deci acceleraţia a_1 a ansamblului la urcarea pe planul înclinat satisface relaţia $(m_1 + m_2)a_1 = F_{act} - F_{fr}$, de unde

$$a_1 = \frac{m_2 g - m_1[(a + \mu g) \cos \theta + (g - \mu a) \sin \theta]}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 9{,}8 - 2\left[(2 + 0{,}3 \cdot 9{,}8)\frac{\sqrt{2}}{2} + (9{,}8 - 0{,}3 \cdot 2)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}{2 + 4} \cong 3{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

b) Tensiunea în fir este $T = m_2(g - a_1) = 4(9{,}8 - 3{,}2) = 26{,}4$ N.

c) Pentru ca ansamblul celor două corpuri să urce cu viteză constantă planul înclinat, trebuie ca noua forţă activă să fie echilibrată de forţa de frecare dintre corpul 1 şi planul înclinat, $m_2' g - F_{it} - G_{1t} = F_{fr} = \mu(G_{1n} - F_{in})$, de unde $m_2' = m_1\left[\left(\frac{a}{g} + \mu\right)\cos \theta + \left(1 - \mu \frac{a}{g}\right)\sin \theta\right] \cong 2{,}04$ kg.

2°. a) Pornind de la expresia primului principiu al termodinamicii, $Q = \Delta U + L$, şi ţinînd seama că pentru transformările izocore $L = 0$, precum şi de expresia ecuaţiei calorice de stare a gazelor ideale, $U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT$, rezultă expresia căldurii necesare pentru încălzirea izocoră a gazului: $Q_V = \Delta U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \times$ $\times R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 8310 \times (400 - 300)$ J $= 311{,}6$ kJ.

De aici rezultă expresia căldurii specifice la volum constant, $c_V = \frac{Q_V}{m \Delta T} =$ $= \frac{3R}{2\mu}$; pentru heliu $c_V = \frac{3 \cdot 8310}{2 \cdot 4} = 3120 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

b) Ţinînd seamă de ecuaţia termică de stare a gazelor ideale, $pV = \frac{m}{\mu}RT$, rezultă că lucrul mecanic efectuat de gaz într-o transformare izobară este $L_p = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. În baza expresiei primului principiu al termodinamicii rezultă expresia căldurii primite într-o transformare izobară, $Q_p = \Delta U + L_p = \Delta\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{\mu}RT\right) + \frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{5}{2}\cdot\frac{m}{\mu}R\Delta T$, de unde $c_p = \frac{1}{m\Delta T}Q_p = \frac{5R}{2\mu}$; efectuînd calculele, obţinem $Q_p = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 8310(400-300) = 5{,}194\cdot 10^5$ J şi, respectiv, $c_p = \frac{5\cdot 8310}{2\cdot 4} = 5194\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$,

c) Pe baza rezultatelor de mai înainte, se obţine că pentru heliu indicele adiabatei este $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}$. Din ecuaţia $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$ a transformărilor adiabatice ale gazelor ideale rezultă că temperatura finală T_3 a heliului este $T_3 = T_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 400\left(\frac{5}{40}\right)^{2/3} = 100$ K.

3°. a) Ţinînd seamă de expresia $E = \frac{U}{d}$ a intensităţii cîmpului electric între armăturile condensatorului plan, unde $U = \frac{q_2}{C}$ este tensiunea dintre armăturile condensatorului plan de capacitate $C = \frac{\varepsilon A}{d}$, rezultă că forţa electrostatică care acţionează asupra sarcinii q_1 în interiorul condensatorului este $F_E = q_1E = q_1\cdot\frac{U}{d} = q_1\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{q_2}{C} = \frac{q_1q_2}{\varepsilon A}$.

Acceleraţia a care acţionează asupra sarcinii punctiforme q_1 în interiorul condensatorului plan va fi

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{q_1q_2}{m\varepsilon A} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 4\cdot 10^{-14}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}} = 3{,}2\cdot 10^{11}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

b) Deoarece durata traversării condensatorului plan de către sarcina punctiformă q_1 este $t = \frac{L}{v_0}$, expresia deviaţiei sarcinii la ieşirea din condensator este $d_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{aL^2}{2v_0^2} = \frac{3{,}2\cdot 10^{11}\cdot 1{,}44\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{12}} \cong 2{,}304\cdot 10^{-3}$ m.

c) Deoarece, la ieşirea din condensator, viteza transversală pe direcţia de incidenţă a sarcinii q_1 este $v_{tr} = at = \frac{aL}{v_0}$, viteza rezultantă a sarcinii q_1 la ieşirea din condensator este $v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_{tr}^2} = \sqrt{10^{12} + \frac{3{,}2^2\cdot 10^{22}\cdot 1{,}44\cdot 10^{-2}}{10^{12}}} \cong 10^6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
Din condiţia de echilibrare a forţei Lorentz de către forţa centrifugă, $q_1v_1B = \frac{mv_1^2}{R}$, rezultă raza R a traiectoriei descrisă de sarcina q_1, $R = \frac{m_1v_1}{q_1B} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 01^6}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2{,}4\cdot 10^{-5}} \cong 0{,}237$ m, şi perioada mişcării circulare uniforme, $T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}237}{10^6} \cong 1{,}49\cdot 10^{-6}$ s.

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Acest subiect a fost tratat la V.1°.

b) Parametrii stărilor 1, 2, 3 și 4 între care se desfășoară destinderile izotermă, adiabatică și, respectiv, comprimarea izotermă a gazului ideal, în cadrul ciclului Carnot considerat (v. figura F.B.65) satisfac relațiile $p_1V_1 = p_2V_2$, $p_4V_4 = p_3V_3$, $p_1V_1^\gamma = p_4V_4^\gamma$, $p_2V_2^\gamma = p_3^\gamma V_3^\gamma$, de unde $\frac{p_1p_3}{p_2p_4} = \frac{V_2V_4}{V_1V_3} = \left(\frac{V_2V_4}{V_1V_3}\right)^\gamma$; deoarece

$$\gamma \neq 1 \Rightarrow \frac{V_2V_4}{V_1V_3} = 1, \text{ sau } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Expresiile lucrurilor mecanice efectuate în procesele izoterme și, respectiv, în cele adiabatice sînt $L_{12} = 2{,}3\,\nu RT_1 \lg \frac{V_2}{V_1}$, $L_{34} = 2{,}3\,\nu RT_2 \lg \frac{V_4}{V_3}$, $L_{23} = -\Delta U_{23} =$

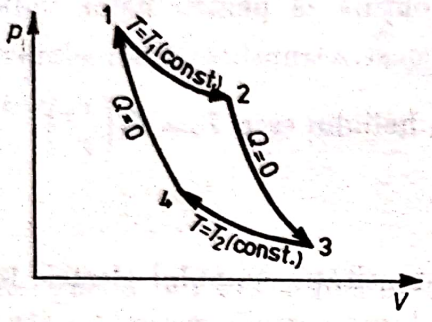


Fig. F.B.65

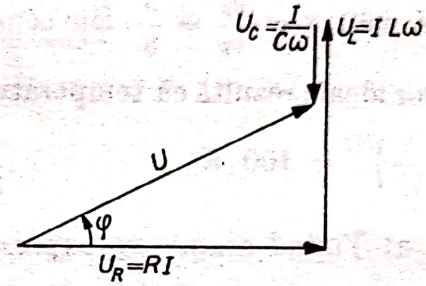


Fig. F.B.66

$= U_2 - U_3 = \nu C_V(T_1 - T_2)$ și $L_{41} = -\Delta U_{41} = U_4 - U_1 = \nu C_V(T_2 - T_1)$; deci ținînd seamă de relația între volumele $V_1, \ldots, V_4$ — rezultă că lucrul mecanic total efectuat într-un ciclu Carnot este $L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} = 2{,}3\,\nu R(T_1 - T_2)\lg \frac{V_2}{V_1}$.

Căldura primită de gaz pentru efectuarea destinderii izoterme este $Q_1 = \Delta U_{12} + L_{12} = 2{,}3\,\nu RT_1 \lg \frac{V_2}{V_1}$ (pentru că $\Delta U_{12} = 0$), deci randamentul motorului care funcționează după un ciclu Carnot reversibil este $\eta_C = \frac{Q_1}{L} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

c) Expresia impedanței circuitului *RLC* serie este dedusă în cadrul răspunsului pentru subiectul II.4.c. În privința defazajului φ al tensiunii la bornele circuitului *RLC* serie, față de intensitatea curentului prin circuit, din diagrama fazorială a tensiunilor în circuitul *RLC* serie (Figura F.B.66) rezultă $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XXI.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la XI.4°.c.

c) Acest subiect a fost tratat la XI.4°.b.

XXI.1°. a) Aplicăm legea conservării energiei. Înainte de deformarea resortului energia sistemului se reduce la energia cinetică a ansamblului celor două corpuri în mișcare cu viteza v_0. Cînd corpurile se opresc datorită deformării resortului, întreaga energie a sistemului este înmagazinată în resort ca energie potențială de deformare, deci $\frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$, de unde $A = v_0\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \sqrt{10\,\frac{6+4}{50}} = \sqrt{2}$ m $\cong 1{,}414$ m.

b) Forţa de inerţie care acţionează asupra corpului de masă m_2 are valoarea maximă în momentele în care acceleraţia este maximă, adică atunci cînd oscilatorul se află la distanţă maximă de poziţia de echilibru: $F_{i\,max} = m_2 a_{max} = m_2\omega^2 A$.

Pentru ca corpul de masă m_2 să nu alunece de pe corpul de masă m_1 în timpul oscilaţiei, trebuie ca forţa de frecare dintre corpuri să fie cel puţin egală cu forţa de inerţie, adică $\mu m_2 g \geqslant m_2\omega^2 A$, de unde $\mu \geqslant \frac{\omega^2 A}{g}$. Întrucît $\omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$, valoarea minimă a coeficientului de frecare este $\mu_{min} = \frac{kA}{g(m_1 + m_2)} = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} =$

$$= \frac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{\frac{50}{6+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}707.$$

c) $E_{p\,max} = E_{c\,max} = \frac{m_1 + m_2}{2} v_0^2 = \frac{6+4}{2} \cdot 10 = 50$ J;

$$a_{max} = A\omega^2 = v_0\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}\,\frac{k}{m_1 + m_2} = v_0\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{10 \cdot \frac{50}{6+4}} \cong 7{,}07\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

2°. a) Dependenţa de înălţime a mărimilor caracteristice gazului decurge din dependenţa lor de temperatură. Din ecuaţia termică de stare a gazului ideal, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, rezultă $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \frac{p\mu}{R(T_0 + az)}$; energia cinetică medie a moleculelor este $\widetilde{E_c} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} k_B (T_0 + az)$, iar $\widetilde{v^2} = \frac{3RT}{\mu} = \frac{3R}{\mu}(T_0 + az)$.

b) Din ecuaţia termică de stare a gazului ideal rezultă

$$V = \nu \frac{RT}{p} = 2\frac{8310 \cdot 400}{3{,}325 \cdot 10^5} = 10\ \text{m}^3.$$

c) După evacuare, în incintă va rămîne gaz la presiunea atmosferică. Masa de gaz rămasă va fi $m' = \frac{\mu pV}{RT} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 10}{8310 \cdot 400} = 6{,}017$ kg. Întrucît masa iniţială a gazului din vas este $m = \nu\mu = 2 \cdot 20 = 40$ kg, gazul care părăseşte incinta are masa $m_1 = m - m' = 40 - 6{,}01 = 33{,}98$ kg. Energia pe care această masă de

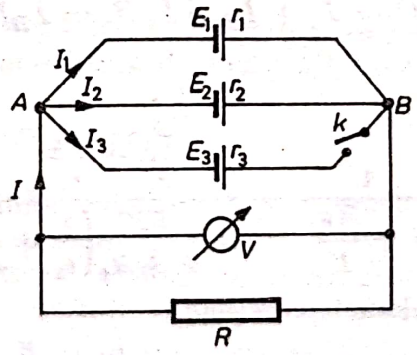


Fig. F.B.67

gaz o avea în interiorul incintei este dată de $U = \frac{3}{2}\nu_1 RT = \frac{3}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu} RT =$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{33{,}98}{20} \cdot 8310 \cdot 400 \cong 8{,}47 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

3°. a) Cînd întrerupătorul k din figura F.B.67 este închis, legea lui Kirchhoff pentru nodul A se scrie $I = I_1 + I_2 + I_3$. Pentru cele trei ochiuri care se formează cu ramura R şi fiecare sursă, avem $E_1 - I_1 r_1 = IR$, $E_2 - I_2 r_2 = IR$, $E_3 - I_3 r_3 = IR$

Scoțind intensitățile pe diferite ramuri rezultă $I_i = \frac{E_i - IR}{r_i}$ pentru $i = 1, 2, 3$. Înlocuind în legea lui Kirchhoff pentru nodul A rezultă

$$I = \frac{E_1 - IR}{r_1} + \frac{E_2 - IR}{r_2} + \frac{E_3 - IR}{r_3},$$

de unde

$$I = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3}}{1 + R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1{,}1}{3} + \frac{1{,}2}{1}}{1 + 20\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right)} = 0{,}0548 \text{ A}.$$

b) Cînd comutatorul k este deschis, rezistența ramurii care conține pe r_3 devine infinită, $r_3 \to \infty$. Atunci

$$I' = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{1 + R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1{,}1}{3}}{1 + 20\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}0490 \text{ A}.$$

Intensitatea prin ramura E_1 va fi $I'_1 = \frac{E_1 - I'R}{r_1} = \frac{1 - 0{,}049 \cdot 20}{2} = 0{,}01$ A, iar prin ramura E_2 va fi $I'_2 = \frac{E_2 - I'R}{r_2} = 0{,}039$ A (sau $I'_2 = I' - I'_1 = 0{,}039$ A).

c) Un voltmetru cu rezistența infinită legat între bornele A și B ar arăta tensiunea exactă $U = I'R = 0{,}049 \cdot 20 = 0{,}980$ V. Din cauză că rezistența voltmetrului este finită, prin el va trece un curent I_v, tensiunea arătată de el fiind $U = I_v R_v$. Rezistența circuitului exterior devine rezistența echivalentă a rezistențelor R și R_v legate în paralel, adică $R' = \frac{RR_v}{R + R_v}$, expresie pe care o vom pune în locul lui R în ecuația pentru intensitate, aceasta devenind $I'' = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{1 + R'\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$. Dar $I'' = I_v + I_R$ și $I_v R_v = I_R R$; din aceste ecuații rezultă

$$I_v = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R}} \cdot \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{1 + \frac{RR_v}{R + R_v}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)},$$

deci tensiunea arătată de voltmetru devine

$$U_v = I_v R_v = \frac{R_v}{1 + \frac{R_v}{R}} \cdot \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{1 + \frac{RR_v}{R + R_v}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^3}{1 + \frac{2 \cdot 10^3}{20}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1{,}1}{3}}{1 + \frac{20 \cdot 2 \cdot 10^3}{20 + 2 \cdot 10^3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} = 0{,}979 \text{ V}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) În procesul ciocnirii a două particule se conservă impulsul și energia. Considerînd ciocnirea frontală (impulsurile inițiale $\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$ au aceeași direcție — direcția care unește centrele particulelor), ecuația conservării impulsului se scrie:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2', \tag{1}$$

unde v_1 și v_2 sînt vitezele particulelor înainte de ciocnire, iar v_1' și v_2' vitezele după ciocnire. Dacă ciocnirea este elastică, legea conservării energiei se scrie

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_2v_2'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}. \tag{2}$$

Ecuațiile (1) și (2), scrise sub forma $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$, $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v'^2_2 - v_2^2)$ și împărțite membru cu membru, conduc la $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$, de unde $v_2' = v_1 + v_1' - v_2$.

Înlocuind în (1) rezultă $m_1v_1 + m_2(v_2 - v_1 - v_1' + v_2) = m_1v_1'$, de unde $v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2v_2m_2}{m_1 + m_2} = v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + 2v_2\frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Datorită faptului că v_1' și v_2' apar simetric în (1) și (2), rezultă $v_2' = v_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 2v_1\frac{m_1}{m_1 + m_2}$.

b) Densitatea corpurilor variază cu temperatura datorită variației volumului în funcție de temperatură, sub forma $V = V_0(1 + \gamma t)$, V fiind volumul la temperatura t, V_0 volumul la temperatura $t_0 = 0°C$, iar γ coeficientul de dilatare în volum al substanței. Densitatea este $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0}\cdot\frac{1}{1 + \gamma t} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$, unde ρ_0 este densitatea la temperatura $t_0 = 0°C$.

c) Într-un cristal cu rețeaua perfect periodică, mișcarea purtătorilor de sarcină poate fi descrisă aproximativ cu ajutorul mecanicii clasice. Sub acțiunea forței electrice $\vec{F}_e = e\vec{E}$, sarcinile negative (electroni) caracterizate de masa efectivă m_n și cele pozitive (goluri) caracterizate de masa efectivă m_p se vor mișca cu accelerațiile $\vec{a}_n = -\frac{e\vec{E}}{m_n}$ și, respectiv, $\vec{a}_p = \frac{e\vec{E}}{m_p}$.

Datorită imperfecțiunilor cristalului purtătorii de sarcină suferă ciocniri care le schimbă direcția de mișcare. Notînd cu t_c timpul mediu și între două ciocniri succesive ale unui purtător, atunci, în acest interval, componenta vitezei pe direcția cîmpului crește de la zero la valoarea at_c. Viteza medie a mișcării pe direcția cîmpului este $v = \frac{1}{2}at_c$. Deci pentru cele două tipuri de particule vom avea $\vec{v}_n = -\frac{et_c}{2m_n}\vec{E} = -\mu_n\vec{E}$ și $\vec{v}_p = \frac{et_c}{2m_p}\vec{E} = \mu_p\vec{E}$, unde μ_n și μ_p reprezintă mobilitățile purtătorilor.

Intensitatea curentului care trece prin secțiunea S a semiconductorului (figura F.B.68) este $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Sarcina ΔQ care trece în timpul Δt prin aria S este sarcina purtătorilor care se găsesc față de S la o distanță cel mult egală cu $v\Delta t$,

Scanned with OKEN Scanner

deci sarcina purtătorilor dintr-un paralelipiped de volum $Sv\,\Delta t$. Dacă purtătorii sînt electroni cu sarcina $-e$, atunci $I_n = \frac{n(-eSv_n\Delta t)}{\Delta t} = -neSv_n$, unde n este numărul de electroni liberi din unitatea de volum. Analog, curentul transportat de purtătorii pozitivi va avea intensitatea $I_p = peSv_p$, unde p este numărul acestor

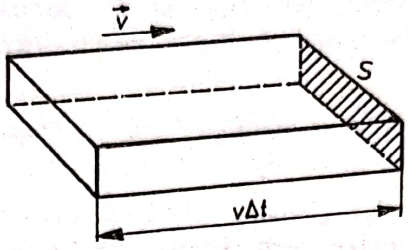


Fig. F.B.68

purtători din unitatea de volum. Curentul total are intensitatea $I = I_n + I_p = eS(pv_p - nv_n)$. Curentul prin unitatea de suprafață — densitatea de curent — va fi $\vec{j} = e(p\vec{v}_p - n\vec{v}_n) = e(\mu_p p + \mu_n n)\vec{E}$.

Se observă că $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, unde $\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$ se numește conductivitatea semiconductorului.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la III.5°.a.

b) Acest subiect a fost tratat la IV.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la II.5°.c.

XXXII.1°. a) Ecuația oscilatorului este $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, deci, prin identificare, rezultă $A = 0{,}5$ m, $\omega = 5\pi\ s^{-1}$ și $\varphi_0 = \frac{\pi}{24}$. Dacă $y = \frac{A}{2} = \frac{0{,}5}{2}$, ecuația oscilației devine $\frac{0{,}5}{2} = 0{,}5\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{24}\right)$, de unde $\sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{24}\right) = \frac{1}{2}$, adică $5\pi t + \frac{\pi}{24} = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Rezultă $t = \frac{1}{5}\left[k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} \pm 1\right)\right]$s. Întrucît sînt admise numai valori pozitive, prima valoare va fi $t = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\right] = \frac{1}{40}$ s.

b) $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2A^2}{2}[1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)]$. Pentru momentele considerate, $\sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$, deci $E_c = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3mA^2\omega^2}{8} = \frac{3}{8}\cdot 0{,}02\cdot 0{,}5^2\cdot 25\pi^2 = 0{,}462$ J și $E_p = \frac{ky^2}{2} = \frac{kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{mA^2\omega^2}{8} = \frac{E_c}{3} = 0{,}154$ J.

Se verifică imediat că $E_c + E_p = mA^2\omega^2\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{mA^2\omega^2}{2} = E_{tot}$.

c) Defazajul dintre oscilațiile în cele două puncte este legat de diferența de drum dintre ele, $x_2 - x_1$, prin relația

$$\varphi = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\frac{v_f}{\nu}} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)\omega}{2\pi v_f} = \frac{68\cdot 5\pi}{340} = \pi.$$

2°. a) Randamentul este raportul dintre lucrul mecanic L efectuat și căldura Q_1 primită în cursul unui ciclu, adică: $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, unde Q_2 este căldura cedată în cursul unui ciclu (figura F.B.69).

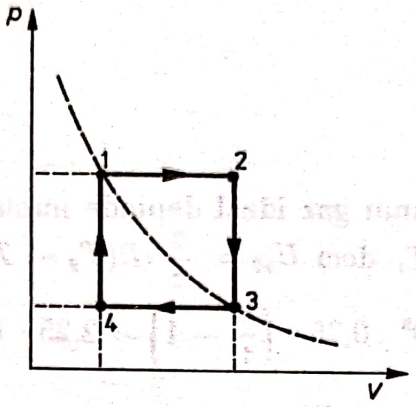


Fig. F.B.69

Calculăm căldurile transferate în fiecare transformare.

În transformarea izobară $1 \to 2$: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, deci $Q_{12} = \nu C_p(T_2 - T_1) =$
$= \nu C_p T_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \nu C_p T_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = 2\nu C_p T_1 > 0.$

În transformarea izocoră $2 \to 3$: $T_3 = T_1$, deci $Q_{23} = \nu C_V(T_3 - T_2) =$
$= \nu C_V(T_1 - T_2) = \nu C_V T_1\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = -2\nu C_V T_1 < 0.$

În transformarea izobară $3 \to 4$: $\frac{V_4}{V_3} = \frac{T_4}{T_3}$ sau $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_4}{T_1}$, deci

$$Q_{34} = \nu C_p(T_4 - T_3) = \nu C_p(T_4 - T_1) = \nu C_p T_1\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right) = \nu C_p T_1\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\nu C_p T_1 < 0.$$

În transformarea izocoră $4 \to 1$: $Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_4) = \nu C_V T_1\left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right) =$
$= \nu C_V T_1\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{2}{3}\nu C_V T_1 > 0.$

Prin urmare sistemul cedează căldură în transformările $2 \to 3$ și $3 \to 4$, deci $Q_2 = Q_{23} + Q_{34} = -\nu T_1\left(2C_V + \frac{2}{3}C_p\right)$, și primește căldură în transformările $1 \to 2$ și $4 \to 1$, deci $Q_1 = Q_{12} + Q_{41} = \nu T_1\left(2C_p + \frac{2}{3}C_V\right)$. Rezultă

$$\eta = 1 - \frac{\nu T_1\left(2C_V + \frac{2}{3}C_p\right)}{\nu T_1\left(2C_p + \frac{2}{3}C_V\right)} = 1 - \frac{3C_V + C_p}{3C_p + C_V} = 1 - \frac{3\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}R}{3\frac{5}{2}R + \frac{3}{2}R} =$$

$$= 1 - \frac{14}{18} = \frac{2}{9} \cong 0{,}222.$$

Scanned with OKEN Scanner

T_{maxim} va fi T_2, iar T_{min} va fi T_4. Randamentul unui ciclu Carnot pentru $T_1' = T_{max}$ și $T_2' = T_{min}$ este

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2'}{T_1'} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_4}{T_2} = 1 - \frac{T_4}{T_1}\cdot\frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{V_1}{V_2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

deci $\dfrac{\eta}{\eta_C} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}$.

b) Energia internă a unui gaz ideal depinde numai de temperatura acestuia conform ecuației $U = \frac{3}{2}\nu RT$, deci $U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu RT_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) =$

$$= \frac{3}{2}p_1V_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = \frac{3}{2}\cdot 10^5 \cdot 0{,}75 \cdot \left(\frac{3}{1} - 1\right) = 2{,}25 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

c) $\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, deci $\sqrt{\dfrac{\widetilde{v_2^2}}{\widetilde{v_1^2}}} = \sqrt{\dfrac{T_{max}}{T_{min}}} = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_4}} = \sqrt{9} = 3.$

3°. a) Cînd comutatorul k (din figura F.B. 9) este deschis $U_1 = E = nE_1 = 6 \cdot 2 = 12$ V.

Cînd comutatorul k este închis $U_2 = nE_1 - Inr_1$. Dar $U_2 = IR_e$, unde rezistența echivalentă a circuitului exterior este $R_e = R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$, deci $U_2 = I\left(R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)$. Egalînd cu cealaltă ecuație pentru U_2, rezultă $nE_1 - Inr_1 = I\left(R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)$, de unde $I = \dfrac{nE_1}{nr_1 + R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}}$. Prin urmare

tensiunea la borne va fi $U_2 = \dfrac{nE_1\left(R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)}{nr_1 + R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}} = \dfrac{6 \cdot 2\left(5 + \dfrac{7 \cdot 3}{7 + 3}\right)}{6 \cdot 0{,}15 + 5 + \dfrac{7 \cdot 3}{7 + 3}} = 10{,}65$ V.

b) La bornele rezistențelor R_2 și R_3 este aceeași tensiune $U = U_2 - IR_1 =$

$$= U_2 - \frac{nE_1R_1}{nr_1 + R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}} = 10{,}65 - \frac{6 \cdot 2{,}5}{6 \cdot 0{,}15 + 5 + \dfrac{7 \cdot 3}{7 + 3}} = 3{,}15 \text{ V},$$

$$\text{deci } I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{3{,}15}{7} = 0{,}45 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{3{,}15}{3} = 1{,}05 \text{ A},$$

$$Q_2 = R_2I_2^2t = 7 \cdot 0{,}45^2 \cdot 120 = 170{,}1 \text{ J}.$$

c) Inducția magnetică în interiorul bobinei este

$$B = \mu_0\frac{NI_3}{l} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{300 \cdot 1{,}05}{0{,}2} = 1{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Considerăm o suprafață orizontală de arie S situată la adîncimea h de suprafața lichidului (figura F.B.70). Presiunea care se exercită asupra ariei S este suma dintre presiunea atmosferică p_0 și presiunea exercitată de coloana de lichid de secțiune S și înălțime h, adică $p = p_0 + \frac{G}{S} = p_0 + \frac{mg}{S} = p_0 + \frac{\rho Vg}{S} = p_0 + \frac{\rho S h_1 g}{S} = p_0 + \rho g h$.

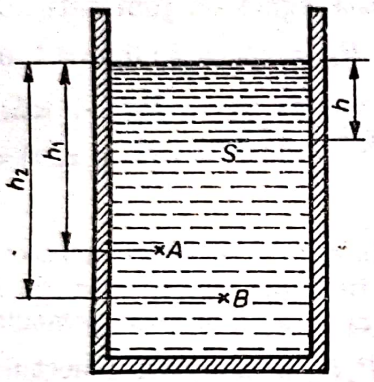


Fig. F.B.70

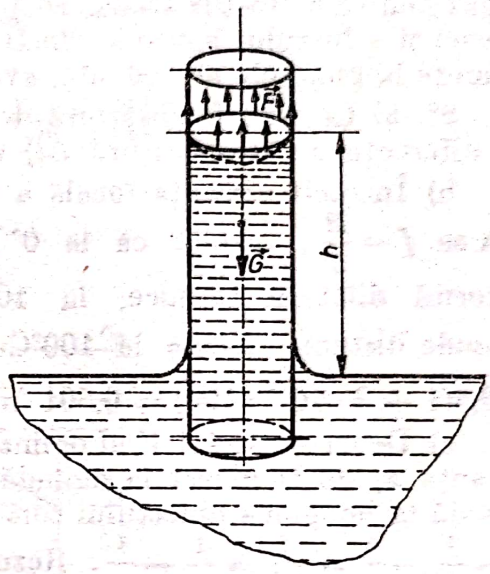


Fig. F.B.71

Diferența de presiune dintre două puncte A și B situate la adîncimi diferite, cu $\Delta h = h_2 - h_1$, va fi $\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 + \rho g h_2 - (p_0 + \rho g h_1) = \rho g(h_2 - h_1)$ și depinde numai de diferența de adîncime dintre cele două puncte.

b) Acest subiect a fost tratat la XXII.4°.b.

c) Acest subiect a fost tratat la XXII.4°.c.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XXIV.4°.a.

b) Legea lui Jurin se referă la înălțimea la care se ridică un lichid într-un tub capilar cînd lichidul udă peretele tubului. Să considerăm un vas capilar introdus într-un lichid de densitate ρ și coeficient de tensiune superficială σ care udă peretele tubului. Lichidul urcă în tubul capilar pînă cînd greutatea $\vec{G}$ a coloanei de lichid din tubul capilar este echilibrată de rezultanta $\vec{F}$ a forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul circular al meniscului (figura F.B.71), adică $G = F$. Întrucît $G = mg = V\rho g = \pi r^2 h \rho g$ și $F = \sigma l = 2\pi r \sigma$, rezultă $\pi r^2 h \rho g = 2\pi r \sigma$, de unde $h = \frac{2\sigma}{r\rho g}$.

Pentru lichide care nu udă pereții vasului, menisc fiind convex, forțele de tensiune superficială vor fi îndreptate în jos și lichidul din vasul capilar coboară sub nivelul lichidului din exterior. Denivelarea h este dată de aceeași formulă — formula lui Jurin.

c) Acest subiect a fost tratat la XIX.4°.c.

XXXIII.1°. a) Variația energiei interne a gazului ideal monoatomic în cursul încălzirii este $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1)$. Deoarece $p_3V_2 = \nu RT_3$, iar $p_1V_1 = \nu RT_1$, rezultă că $\Delta U = \frac{3}{2}(p_3V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}(4 \cdot 10^5 \cdot 3 - 2 \cdot 10^5) = 1{,}5 \cdot 10^6$ J.

b) Întrucît lucrul mecanic în transformarea izocoră este nul, lucrul mecanic total este egal cu cel efectuat de gaz în cursul încălzirii izobare: $L = L_{12} = p_1(V_2 - V_1) = 10^5(3 - 2) = 10^5$ J.

c) În conformitate cu primul principiu al termodinamicii, căldura absorbită de gaz pentru a efectua transformările indicate este egală cu suma variației energiei interne și a lucrului mecanic efectuat: $Q = \Delta U + L$. Ținînd seamă de rezultatele obținute la punctele precedente, avem $Q = \Delta U + L = 1{,}5 \cdot 10^6 + 10^5 = 1{,}6 \cdot 10^6$ J.

2°. a) Căldura Q absorbită de oglindă pentru a se încălzi de la 0°C la 100°C (cu diferența de temperatură Δt) este $Q = C\Delta t = 752(100 - 0) = 7{,}52 \cdot 10^4$ J.

b) Întrucît distanța focală a unei oglinzi sferice este egală cu jumătate din raza sa, $f = \frac{R}{2}$, rezultă că la 0°C raza oglinzii este $R_0 = 2f_0 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ m. Datorită dilatării termice, la 100°C raza oglinzii va fi $R_t = R_0(1 + \alpha\Delta t)$, de unde distanța focală la 100°C va fi $f_t = \frac{R_t}{2} = \frac{R_0(1 + \alpha\Delta t)}{2} = f_0(1 + \alpha\Delta t) = 0{,}5(1 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 100) = 0{,}501$ m.

c) Deoarece vîrful V al oglinzii sferice rămîne fix în cursul încălzirii acesteia, distanța x_1 de la obiect la oglindă rămîne invariabilă, în timp ce distanța de la oglindă la imaginea obiectului considerat variază de la x_2 la x_2', conform relațiilor $\frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_0} - \frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f_t} - \frac{1}{x_1}$. Rezultă că deplasarea P_1P_2 a imaginii obiectului considerat este

$$P_1P_2 = x_2' - x_2 = x_1\left(\frac{f_t}{x_1 - f_t} - \frac{f_0}{x_1 - f_0}\right) = 0{,}52\left(\frac{0{,}501}{0{,}52 - 0{,}501} - \frac{0{,}5}{0{,}52 - 0{,}5}\right) \cong 0{,}71 \text{ m}.$$

3°. a) Lungimea de undă λ_1 a radiației luminoase considerate în regiunea 1 poate fi determinată din viteza radiației în această regiune (v_1) și frecvența ν a radiației, prin relația $\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu}$. La rîndul ei, viteza radiației în regiunea 1 poate fi dedusă din viteza luminii în vid (c) și indicele de refracție n_1 al zonei: $v_1 = \frac{c}{n_1}$. Rezultă că $\lambda_1 = \frac{c}{n_1\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3} \cdot 5 \cdot 10^{14}} \cong 3{,}46 \cdot 10^{-7}$ m.

b) Notăm cu i_1, r_1 și r_2 unghiurile de incidență și refracție indicate în figura F.B. 72. Valoarea minimă a unghiului r_2 pentru care se observă reflexia totală corespunde unghiului limită l_{23}. Conform legii refracției, $\sin l_{23} = \frac{n_3}{n_2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{k}$.

Aplicînd din nou legea refracției pentru dioptrul care separă regiunile 1 și 2, obținem $\frac{\sin r_{1\,min}}{\sin r_{2\,min}} = \frac{\sin r_{1\,min}}{\sin l_{23}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{k}$, deci $\sin r_{1\,min} = \frac{1}{k^2}$. În final, găsim că $\sin i_{1\,min} = \sin r_{1\,min} \cdot \frac{n_1}{n_0} = \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{1}{k^2}$, deci indicele de refracție relativ k $\left(= \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_3}\right)$ este $k = \sqrt{\frac{n_1}{n_0 \sin i_{1\,min}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2{,}5 \cdot 0{,}5}} \cong 1{,}17$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Ţinînd seamă de relaţiile deduse şi folosind notaţiile din figura F.B.72, obţinem

$$\delta = n_1 AB + n_2 BC, \text{ unde } AB = \frac{BE}{\cos r_{1\,min}} = \frac{h/3}{\sqrt{1-\sin^2 r_{1\,min}}} = \frac{h}{3}\cdot\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 i_{1\,min}}},$$

$$BC = \frac{BD}{\cos r_{2\,min}} = \frac{h/3}{\sqrt{1-\sin^2 r_{2\,min}}} = \frac{h}{3}\cdot\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}, \text{ deci}$$

$$\delta = n_1\left[\frac{h}{3}\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 - n_0^2\sin^2 i_{1\,min}}} + \frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right] =$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{3\cdot 10^{-3}}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-6{,}25\cdot 0{,}25}} + \frac{1{,}17}{\sqrt{1{,}38-1}}\right] \cong 5{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{m}.$$

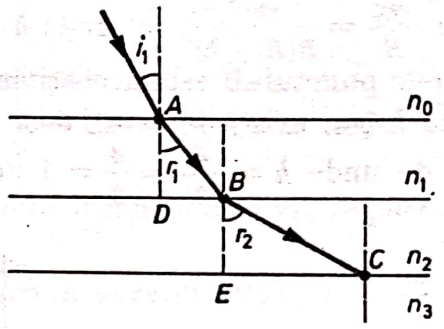


Fig. F.B.72

4°. a) Prin definiţie, viteza termică a moleculelor unui gaz este egală cu viteza pătratică medie a moleculelor gazului: $v_T = \sqrt{\widetilde{v^2}}$. Comparînd ecuaţia termică de stare a gazelor ideale $p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{NRT}{N_A V} = nk_BT$ (unde N este numărul moleculelor gazului, N_A numărul lui Avogadro, $n = \frac{N}{V}$ concentraţia moleculelor în unitatea de volum a gazului, iar $k_B = \frac{R}{N_A}$ constanta lui Boltzmann) cu formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare $p = \frac{1}{3}nm\widetilde{v^2}$ (unde m este masa unei molecule a gazului), găsim că $\widetilde{v^2} = \frac{3k_BT}{m}$, iar $v_T = \sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

b) Acest subiect a fost tratat la XXX.4°.b, după un ciclu Carnot.

c) Din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ rezultă poziţiile focarelor anterior $f_1 = \lim\limits_{x_2\to\infty} x_1 = -\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$ şi posterior $f_2 = \lim\limits_{x_1\to\infty} x_2 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$ ale lentilei subţiri, numite şi distanţe focale ale lentilei.

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XXXII.5°.c.

b) $m(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, unde m_0 este masa de repaus a corpului, v viteza corpului față de sistemul de referință considerat (în care masa corpului este $m(v)$), iar c viteza luminii în vid.

c) $I = I_0 e^{-kd}$, unde I_0 este intensitatea fasciculului incident, I intensitatea fasciculului luminos după străbaterea stratului de substanță de grosime d, iar k coeficientul de absorbție al fasciculului luminos de către substanța considerată.

XXXIV.1°. Corpul coboară de-a lungul suprafeței sferei descriind o traiectorie circulară (figura F.B.73). Forța centrifugă crește cu creșterea vitezei. Corpul se va desprinde de suprafața sferei în momentul în care rezultanta compunerii greutății $\vec{G}$ cu forța centrifugă $\vec{F}_c$ devine tangentă la traiectorie (suprafața sferei). În acest moment triunghiul format de $\vec{G}$, $\vec{F}_c$ și rezultanta lor este asemenea cu triunghiul OMB, deci $\dfrac{G}{R} = \dfrac{F_c}{R-h}$ sau $\dfrac{mg}{R} = \dfrac{mv^2}{R(R-h)}$, de unde $h = R - \dfrac{v^2}{g}$. Viteza pe care o capătă corpul cînd ajunge în punctul M este aceeași cu viteza pe care ar căpăta-o în cădere liberă pe distanța h (nu există frecare), deci $v = \sqrt{2gh}$. Ecuația precedentă devine $h = R - 2h$, de unde $h = \dfrac{R}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$ m.

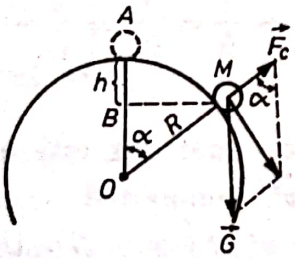


Fig. F.B.73

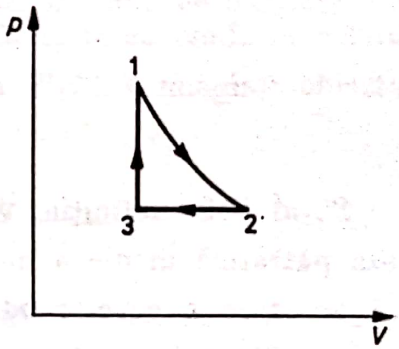


Fig. F.B.74

2°. a) Pentru transformarea izotermă $1 \to 2$ (figura F.B.74), $p_1V_1 = p_2V_2$, deci $p_2 = \dfrac{p_1V_1}{V_2} = \dfrac{5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = 2{,}5 \cdot 10^5$ N · m^{-2}; rezultă $T_2 = T_1 = 500$ K, $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ N · m^{-2}.

Pentru izobara $2 \to 3$, $p_3 = p_2$, $\dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{T_3}{T_2}$, deci $T_3 = \dfrac{V_3T_2}{V_2} = \dfrac{V_1T_2}{V_2} = \dfrac{T_2}{2} =$ $= 250$ K; rezultă $T_3 = 250$ K, $V_3 = V_1 = 10^{-3}$ m^3, $p_3 = p_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ N · m^{-2}.

b) Lucrul mecanic transferat în procesele ciclului are expresiile

$$L_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad L_{23} = p_2(V_3 - V_2) = p_2V_2\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right) =$$

$$= p_1V_1\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) \text{ și } L_{31} = 0, \text{ deci } L = L_{12} + L_{23} + L_{31} = p_1V_1\left(\ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_1}{V_2} - 1\right) =$$

$$= 5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}\left(0{,}693 + \frac{1}{2} - 1\right) = 96{,}5 \text{ J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\eta = \frac{L}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$, unde Q_1 și Q_2 sînt căldurile primită și, respectiv, cedată în cursul unui ciclu. Căldurile transferate în procesele care compun ciclul sînt $Q_{12} = L_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$, $Q_{23} = \nu C_p(T_3 - T_2) = \nu C_p T_1 \left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right) = -\frac{1}{2}\nu C_p T_1 < 0$ și $Q_{31} = \nu C_V(T_1 - T_3) = \nu C_V T_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{1}{2}\nu C_V T_1 > 0$, deci căldura primită este $Q_1 = Q_{12} + Q_{31} = \nu T_1 \left(R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_V}{2}\right)$, iar căldura cedată este $Q_2 = Q_{23} = -\frac{1}{2}\nu C_p T_1$. Rezultă

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\nu C_p T_1}{\nu T_1 \left(R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{C_V}{2}\right)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}R + R\right)}{R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{5}{4}R} \cong 0{,}1 = 10\%.$$

d) Temperaturile extreme sînt $T_{max} = T_1$ și $T_{min} = T_3$, iar $\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$, de unde $\frac{\eta}{\eta_C} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = \frac{1}{5}$ sau $\eta_C = 5\eta$.

3°. a) Viteza termică a moleculelor este viteza pătratică medie $\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Din ecuația termică de stare a gazului ideal $pV = \frac{m}{\mu}RT$ rezultă $\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m}$, deci $\sqrt{\widetilde{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{64 \cdot 10^{-3}}} \cong 375 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Numărul de molecule din ν kilomoli de gaz este $N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{32} \cdot 6 \cdot 10^{26} = 1{,}2 \cdot 10^{24}$ molecule.

c) $U = NE_c = \nu N_A \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{2} \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 4500$ J.

4°. a) Acest subiect a fost tratat la IX.5°.c.

b) Cînd un sistem termodinamic își modifică starea în contact cu exteriorul, în general apare un transfer de lucru mecanic și căldură între sistem și exterior, care are ca rezultat modificarea energiei interne a sistemului. Considerăm un proces care duce sistemul dintr-o stare inițială 1, caracterizată de energia internă U_1, într-o stare 2, caracterizată de energia internă U_2. Legea conservării și transformării energiei în procese mecanice și termice (primul principiu al termodinamicii) afirmă că variația energiei interne este egală cu suma algebrică dintre cantitatea de căldură Q și lucrul mecanic L schimbate de sistem cu exteriorul în cursul procesului, adică $\Delta U = U_2 - U_1 = Q - L$.

Dacă în procesul considerat nu apare nici o variație a energiei interne a sistemului ($U_2 = U_1$), cum ar fi în cazul unei transformări ciclice, atunci $Q = L$, adică sistemul poate efectua un lucru mecanic egal cu căldura primită din exterior și invers. Dacă un sistem efectuează un lucru mecanic fără a primi căldura din exterior (într-o destindere adiabatică), lucrul mecanic este efectuat pe seama energiei interne a sistemului. Aceasta se reduce cu o cantitate egală cu lucrul mecanic efectuat.

c) Acest subiect a fost tratat la XV.5°.b.

Scanned with OKEN Scanner

5°. a) Acest subiect a fost tratat la XXVIII.3°.b.

b) Ecuația undei plane descrie modul în care depinde de timp în fiecare punct din spațiu mărimea perturbației, adică dă expresia explicită a funcției $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Unda plană se caracterizează prin faptul că suprafețele de fază constantă sînt plane. Unda plană se caracterizează prin faptul că în toate punctele, din zona spațială în care se propagă unda, mărimea perturbată oscilează cu aceeași amplitudine. Vom considera că oscilatorii dintr-un plan dat (plan de referință) oscilează toți în fază, funcția care descrie oscilația lor fiind $u_1 = A \sin \omega t$. Particulele care se află într-un plan paralel cu planul de referință situat la distanța x de acesta vor fi afectate de oscilație după un interval de timp $\tau = \frac{x}{v_f}$, unde v_f este viteza de fază a undei.

După intrarea în stare de oscilație, particulele acestui plan vor efectua oscilații identice cu cele din primul plan, dar defazate. La momentul t starea de oscilație a acestor particule este aceeași cu starea de oscilație a particulelor din planul de referință la un moment anterior cu intervalul de timp τ, adică va fi descrisă de ecuația $u = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v_f}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v_f}\right) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Aceasta este ecuația undei plane. În ultima expresie, $\lambda = \frac{2\pi v_f}{\omega}$ este lungimea de undă a perturbației în mediul considerat.

c) Considerăm un gaz ideal închis într-un vas și aflat în echilibru termodinamic. În urma ciocnirilor dintre moleculele gazului și pereții vasului, gazul va exercita o presiune asupra pereților, datorată forței medii cu care moleculele acționează asupra peretelui. Vom analiza ciocnirea unei molecule cu peretele. Pentru simplificare considerăm că vectorul viteză al moleculei este într-un plan perpendicular pe perete. Descompunem vectorul viteză după direcția normală la perete și după direcția paralelă cu peretele, conform figurii F.B.75. În procesul ciocnirii

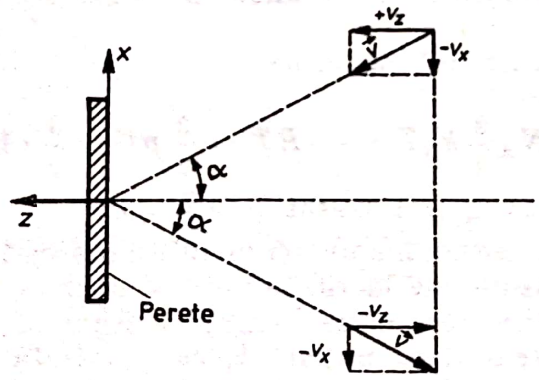


Fig. F.B.75

perfect elastice cu peretele, componenta vitezei perpendiculară pe perete își schimbă sensul, în timp ce componenta paralelă rămîne nemodificată prin ciocnire. Variația impulsului particulei în procesul de ciocnire este $H_1 = mv_z - (-mv_z) = 2mv_z$. Considerăm o arie ΔS a peretelui care este ciocnită de N molecule în unitatea de timp. Variația impulsului total al acestor particule în timpul Δt va fi $\Delta H = N\Delta H_1 \Delta t = 2mv_z N \Delta t$. Conform teoremei impulsului, variația impulsului în unitatea de timp este egală cu forța medie pe care particulele o exercită asupra peretelui $F = 2mv_z N$.

Particulele care ciocnesc aria ΔS în unitatea de timp sînt cele conținute într-un cilindru avînd baza ΔS și generatoarea egală cu v_z, deci volumul $v_z \Delta S$.

Notînd cu n numărul de particule din unitatea de volum, rezultă $N = \frac{1}{2} n v_z \Delta S$, unde factorul $\frac{1}{2}$ apare datorită faptului că jumătate dintre particule se mișcă spre perete și jumătate în sens contrar. Forța exercitată de particule asupra ariei ΔS va fi $F = 2mv_z \times \frac{1}{2} n v_z \Delta S = nmv_z^2 \Delta S$, deci presiunea va fi $p = \frac{F}{\Delta S} = nmv_z^2$.

Această expresie este adevărată numai în ipoteza că toate moleculele gazului vor avea aceeași valoare pentru componenta v_z a vitezei. În realitate moleculele se mișcă cu viteze diferite, deci au și componente v_z diferite. Considerăm că din cele n molecule din unitatea de volum, n_1 au viteza în jurul valorii v_1, n_2 au viteza în jurul valorii v_2 ș.a.m.d., unde evident $\sum_i n_i = n$. Presiunea p va fi suma presiunilor exercitate de diferitele grupuri de molecule $p = \sum_i p_i$, unde $p_i = n_i m v_{z_i}$, adică $p = m \sum_i n_i v_{z_i}^2$.

Ținînd seama că $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$ și că o particulă are probabilitate egală de a avea orice orientare pentru viteză, $\widetilde{v_{ix}^2} = \widetilde{v_{iy}^2} = \widetilde{v_{iz}^2} = \frac{\widetilde{v_i^2}}{3}$, deci $p = \frac{1}{3} m \sum_i n_i \widetilde{v_i^2} = \frac{1}{3} nm\widetilde{v^2}$.

Mărimea $\widetilde{v^2}$ definită prin relația $\widetilde{v^2} = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{n}$ reprezintă media aritmetică a pătratelor vitezelor particulelor; $\sqrt{\widetilde{v^2}}$ poartă numele de viteză pătratică medie sau viteză termică a moleculelor.

Multiplicînd și împărțind cu 2, expresia presiunii devine

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m\widetilde{v^2}}{2} = \frac{2}{3} n \widetilde{E}_c,$$

unde $\widetilde{E}_c = \frac{m\widetilde{v^2}}{2}$ reprezintă energia cinetică medie a moleculelor gazului. Aceasta este formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare.

XXXV.1°. a) Cînd comutatorul K din figura F.B.76 este pe poziția 1, defazajul φ_1 între curent și tensiune este dat, conform figurii F.B.77 de $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{L\omega}{R}$. Rezultă $R = \frac{L\omega}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{2\pi\nu \cdot L}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cong 54{,}4\ \Omega$.

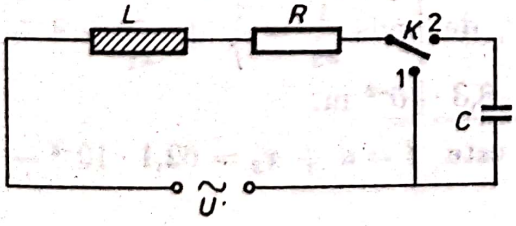


Fig. F.B.76

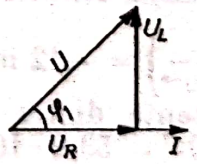


Fig. F.B.77

b) Cînd comutatorul K este pe poziția 2, defazajul este dat de $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$. Condiția $\varphi_2 = 0$, implică $X_L = X_C$, adică $L\omega = \frac{1}{C\omega}$.

Rezultă $C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{L4\pi^2\nu^2} = \frac{1}{4\pi^2 50^2 \cdot 0{,}1} \cong 1{,}01 \cdot 10^{-4}$ F ($\nu = 50$ Hz este frecvența de rezonanță în acest caz).

c) Puterea activă este puterea disipată pe rezistență

$$P_a = U_R I = UI\cos\varphi = U\frac{U}{Z}\cos\varphi = \frac{U^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{220^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{54{,}4^2 + 0{,}1^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 50^2}} \cong 667{,}2\,\text{W}.$$

2°. a) Convergența C a lentilei este egală cu inversul distanței focale, deci $f_1 = f_2 = \frac{1}{C} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ m. Relația dintre distanța focală și razele de curbură R_1 și R_2 ale celor două fețe ale lentilei subțiri este $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Pentru fața plană $R_2 = \infty$, deci, notînd $R_1 = R$, rezultă $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$, de unde $R = (n-1)f = \frac{n-1}{C} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{8} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ m.

b) Distanța x_2 (figura F.B.79) la care se formează imaginea prin prima lentilă este dată de ecuația lentilelor subțiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$. Rezultă $\frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1} = C + \left(\frac{1}{-0{,}16}\right) = 1{,}75$, deci $x_2 = \frac{1}{1{,}75} = 0{,}571$ m. Distanța acestei imagini față de cea de-a doua lentilă este $x_1' = -(d - x_2) = -(0{,}621 - 0{,}571) = -5 \cdot 10^{-2}$ m. Această imagine va servi ca obiect pentru cea de-a doua lentilă și se află între lentilă și focar. Ecuația lentilei a doua este $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'}$, de unde $\frac{1}{x_2'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x_1'} = 8 + \left(\frac{1}{-5 \cdot 10^{-2}}\right) = -12\ \text{m}^{-1}$ sau $x_2' = \frac{1}{-12} \cong -8{,}3 \cdot 10^{-2}$ m.

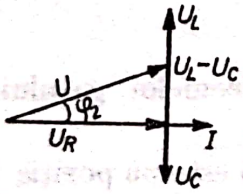


Fig. F.B.78

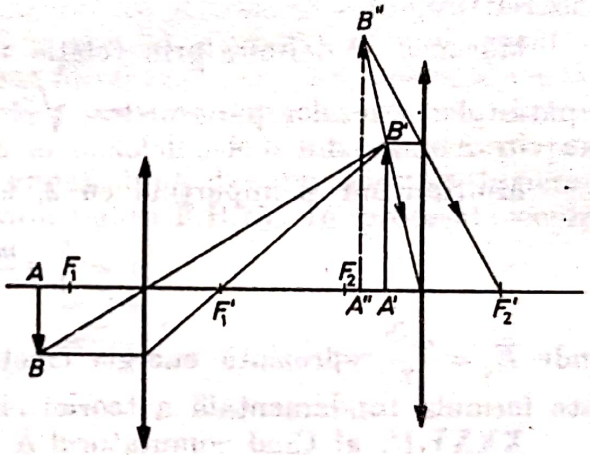


Fig. F.B.79

Distanța dintre prima lentilă și imagine este $l = d + x_2' = 62{,}1 \cdot 10^{-2} - 8{,}3 \cdot 10^{-2} = 53{,}8 \cdot 10^{-2}$ m.

c) $\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{57{,}1}{16} \cong 3{,}568 \\ \beta_2 &= \frac{y_2}{y_2} = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{8{,}3}{5} \cong 1{,}66. \end{aligned}\right\} \beta_{\text{sist.}} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cong 5{,}92.$

3°. a) Ecuația conservării energiei (ecuația lui Einstein) în cele două cazuri se scrie: $h\nu_1 = E_0 + eU_{s_1}$ și $h\nu_2 = E_0 + eU_{s_2}$. Prin scădere membru cu membru, rezultă $h(\nu_1 - \nu_2) = e(U_{s_1} - U_{s_2})$, de unde

$$h = \frac{e(U_{s_1} - U_{s_2})}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}(1{,}96 - 0{,}77)}{10^{14}(9{,}6 - 6{,}72)} \cong 6{,}61 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

b) Din prima ecuație a lui Einstein rezultă

$$E_0 = h\nu_1 - eU_{s_1} = 6{,}61 \cdot 10^{-34} \cdot 9{,}6 \cdot 10^{14} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}96 = 3{,}209 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2\text{eV}.$$

4°. a) Acest subiect a fost tratat la XXII.5°.c.

b_1) Rețeaua de difracție constă dintr-un sistem de fante înguste, rectilinii, egale, paralele, echidistante și foarte apropiate una de alta. Fantele sînt zonele transparente mărginite de zgîrieturi succesive trasate pe un material transparent (sticlă). Dacă pe o distanță L se găsesc N zgîrieturi (fante), atunci numărul de fante pe unitatea de lungime este $n = \frac{N}{L}$. Inversul acestui număr, $l = \frac{1}{n} = \frac{L}{N}$, reprezintă distanța dintre două fante succesive. Această distanță poartă numele de constantă a rețelei de difracție.

b_2) Energia totală relativistă a unui nucleu cu masa de repaus M_N, aflat în repaus, este $W_N = M_N c^2$. Dacă nucleonii care constituie acest nucleu se consideră separați unul de altul, atunci energia relativistă de repaus a acestora este de Z ori energia $m_p c^2$ a unui proton în repaus, plus de $(A - Z)$ ori energia $m_n c^2$ de repaus a unui neutron, adică $W_F = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2$. Energia totală W_F a nucleonilor izolați trebuie să fie egală cu energia totală de repaus a nucleului plus lucrul mecanic efectuat pentru a separa nucleonii. Lucrul mecanic efectuat pentru a desface un nucleu izolat, aflat în repaus, în nucleoni izolați în repaus se numește energie de legătură a nucleului. Din cele două relații rezultă

$$W_{leg} = W_F - W_N = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - M_N c^2.$$

5°. a) Interfranja, în cazul interferenței luminii într-o pană, se obține pornind de la expresia diferenței de drum optic, δ, dintre două unde care au aceeași direcție de incidență și care se reflectă pe cele două fețe ale unei lame plan paralele (figura F.B.80). Diferența de drum dintre undele 1 și 2 este $\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}$, unde n

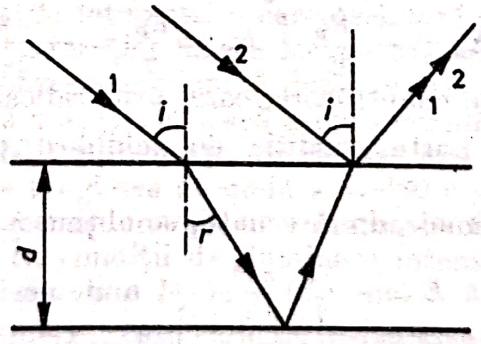


Fig. F.B.80

este indicele de refracție al materialului lamei. În cazul incidenței normale ($i = 0$, $r = 0$), $\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$. Considerăm un fascicul incident pe fața superioară a unei pane cu indicele de refracție n. Dacă incidența este normală, atunci franjele luminoase vor apărea în locurile în care este satisfăcută condiția de maxim de inter-

Scanned with OKEN Scanner

ferență $\delta = k\lambda$. Maximul de ordinul k se formează în zona în care grosimea d_k a panei este dată de relația $2nd_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, iar maximul următor, de ordinul $k+1$, se formează în zona cu grosimea d_{k+1} dată de $2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$. Făcînd diferența ultimelor două ecuații, rezultă $d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n}$. Din figura F.B.81 se

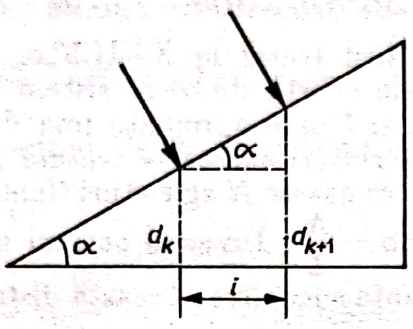


Fig. F.B.81

observă că $d_{k+1} - d_k = i \operatorname{tg} \alpha \approx i\alpha$, unde i este interfranja (unghiul panei este, în general, foarte mic, $\alpha \lesssim 1°$). Din ultimele două relații se obține $i \cong \frac{\lambda}{2\alpha n}$.

b) Formula nivelurilor energetice ale atomului de hidrogen se obține pornind de la faptul că orbitele stabile sînt cele pentru care este satisfăcută condiția de cuantificare $rp = n\frac{h}{2\pi}$, unde r este raza orbitei, p impulsul electronului, h constanta lui Planck, iar n un număr întreg. Energia E a sistemului este formată din energia potențială de interacțiune dintre electron și nucleu, $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (este negativă, deoarece forța de interacțiune este atractivă), și energia cinetică $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$. Electronul rămîne pe orbită datorită echilibrului dintre forța de atracție exercitată de nucleu și forța centrifugă, $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, de unde $E_c = \frac{mv^2}{2} = -\frac{E_p}{2}$. Energia totală va fi $E = E_c + E_p = -\frac{E_p}{2} + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$. Valoarea lui r se obține utilizînd condiția de cuantificare, care, prin ridicare la pătrat, conduce la $r^2p^2 = n^2\frac{h^2}{4\pi^2}$. Pe de altă parte, condiția de echilibru pe orbită se mai scrie $rp^2 = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0}$. Împărțind ultimele două ecuații, se obține $r = \frac{n^2h^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{4\pi^2me^2}$. Introducînd în expresia energiei, rezultă $E = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}$, unde am introdus notația $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Energia totală este negativă, deoarece electronul se află într-o stare legată în atom, în care energia potențială este negativă și mai mare în valoare absolută decît energia cinetică.

XXXVI.1°. a_1) Acest subiect a fost tratat la IV.4°.c.

a_2) Proprietățile radiației laser sînt următoarele:

— Intensitatea foarte mare. Datorită dezexcitării unui număr mare de atomi într-un timp foarte scurt, și datorită faptului că radiația este emisă de toți acești atomi într-o singură direcție, intensitatea fasciculului laser este mult mai mare

decît intensitatea emisă de sursele optice convenţionale, incluzînd între acestea şi Soarele.

— Monocromaticitatea. Prin monocromaticitate se înţelege raportul $\frac{\Delta\nu}{\nu_m}$ unde ν_m este frecvenţa medie a radiaţiei, iar $\Delta\nu$ domeniul de frecvenţe în care radiaţia are amplitudine nenulă (figura F.B.82). Datorită faptului că emisia stimulată este cea caracteristică unui laser, monocromaticitatea radiaţiei laser este incomparabil mai bună (raportul $\frac{\Delta\nu}{\nu_m}$ mai mic) decît pentru o sursă clasică care emite aceeaşi radiaţie — atomii sursei emit aceeaşi radiaţie, dar spontan.

— Coerenţa. Radiaţia laser prezintă proprietăţi de coerenţă mult mai bune decît radiaţia surselor clasice, deoarece într-un laser predomină emisia stimulată, în cadrul căreia atomii emit corelat unii faţă de alţii. În cazul surselor clasice fiecare atom emite la întîmplare, independent de actele de emisie ale celorlalţi atomi.

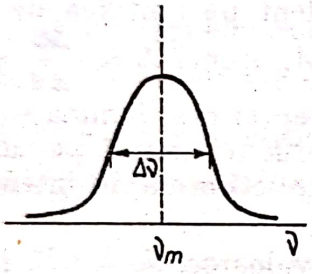


Fig. F.B.82

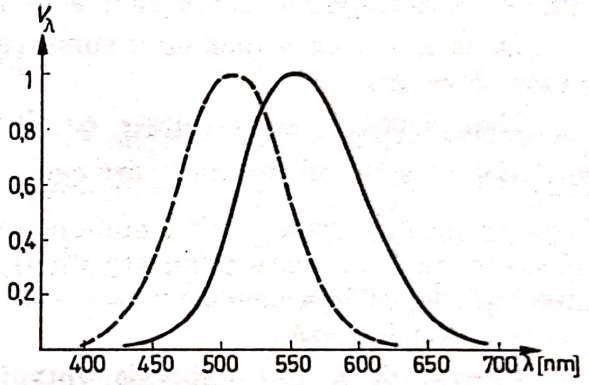


Fig. F.B.83

— Direcţionalitatea. Ca şi celelalte proprietăţi, directionalitatea decurge din faptul că emisia radiaţiei de către atomii sursei se face stimulat, fiecare atom emiţînd în aceeaşi direcţie cu radiaţia stimulatoare. De aceea radiaţia unui laser constituie un fascicul cu direcţie de propagare bine determinată. În cazul unei surse clasice, atomii emit independent, necorelat, deci radiaţia emisă de un atom poate avea orice direcţie din spaţiu.

b) Mărimile şi unităţile fotometrice caracterizează radiaţiile electromagnetice din punctul de vedere al senzaţiei luminoase pe care radiaţiile o produc asupra ochiului uman normal. Senzaţia luminoasă depinde atît de amplitudinea radiaţiei, cît şi de lungimea de undă a acesteia. Dacă asupra ochiului cade o lumină verde cu lungimea de undă $\lambda = 550$ nm, senzaţia luminoasă este de circa opt ori mai mare decît dacă lumina ar avea lungimea de undă $\lambda = 680$ nm, în condiţiile în care cele două radiaţii transportă aceeaşi energie în unitatea de timp (sînt caracterizate de acelaşi flux de energie). În condiţii de iluminare intensă (lumină de zi) cea mai mare sensibilitate a ochiului este la $\lambda_0 = 555$ nm.

Se introduce o mărime V_λ, care caracterizează răspunsul spectral al ochiului, numită sensibilitate spectrală relativă a ochiului, prin relaţia $V_\lambda = \frac{\Phi_{e_0}}{\Phi_{e_\lambda}}$. Φ_{e_λ} este fluxul de energie la o anumită lungime de undă λ, care produce aceeaşi senzaţie luminoasă ca un flux de energie Φ_{e_0}, la lungimea de $\lambda_0 = 555$ nm, stabilit convenţional. Funcţia V_λ este reprezentată în figura F.B.83, unde cu linie plină se arată dependenţa de lungimea de undă în cazul luminii intense (vedere diurnă), iar cu linie punctată în cazul luminii slabe (vedere crepusculară). Se stabileşte o mărime

biofizică, numită flux luminos, prin relaţia $\Phi = K \sum_{\lambda} V_\lambda \Phi_{e\lambda}$, unde $\Phi_{e\lambda}$ este fluxul energetic la lungimea de undă λ, K este o constantă, iar însumarea se face peste toate lungimile de undă existente în radiaţia incidentă*.

Intensitatea luminoasă a unei surse punctiforme este definită ca fluxul luminos emis în unitatea de unghi solid, $I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$.

Intensitatea luminoasă este mărimea fundamentală a fotometriei, iar unitatea ei, candela (cd), este unitatea fundamentală în SI. Candela este intensitatea luminoasă emisă în direcţie normală de o arie de $\frac{1}{6} \cdot 10^{-5}$ m^2 din suprafaţa unui corp negru aflat la temperatura de solidificare a platinei (≈ 2042 K) şi la presiunea de 101 325 N $\cdot$ m^{-2}.

Unitatea de flux luminos se numeşte lumen şi este o unitate derivată care se defineşte cu ajutorul candelei; un lumen este fluxul luminos emis într-un unghi solid de un steradian de către o sursă cu intensitatea de o candelă (1 lm = 1 cd $\cdot$ 1 sr).

Dacă avem de a face cu o sursă care emite uniform în toate direcţiile, fluxul ei este $\Phi = 4\pi I$.

Iluminarea E se defineşte ca fluxul luminos incident pe unitatea de arie. Dacă $\Delta\Phi$ este fluxul luminos care cade normal pe aria ΔA, atunci $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{I}{r^2}$. Unitatea de iluminare poartă numele de lux (lx). Luxul reprezintă iluminarea unei suprafeţe de 1 m^2 care primeşte un flux de 1 lm, uniform repartizat pe această suprafaţă. În ultima ecuaţie r este distanţa dintre sursa punctiformă de intensitate I şi aria considerată.

Constanta K din expresia fluxului luminos are valoarea $K \cong 675$ lm/W.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la XV.5°.b.

b) Acest subiect a fost tratat la VIII.4°.c.

c) Ipoteza lui de Broglie constă în aceea că orice particulă în mişcare (electron, proton, atom etc.) are şi o comportare ondulatorie. Legătura dintre lungimea de undă asociată λ şi impulsul p al particulei este dată de relaţia lui de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ unde $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s este constanta lui Planck, iar m şi v sînt masa şi, respectiv, viteza particulei.

3°. Polarizarea luminii prin reflexie se bazează pe faptul că reflexia luminii depinde de starea de polarizare a radiaţiei incidente, adică de direcţia în care oscilează vectorul cîmp electric al acesteia. Această dependenţă atestă faptul că unda luminoasă este o undă transversală — direcţia oscilaţiei este perpendiculară pe direcţia de propagare. Pentru observarea acestui fapt se face următorul experiment. Pe suprafaţa unei plăci de sticlă neagră, lustruită, O, se trimite un fascicul de raze paralele, notat IP în figura F.B.84. Unghiul de incidenţă este $i_B \cong 57°$. Fasciculul reflectat PP_1 cade pe o placă O', identică cu prima, şi se observă intensitatea luminii reflectate de aceasta, adică intensitatea fasciculului P_1R. Rotind oglinda O' în jurul direcţiei PP_1, unghiul de incidenţă rămîne constant, dar se modifică planul de incidenţă al oglinzii O' faţă de oglinda O. Experienţa arată că intensitatea fasciculului reflectat depinde de poziţia relativă a planelor de incidenţă, prezentînd creşteri şi reduceri alternative. Intensitatea este maximă cînd unghiul dintre planele de incidenţă pe cele două oglinzi ia valorile 0° şi 180°. Dacă planele de incidenţă sînt

* În cazul spectrului continuu suma se transformă într-o integrală.

perpendiculare, intensitatea fasciculului P_1R este minimă. Această comportare a fasciculului PP_1 față de poziția oglinzii O_1 arată absența unei simetrii de revoluție a acestui fascicul față de direcția de propagare. Aceasta înseamnă că vibrațiile luminoase reflectate nu sînt total simetrice în planul perpendicular pe direcția de propagare, deci unda luminoasă reflectată este polarizată.

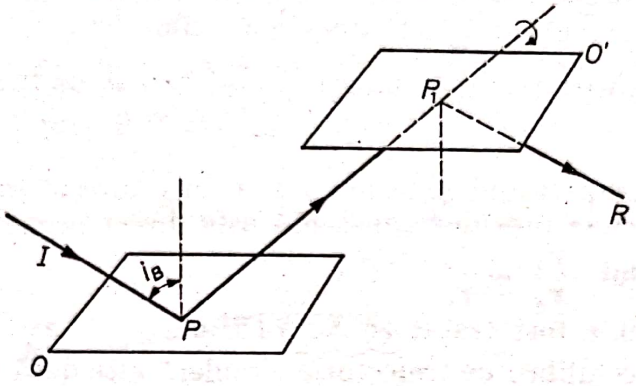


Fig. F.B.84

4°. a) Energia electronului $E_c = 10$ eV a fost obținută datorită unei diferențe de potențial de accelerare U, deci $E_c = eU$, de unde $U = \frac{E_c}{e} = \frac{10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 10$ V.

b) Traiectoria electronului este un cerc. Forța Lorentz $F_L = evB$ trebuie să fie egală cu forța centrifugă $\frac{mv^2}{r}$, de unde $r = \frac{mv}{eB}$. Viteza electronului rezultă din legea conservării energiei, $\frac{mv^2}{2} = eU$, de unde $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Raza orbitei devine atunci

$$r = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \cong \frac{1}{10^{-4}}\sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \cong 0{,}106 \text{ m}.$$

c) Înlocuind în ecuația echilibrului dintre forța Lorentz și forța centrifugă expresia $v = \omega r$, rezultă $m\omega^2 r = e\omega r B$, de unde

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{eB}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 2{,}83 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 2{,}83 \text{ MHz}.$$

5°. a) Din ecuația termică de stare a gazului ideal avem $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$. Pentru condiții normale, ecuația devine $\rho_0 = \frac{\mu p_0}{RT_0}$. Făcînd raportul, rezultă $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}$, de unde $\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$. Masa de gaz din butelie este

$$m = \rho V = \rho_0 \frac{pVT_0}{p_0 T} = 1{,}43 \cdot \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 273}{10^5 \cdot 300} \cong 0{,}1561 \text{ kg}.$$

b) Volumul V' pe care această masă l-ar ocupa la aceeași temperatură și la presiunea $p' = 1{,}2 \cdot 10^5$ N · m^{-2} este dat de $pV = p'V'$, de unde $V' = \frac{pV}{p'} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^5} = 10^{-1}$ m^3. Din acest volum se consumă $\Delta V = V' - V = 10^{-1} - 4 \cdot 10^{-3} = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$ m^3. Timpul t cît poate fi alimentat bolnavul, la un debit volumic $d_V = 0{,}1 \frac{1}{\text{min}}$, este $t = \frac{\Delta V}{d_V} = \frac{9{,}6 \cdot 10^{-2}}{0{,}1 \cdot 10^{-3}} = 960$ min $= 16$ h.

Scanned with OKEN Scanner

c) Masa oxigenului folosit este masa conținută într-un volum ΔV la presiunea p' și temperatura T. Din ecuația termică de stare rezultă:

$$\Delta m = \frac{\mu p' \Delta V}{RT} = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} \cdot \frac{p' \Delta V}{T} = 1{,}43 \cdot \frac{273}{10^5} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-3}}{300} \cong 0{,}1499 \text{ kg}.$$

XXXVII.1°. a) Legea Gay-Lussac sau legea transformării izobare se enunță astfel: Variația relativă a volumului unui gaz, aflat la presiune constantă, este direct proporțională cu variația temperaturii, $\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t$, unde α este coeficientul de dilatare izobară.

În funcție de temperatura absolută legea Gay-Lussac se formulează astfel: Volumul unui gaz aflat la presiune constantă este direct proporțional cu temperatura absolută a gazului, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$.

b_1) Acest subiect a fost tratat la XXVI.1°.c.

b_2) Condiția de echilibru pe traiectoria circulară este dată de egalitatea dintre forța Lorentz $F_L = qvB$ și forța centrifugă $F_c = \frac{mv^2}{r}$, de unde $r = \frac{mv}{qB}$, unde m și q sînt masa și, respectiv, sarcina ionului, v este viteza acestuia, iar B este inducția magnetică a cîmpului în care se mișcă ionul.

2°. a) Acest subiect a fost tratat la I.4°.a. și XX.4°.a.

b) Prin dispersie a luminii într-un mediu se înțelege separarea componentelor spectrale de diferite frecvențe, datorită faptului că indicele de refracție al mediului (și deci viteza de propagare) depinde de frecvență.

c) Un sistem cuantic aflat într-o stare excitată nu poate rămîne un timp oricît de lung în această stare, ci, după un timp mai lung sau mai scurt, apare fenomenul de dezexcitare. Acest fenomen constă în trecerea spontană (de la sine) a sistemului cuantic în stări cu energie mai mică. Modificarea energiei interne a unui sistem cuantic, sub acțiunea unor cauze interne sau externe, se numește tranziție cuantică a sistemului. Procesul de dezexcitare este aleator, în sensul că nu se poate stabili exact cît timp se va afla în starea excitată un sistem cuantic dat. Probabilitatea de tranziție în unitatea de timp P se definește prin relația $P = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right)$, unde ΔN este numărul de sisteme care au efectuat tranziția de dezexcitare în intervalul de timp Δt, iar N este numărul de sisteme aflate în starea excitată. Semnul minus apare datorită faptului că $\Delta N < 0$ (numărul de sisteme excitate scade în timp), iar P este o mărime pozitivă. Relația se mai scrie $\frac{dN}{N} = -P dt$. Integrînd de la momentul $t = 0$, cînd $N = N_0$, pînă la un moment oarecare t, rezultă:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\int_0^t P dt.$$

Considerînd P independent de timp, rezultă $\ln \frac{N}{N_0} = -Pt$ sau $N = N_0 e^{-Pt}$.

În locul probabilității de tranziție se utilizează timpul mediu de viață al sistemelor în stare excitată, definit prin relația $\tau = \frac{1}{P}$. Legea de variație în timp a numărului de sisteme în starea excitată devine $N = N_0 e^{-t/\tau}$. Timpul mediu de viață are semnificația de interval de timp după care numărul de sisteme excitate se reduce la valoarea $N = \frac{N_0}{e}$ (e este baza logaritmilor naturali).

Scanned with OKEN Scanner

3°. Experimentele efectuate de Rutherford în legătură cu împrăştierea particulelor α pe foiţe subţiri metalice au avut ca scop verificarea diferitelor modele atomice propuse.

Particulele α, emise de poloniu cu energia de 5 MeV, trec printr-o foiţă de aur foarte subţire. La trecerea prin foiţă particulele α sînt deviate de la traiectoria iniţială. Numărul de particule deviate sub diferite unghiuri este înregistrat cu ajutorul unui detector. Particulele α fiind pozitive, vor fi respinse de particulele pozitive din atom (nucleu), forţa de respingere fiind dată de legea lui Coulomb. Datorită acestei interacţiuni traiectoria particulelor se transformă într-o hiperbolă, aşa cum se arată în figura F.B. 85. La distanţă mare de centrul de ciocnire traiec-

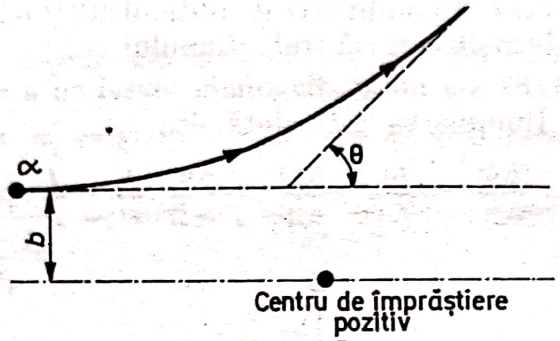


Fig. F.B.85

toria redevine practic rectilinie şi deviată faţă de direcţia iniţială cu un unghi θ. Vom numi parametru de ciocnire, b, distanţa faţă de centrul de împrăştiere la care ar trece particula dacă nu ar fi deviată (dacă ar fi neutră). Dacă parametrul de ciocnire este mare faţă de raza atomului, particula nu este deviată de la drumul său rectiliniu, deoarece atomul este neutru în ansamblu. Cu cît parametrul de ciocnire este mai mic, cu atît unghiul de deviaţie θ este mai mare (figura F.B. 86). Această comportare se înregistrează în cazul în care sarcina pozitivă a nucleului este concentrată într-o zonă spaţială foarte mică în raport cu dimensiunile atomului. Rezultatele experimentale au confirmat această comportare şi, astfel, ipoteza conform

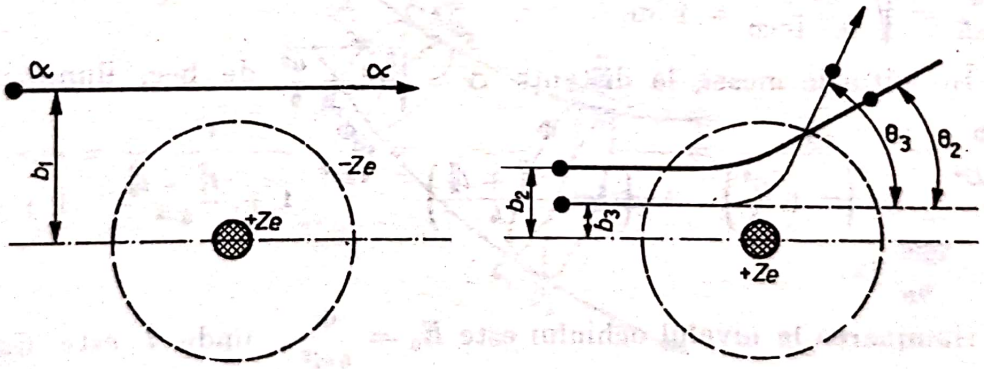


Fig. F.B.86

căreia sarcina este repartizată uniform în interiorul atomului a fost înlăturată, ea nefiind concordantă cu experienţa, deci, cu certitudine, eronată.

Considerînd sarcina nucleului punctiformă, Rutherford a calculat probabilitatea de împrăştiere sub diferite unghiuri θ. Rezultatele experimentale au coincis perfect cu aceste calcule. Distanţa minimă pînă la care se poate apropia particula α de nucleu se poate calcula cunoscînd energia particulei α şi sarcina nucleului. Cînd particula ajunge la distanţa minimă, întreaga ei energie cinetică $\frac{Mv^2}{2}$ se transformă

în energie potențială de interacțiune. Dacă r_{min} este această distanță, atunci energia potențială va fi $E_p = \frac{2e \cdot Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}}$, unde am ținut seama că sarcina particulei α este $2e$, iar cea a nucleului Ze, e fiind sarcina electronului, iar Z numărul de sarcină al atomului. Egalînd cele două energii rezultă $r_{min} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{Mv^2}{2}}$. Introducînd valorile numerice cunoscute, $\frac{Mv^2}{2} = 5$ MeV, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $Z = 79$ (pentru aur), rezultă $r_{min} = 4{,}55 \cdot 10^{-14}$ m. Raza nucleului atomului este, evident, mai mică decît această valoare și întrucît raza atomului este de ordinul 10^{-10} m, înseamnă că nucleul ocupă un spațiu extrem de redus în centrul atomului.

4°. a) În figura F.B. 87 s-a notat diagonala mesei cu $a = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, unde l_1 și l_2 sînt laturile mesei. Iluminarea este dată de

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}\,\frac{\Delta\Omega}{\Delta A} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{I}{r^2}.$$

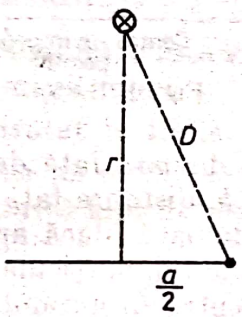


Fig. F.B.87

Întrucît sursa emite izotrop, înseamnă că $\Phi = 4\pi I$, deci $E = \frac{\Phi}{4\pi r^2}$, de unde $r = \sqrt{\frac{\Phi}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{4000\pi}{4\pi \cdot 1000}} = 1$ m.

b) În colțurile mesei, la distanța $\Delta = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$ de bec, iluminarea va fi

$$E' = \frac{\Phi}{4\pi D^2} = \frac{\Phi}{4\pi\left(r^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{\Phi}{4\pi\left(r^2 + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}\right)} = \frac{\Phi}{4\pi r^2}\,\frac{1}{1 + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4r^2}} = \frac{E}{1 + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4r^2}} =$$

$$= \frac{4}{9}E = \frac{4000}{9\pi}\ \text{lx}.$$

c) Iluminarea la nivelul ochiului este $E_0 = \frac{\Phi}{4\pi l^2}$, unde l este distanța de la lampă la ochi. Pupila fiind foarte mică, se poate considera că iluminarea este uniformă pe suprafața S_0 a acesteia, deci fluxul prin pupilă va fi

$$\Phi_0 = S_0 E_0 = \frac{\pi d^2}{4}\,\frac{\Phi}{4\pi l^2} = \frac{16 \cdot 10^{-6} \cdot 4000}{16 \cdot 4} = 10^{-3}\ \text{lm}.$$

5°. a) $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, deci $Q_2 = (1 - \eta)Q_1 = (1 - 0{,}4)1200 = 720$ J.

b) În contact cu sursa caldă gazul suferă o transformare izotermă, în care energia internă nu se modifică. Gazul efectuează tot atîta lucru mecanic cîtă căldură primește, $L = Q_1 = 1200$ J.

Scanned with OKEN Scanner

c) În cele două cazuri motorul funcționează între temperaturile T_1 și T_2, respectiv T_1' și T_2, deci $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ și $\eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1'}$. Din cele două ecuații rezultă $\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta$ și $\frac{T_2}{T_1'} = 1 - \eta'$, sau $T_1 = \frac{T_2}{1-\eta}$ și $T_1' = \frac{T_2}{1-\eta'}$. Făcînd diferența se obține $T_1' - T_1 = T_2\left(\frac{1}{1-\eta'} - \frac{1}{1-\eta}\right) = 280\left(\frac{1}{1-0,5} - \frac{1}{1-0,4}\right) = 93,33$ K.

XXXVIII.1°. a) $a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 10\left(0,5 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2,5\ \frac{m}{s^2}$.

b) $\Delta E_c = F_{fr}l = \mu mg\cos\alpha\cdot l = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 3\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = 15$ J.

c) Din condiția $a_c' = g(\sin\alpha - \mu'\cos\alpha) \leqslant 0$ rezultă $\mu' \geqslant \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2°. a) $r_ş = \frac{R_i}{\frac{I_2 - I_1}{I_1}}$, de unde $r_ş = \frac{1}{\frac{30-3}{3}} = \frac{1}{9}$; șuntul va fi montat în paralel cu ampermetrul.

b) $\frac{1}{r_e} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{r_ş} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = 10\ \Omega^{-1}$, de unde $r_e = \frac{1}{10} = 0,1\ \Omega$.

c) $W = r_ş(I_2 - I_1)^2 t = \frac{1}{9}(30-3)^2\cdot 2\cdot 60 = 9720$ J.

3°. a) Se consideră deplasarea unui element de fluid incompresibil, delimitat la momentul t de secțiunile A_1B_1 și A_2B_2, de arii S_1 și S_2 (v. și fig. F.B. 88), în intervalul Δt, pînă la noua poziție, delimitată de secțiunile C_1D_1 și C_2D_2. Deoa-

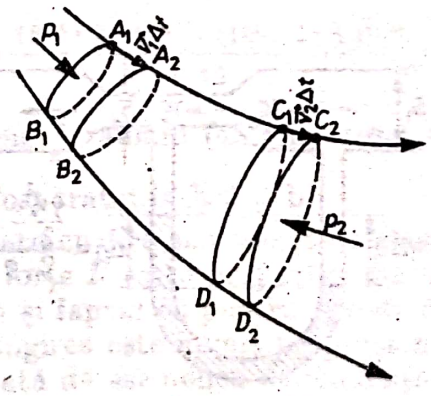


Fig. F.B.88

rece asupra elementului de fluid considerat se efectuează lucrurile mecanice $L_1 = p_1S_1\cdot A_1C_1 = p_1S_1v_1\Delta t = p_1\frac{m}{\rho}$ (unde m este masa elementului de fluid delimitat de secțiunile A_1B_1 și C_1D_1, egală — datorită incompresibilității fluidului — cu masa fluidului delimitat de secțiunile A_2B_2 și C_2D_2 ale tubului de curent considerat), de către presiunea p_1 care acționează asupra feței A_1B_1, și $L_G = mg(z_1 - z_2)$ de către cîmpul gravitațional (z_1 și z_2 fiind înălțimile centrelor de greutate ale elementelor de fluid delimitate de secțiunile A_1B_1 și C_1D_1, respectiv A_2B_2 și C_2D_2), iar elementul

de fluid considerat efectuează lucrul mecanic $L_2 = p_2 S_2 \cdot A_2C_2 = p_2 S_2 v_2 \Delta t = p_2 \frac{m}{\rho}$, variația energiei cinetice a elementului de fluid considerat va fi $E_c = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) =$ $= L_1 + L_g - L_2 = \frac{m}{\rho}(p_1 - p_2) + m \cdot g(z_1 - z_2)$, de unde $p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 =$ $= p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$, sau $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}$ (mărimile p, $\rho g z$ și $\frac{1}{2}\rho v^2$ fiind numite presiune statică, presiune de „poziție" și, respectiv, presiune dinamică).

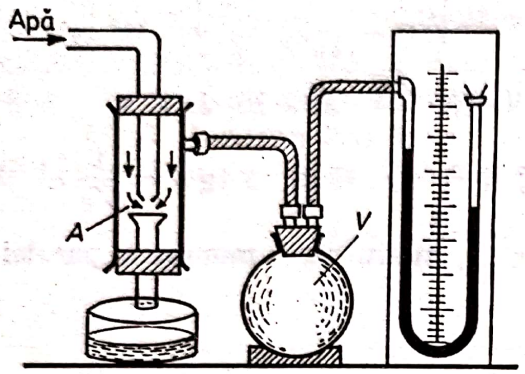


Fig. F.B.89

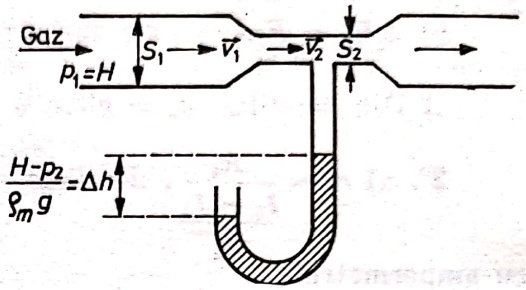


Fig. F.B.90

Dintre aplicațiile legii lui Bernoulli, prezintă interes *trompa* de apă (figura F.B. 89), utilizată pentru antrenarea fluidelor din anumite vase, *sonda de presiune*, utilizată pentru determinarea presiunii statice $p_2 = H - \rho_{Hg} g \Delta h$ a fluidului (figura F.B.90) și *tubul Venturi*, folosit pentru determinarea debitelor de fluid (figura F.B. 91).

b) Acest subiect a fost tratat la II.5°.a. și VIII.4°.b.

c) Pentru definirea și implicațiile variației fluxului magnetic (prntr-o suprafață), v. răspunsul pentru subiectul XI.4.b.

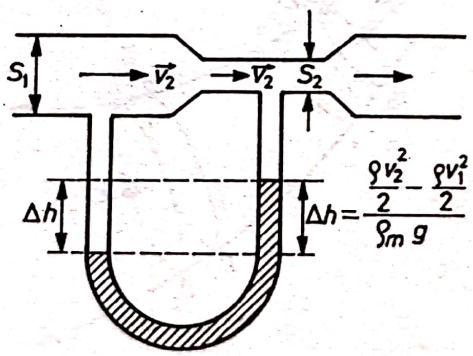


Fig. F.B.91

5°. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, unde T este perioada pendulului gravitațional (unitate de măsură: secunda), l lungimea firului pendulului (unitate: metrul), iar g accelerația gravitațională (unitate: $m \cdot s^{-2}$).

b) $m = KIt = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} It$, unde m este masa de substanță (metal) separată dintr-un electrolit prin electroliză, K echivalentul electrochimic al substanței, I intensitatea curentului electric prin electrolit, t durata trecerii curentului electric

prin electrolit, F constanta lui Faraday $\left(\cong 96\,500\ \frac{\text{C}}{\text{echivalent}}\right)$, A masa atomică a substanţei, iar n valenţa substanţei (metalului). Unităţile de măsură ale acestor mărimi fizice sînt respectiv: kilogramul (m), $\frac{\text{kg}}{\text{C}}$ (echivalentul electrochimic), amperul (I), secunda (t), $\frac{\text{kg}}{\text{echivalent}}\left(\frac{A}{n}\right)$.

c) Acest subiect a fost tratat la XXXI.4°.c.

XXXIX.1°. a) Din ecuaţiile $E_c = \frac{mv_0^2}{2} + Fd$ şi $d = v_0t + \frac{at^2}{2} = v_0t + \frac{Ft^2}{2m}$, rezultă ecuaţia $m^2v_0^2 + 2m(Fv_0t - E_c) + F^2t^2 = 0$, cu soluţiile

$$m = \frac{E_c - Fv_0t \pm \sqrt{E_c(E_c - 2Fv_0t)}}{v_0^2} = \frac{1000 - 10\cdot 5\cdot 10 \pm \sqrt{1000(1000 - 2\cdot 10\cdot 5\cdot 10)}}{5^2} = 20 \text{ kg}.$$

b) $d = v_0t + \frac{Ft^2}{2m} = 5\cdot 10 + \frac{10\cdot 10^2}{2\cdot 20} = 75$ m.

c) $L = Fd = 10\cdot 75 = 750$ J.

$p = m(v - v_0) = mat = Ft$, de unde $p = 10\cdot 10 = 100\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$.

2°. a) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4}\cdot 10^{-6}}} = 10^5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

b) $X_{C_0} = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{10^{-6}\cdot 10^5} = 10\ \Omega$.

c) Tangenta unghiului de defazaj dintre tensiune şi curent este $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$.

Deoarece $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{\pi}10^5 = 2\cdot 10^5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, obţinem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{10^{-4}\cdot 2\cdot 10^5 - (10^6\cdot 2\cdot 10^5)^{-1}}{15} = 1,$$

deci curentul este defazat cu $\frac{\pi}{4}$ radiani (45°) în urma tensiunii.

3°. a) Acest subiect a fost tratat la XV.4°.b.

b) Experienţele efectuate cu fire sau resorturi elastice arată că alungirea Δl a firului sub acţiunea unei forţe F, este proporţională cu forţa F, cu lungimea l_0 a firului nedeformat, precum şi faptul că pentru fire de o aceeaşi lungime l_0, solicitate cu o aceeaşi forţă F, alungirea este invers proporţională cu aria secţiunii transversale S_0 a firului. Se constată de asemenea dependenţa alungirii de natura materialului firului. Toate aceste constatări pot fi sintetizate prin legea lui Hooke: $\frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0}$, unde E este modulul de elasticitate (Young) al materialului firului. Notînd $\frac{ES_0}{l_0} = k$ (constanta elastică), iar deformarea Δl prin x, legea lui Hooke poate fi scrisă şi în forma simplificată $F = kx$.

c) Metoda clasică de determinare a sarcinii electrice elementare este bazată pe experienţa lui Millikan, constînd în determinarea duratelor de coborîre t_c, respectiv de urcare t_u (prin schimbarea polarităţii tensiunii dintre armăturile unui condensator plan), a unor particule sferice, de ulei, încărcate electric, deplasarea

Scanned with OKEN Scanner

acestora avînd loc între reperele (distanţate cu d) vizate cu o lunetă (figura F.B. 92). Ecuaţiile:

$$qE = \frac{4\pi r^3}{3}(\rho_u - \rho_{aer})g + 6\pi r\eta \frac{d}{t_u} = 6\pi r\eta \frac{d}{t_c} - \frac{4\pi r^3}{3}(\rho_u - \rho_{aer})g$$

permit determinarea sarcinii q a picăturilor de ulei şi apoi a sarcinii electrice elementare, drept cel mai mare divizor comun al acestor sarcini q.

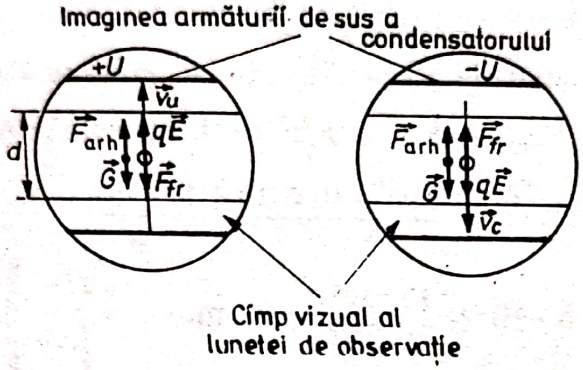


Fig. F.B.92

4°. a) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, unde $\vec{L}$ este momentul cinetic al punctului material $\left(\text{unitate de măsură: } \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$, $\vec{r}$ este raza vectoare a punctului material (unitate de măsură: m), iar $\vec{p}$ este impulsul punctului material $\left(\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.

b) $\rho(t) = \rho_0(1 + \alpha t)$, unde $\rho(t)$ şi ρ_0 sînt rezistivităţile electrice la temperaturile t şi 0°C (unitate: $\Omega \cdot \text{m}$), α este coeficientul de temperatură al rezistivităţii (unitate: $\Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$), iar t este temperatura (°C).

c) $B = \mu \frac{NI}{l}$, unde B este inducţia magnetică (T), μ permeabilitatea $\left(\frac{\text{H}}{\text{m}}\right)$, N numărul de spire, I intensitatea curentului (A), l (lungimea solenoidului (m).

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNȚURI

1. MECANICĂ

1°. Un corp cu masa $m = 3$ kg se mișcă pe o suprafață orizontală netedă cu o viteză v_0 la momentul $t = 0$. Acestui corp i se aplică o forță $F = 18$ N, în sens contrar sensului mișcării sale. Forța reduce viteza corpului la jumătatea vitezei sale inițiale, în timp ce acesta se deplasează cu $\Delta x = 9$ m. a) În cît timp are loc acest proces? b) Care este valoarea lui v_0?

2°. Într-o barcă, inițial în repaus, pe un lac, se află un om și un număr de $n = 100$ bile de masă $m = 1{,}0$ kg. La capătul opus al bărcii se află un perete de care bilele aruncate de om se ciocnesc plastic (figura F.C.1). Omul aruncă bilele cu o viteză v_0 orientată sub un unghi α față de orizontală. Cunoscînd că lungimea bărcii este $l = 15$ m și că masa bărcii împreună cu omul este $M = 200$ kg, să se afle: a) distanța pe care o parcurge barca în timpul în care omul aruncă cele n bile; b) viteza medie a bărcii dacă frecvența de aruncare a bilelor este de o bilă la fiecare secundă.

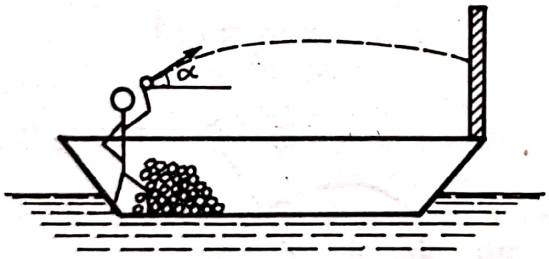


Fig. F.C.1

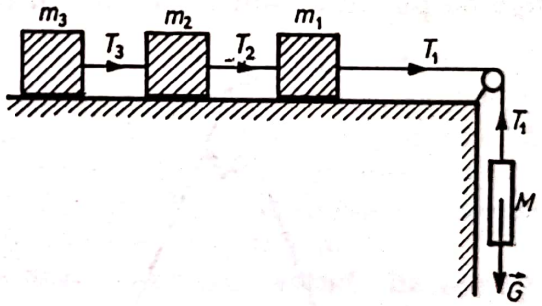


Fig. F.C.2

3°. Un volant cu masa $M = 150$ kg și raza $R = 0{,}5$ m se află în mișcare de rotație cu o viteză unghiulară $\omega = 100$ rad $\cdot$ s^{-1}. Volantul poate fi oprit cu ajutorul unei pîrghii verticale de lungime $l = 1{,}5$ m articulată astfel încît ea vine în contact cu periferia roții la o distanță $d \approx \frac{l}{3}$ de punctul de articulație. Să se afle: a) forța F cu care trebuie să se acționeze asupra capătului liber al pîrghiei pentru a se realiza o frînare cu accelerația unghiulară $\varepsilon = 2$ rad $\cdot$ s^{-2}, dacă coeficientul de frecare dintre roată și pîrghie este $\mu = 0{,}25$; b) energia cinetică pe care o are volantul după $t = 15$ s din momentul începerii frînării; c) viteza cu care se va deplasa roata dacă în momentul $t = 15$ s se rupe axul și roata vine în contact cu planul orizontal.

4°. Trei corpuri cu masele m_1, m_2 și m_3 sînt legate unul de altul și legate de un alt corp de masă M printr-un fir trecut peste un scripete (figura F.C.2). Cunoscînd

coeficientul de frecare μ dintre corpuri şi planul pe care se află, să se afle: a) acceleraţia mişcării sistemului; b) tensiunile în firele de legătură.

5°. Un corp de dimensiuni mici, legat de un fir inextensibil de lungime l, formează un pendul. Considerăm pendulul ataşat unui cărucior. Să se afle unghiul format de fir cu verticala în poziţia de echilibru, tensiunea în fir şi perioada micilor oscilaţii în următoarele cazuri: a) căruciorul se află în mişcare uniformă pe un plan orizontal; b) căruciorul se mişcă pe planul orizontal cu acceleraţia a; c) căruciorul coboară liber pe un plan înclinat care formează unghiul α cu orizontala.

6°. Un corp de formă oarecare, avînd masa $m = 1$ kg, se poate roti în jurul unui ax care trece prin el. Rotind corpul cu un unghi mic α faţă de poziţia de echilibru, acesta începe să oscileze. Să se calculeze: a) perioada oscilaţiei, dacă momentul de inerţie al corpului faţă de axul considerat este $J = 5 \cdot 10^{-2}$ kg·m^{-2}, iar distanţa dintre ax şi centrul de greutate este $d = 0{,}4$ m; b) viteza unghiulară de mişcare a corpului, cînd acesta trece prin poziţia de echilibru, dacă unghiul maxim de deviaţie este $\alpha = 5°$ (se va utiliza aproximaţia $\sin \alpha \approx \alpha$).

7°. Un obiect de masă $m = 70$ kg se află pe capătul unui cărucior de lungime $l = 6$ m şi masă $M = 100$ kg, aflat în repaus. Să se afle: a) sub ce unghi faţă de orizontală şi cu ce viteză trebuie aruncat obiectul, pentru ca să aterizeze pe celălalt capăt al căruciorului exact în momentul în care acesta se opreşte; b) spaţiul parcurs de cărucior după ce obiectul a aterizat pe cărucior. Coeficientul de frecare dintre cărucior şi şine este $\mu = 0{,}1$. Timpul de „interacţiune" dintre obiect şi cărucior se consideră mic în raport cu timpul de „zbor" al obiectului.

8°. Un pendul gravitaţional cu lungimea $l = 1$ m este deplasat astfel încît firul formează un unghi $\alpha = 60°$ cu poziţia de echilibru. Un opritor de dimensiune neglijabilă, fixat la o distanţă $d = \frac{l}{4}$ de corpul legat de fir, împiedică oscilaţia în momentul cînd pendulul trece prin poziţia de echilibru. Să se afle: a) unghiul format de porţiunea inferioară a firului cu verticala în momentul cînd corpul părăseşte cercul de rază d; b) înălţimea maximă, faţă de poziţia de echilibru, la care ajunge corpul în cursul deplasării în partea opusă deplasării iniţiale (figura F.C.3).

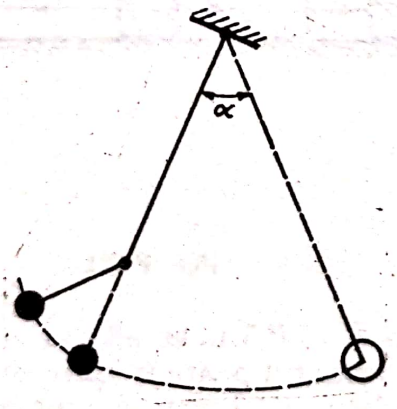


Fig. F.C.3

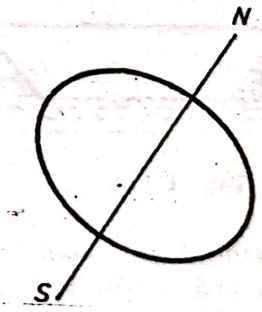


Fig. F.C.4

9°. Presupunînd că Pămîntul are forma unui elipsoid de revoluţie (rezultat prin rotaţia unei elipse în jurul axei polilor; v. figura F.C.4) ale cărui dimensiuni nu pot fi neglijate, să se determine: a) direcţia şi sensul momentului rezultant, faţă de centrul Pămîntului, al forţelor de atracţie de către Soare a fiecărui punct material (element de volum) al Pămîntului; b) valoarea modulului momentului rezultant al forţelor de atracţie exercitate de Soare asupra Pămîntului, în funcţie de perioada de rotaţie a Pămîntului, de perioada de precesie a axei polilor, de unghiul format de

axa polilor cu viteza unghiulară de precesie, şi de momentul de inerţie al Pămîntului faţă de axa polilor; c) valoarea pe care ar avea-o momentul rezultant al forţelor, dacă Pămîntul ar fi o sferă perfectă (justificaţi răspunsul). Se va presupune Soarele drept punct material.

(Concursul de fizică, proba de selecţie a lotului R.S.R., Buzău 1982).

10°. Două vase cilindrice V_1 şi V_2, de axă verticală, sînt legate printr-un tub T de volum foarte mic (figura F.C.5). Bazele plane ale celor două vase se află în acelaşi plan orizontal. Diametrul vasului V_1 este $D = 100$ mm. În vasul V_1 se varsă succesiv 1 l de mercur şi 2 l de apă. Se cere să se calculeze denivelarea între suprafeţele libere ale celor două lichide. Se cunosc

$$\rho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ şi } \rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

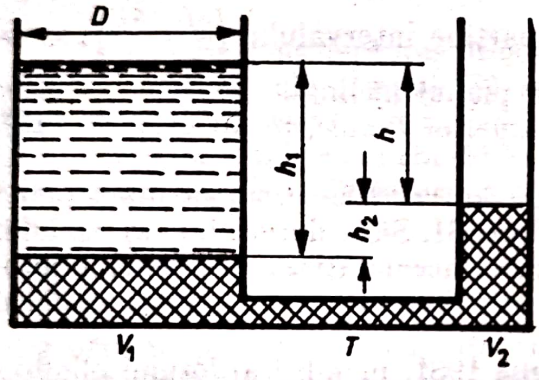


Fig. F.C.5

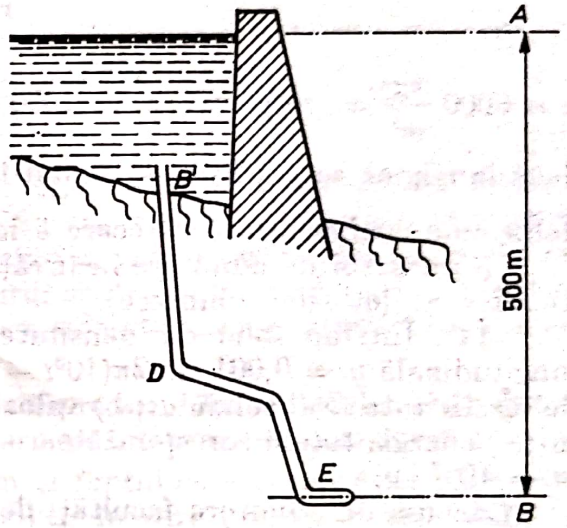


Fig. F.C.6

11°. În figura F.C.6 este reprezentat un baraj. Apa la nivelul superior, A, este în repaus ($v_A = 0$). Să se calculeze: a) viteza v_B a apei la ieşirea din conducta forţată CDE, dacă nu avem pierderi; b) debitul volumic al conductei forţate, ştiind că ieşirea tubului conductei are diametrul $d = 60$ mm; c) presiunea efectivă la baza conductei, adică la intrarea în tubul conductei, neglijînd pierderea de sarcină a acesteia şi ştiind că diametrul conductei forţate este $D = 0{,}5$ m.

12°. Un sistem format din două corpuri identice, avînd fiecare masa $m = 1$ kg, legate printr-un resort de constantă elastică $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, se deplasează fără frecare pe un plan orizontal (figura F.C.7). Ştiind că lungimea resortului nedeformat

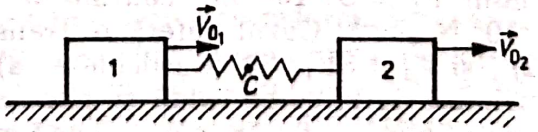


Fig. F.C.7

este $l_n = 0{,}3$ m, precum şi faptul că la momentul iniţial lungimea resortului este $l_0 = 0{,}38$ m, iar corpurile au vitezele $v_{0_1} = 0{,}1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ şi $v_{0_2} = 0{,}3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, să se determine: a) ecuaţia mişcării centrului de masă al sistemului; b) frecvenţa oscilaţiilor proprii

ale sistemului; c) valorile minimă și maximă ale lungimii resortului, respectiv vitezelor corpurilor față de planul considerat.

(Concursul de fizică, etapa județeană, clasa a IX-a, 1980)

13°. Un lanț omogen greu, de lungime L, este trecut peste muchia unui plan înclinat, de unghi $\alpha = 30°$, porțiunea verticală a lanțului fiind cufundată practic integral într-un lichid (figura F.C.8.). Cunoscînd densitățile lanțului și lichidului,

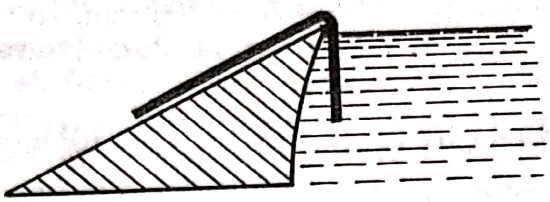


Fig. F.C.8

$\rho = 6000 \frac{kg}{m^3}$ și, respectiv, $\rho_1 = 1000 \frac{kg}{m^3}$, precum și faptul că lanțul este în repaus dacă lungimea sa x aflată pe planul înclinat aparține intervalului $\left(\frac{5L}{9}, \frac{5L}{7}\right)$, să se determine coeficientul de frecare a lanțului cu planul înclinat.

(Concursul de admitere în învățămîntul superior tehnic, profil electric, 1983, membri ai loturilor olimpice).

14°. Într-un solid de densitate $\rho = 7800$ kg · m^{-3} se propagă unda plană longitudinală $y = 0{,}001 \sin 2\pi(10^3 t - 0{,}2x)$ unități SI. Să se determine: a) modulul de elasticitate E al solidului; b) valoarea maximă a accelerației particulelor mediului; c) energia totală corespunzătoare oscilațiilor unei particule a mediului, de masă $m = 10^{-3}$ kg.

(Concurs de admitere facultăți de fizică, iulie 1981, membri ai lotului olimpic)

2. FIZICĂ MOLECULARĂ ȘI CĂLDURĂ. TERMODINAMICĂ

15°. 300 g de azot, la presiunea atmosferică ($\approx 10^5$ N · m^{-2}), se află la temperatura de 20°C într-o incintă de 50 l. Prin comprimarea acestei incinte, volumul gazului este adus la 10 l. Incinta nefiind izolată adiabatic, există un schimb de căldură între gaz și mediul exterior, în decursul acestei transformări, la finele căreia temperatura gazului este 43,4°C. Să se calculeze: a) presiunea gazului la finele transformării; b) creșterea energiei interne a gazului în cursul transformării.

Se știe că pe diagrama căldurilor molare ale azotului, pentru 200 K $< T <$ $<$ 400 K, $C_p = 28{,}75$ kJ · kmol^{-1} · K^{-1}; un kilomol de azot are masa $M = 28$ kg și constanta generală a gazelor este $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}.

16°. Un vas de volum $V_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ m^3 conține $m = 2 \cdot 10^{-2}$ kg hidrogen la presiunea $p_1 = 8{,}31 \cdot 10^5$ N · m^{-2}. Gazul suferă o transformare ciclică (figura F.C.9) astfel încît $p_2 = 2p_1$ și $V_3 = 3V_1$. Să se calculeze: a) temperaturile în cele patru stări; b) căldura primită de la sursa caldă și căldura cedată sursei reci în cursul ciclului; c) randamentul unui motor termic care ar funcționa după acest ciclu.

Se cunosc: masa molară $\mu = 2$ kg · kmol^{-1}, căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5R}{2}$ și constanta universală a gazelor ideale $R = 8310$ J · kmol^{-1} · K^{-1}.

17°. Două vase de volume V_1 și $V_2 = nV_1$, care conțin un gaz la presiunea p, sînt legate printr-un tub de volum neglijabil. Inițial cele două vase se află la aceeași temperatură T. Se încălzește vasul V_1 pînă la temperetura $T' = kT$,

temperatura vasului V_2 fiind menţinută constantă. Să se calculeze: a) presiunea gazului în starea finală; b) variaţia relativă a masei de gaz din volumul V_2 în timpul încălzirii; c) variaţia relativă a vitezei termice a moleculelor gazului din vasul V_1 în procesul de încălzire.

Se vor considera valorile numerice: $p = 2 \cdot 10^3$ N $\cdot$ m^{-2}, $n = 3$ şi $k = 2$.

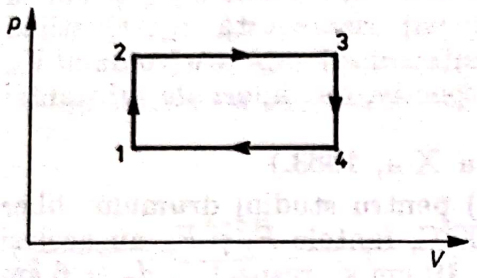


Fig. F.C.9

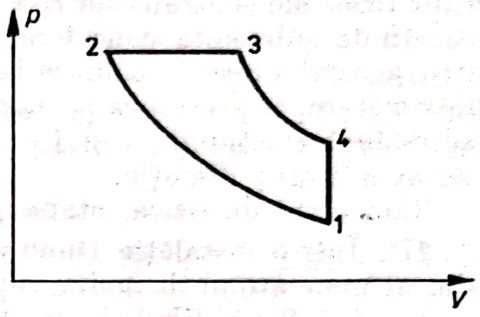


Fig. F.C.10

18°. a) Se consideră mişcarea relativă a unei molecule de gaz perfect faţă de celelalte molecule ale gazului. Să se deducă durata medie şi drumul mediu între două ciocniri succesive ale moleculei, cunoscînd aria σ a suprafeţei (normală pe direcţia mişcării moleculei considerate) din jurul centrului moleculei „ţintă", corespunzătoare ciocnirii obligatorii a moleculei considerate cu cea „ţintă" (secţiunea eficace).

Ştiind că în cadrul unui studiu efectuat asupra azotului molecular s-a constatat că la temperatura $T = 300$ K şi presiunea $p = 1$ atm moleculele acestuia parcurg drumul mediu $\tilde{\lambda} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$ m, precum şi faptul că extremităţile palierelor Andrews satisfac ecuaţia $p = -4100V_m^2 + 738V_m$, în care presiunea este dată în atm, iar volumul molar V_m în l/mol, să se calculeze: b) raza moleculei (presupusă sferică) de azot, precum şi volumul molar limită corespunzător aducerii moleculelor în tangenţă unele cu celelalte; c) fracţiunile de azot lichid, respectiv de vapori, în starea în care $p = 26{,}65$ atm, iar $V_m = 0{,}07$ l/mol; d) presiunea critică şi volumul molar critic ale azotului, comparînd volumul critic cu cel limită de mai sus. Se dau: numărul lui Avogadro $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecule}}{\text{mol}}$, constanta lui Boltzmann $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

(Concursul de fizică, proba de selecţie a lotului RSR, Buzău, 1982)

19°. O cantitate $V = 5$ moli de gaz perfect $\left(C_V = \frac{5}{2} R\right)$ parcurge un ciclu reversibil ideal format din două transformări adiabatice, o transformare izobară şi una izocoră (figura F.C.10). Se dau: $V_1/V_2 = a$ şi $V_1/V_3 = b$. Ştiind că în cazul ciclului real gazul perfect parcurge o transformare reversibilă, care, într-o reprezentare temperatură-entropie, are forma unei circumferinţe cu diametrele, paralele cu axele, egale cu variaţiile maxime ale temperaturii şi, respectiv, entropiei, din cadrul ciclului ideal, se cere: a) randamentul motorului termic care ar funcţiona după ciclul ideal indicat; b) eficienţa instalaţiei frigorifice care ar funcţiona după ciclul ideal invers (raportul dintre căldura luată de la sursa rece şi lucrul mecanic consumat pe un ciclu); c) variaţia maximă a entropiei în cazul ciclului ideal; d) eficienţa instalaţiei frigorifice care ar funcţiona după ciclul real. Pentru calcule numerice, se dau: $a = 2e$ (e = numărul Euler), $e^{2/5} = 1{,}4$, $b = 2$, $R = 8{,}31$ J/mol $\cdot$ K.

(Concursul de fizică, etapa republicană, Slatina, 1981)

Scanned with OKEN Scanner

20°. Ştiind că pentru o anumită substanţă presiunea p şi volumul V, care corespund — în cazul unei cantităţi de substanţă cu masa m — stărilor situate la extremităţile palierelor izotermelor Andrews, satisfac ecuaţia $p = \dfrac{ab^2}{b^2 + \left(V - \dfrac{c^2}{V}\right)^2}$, unde a, b şi c sînt constante fizice specifice substanţei, se cer: a) să se deducă semnificaţiile fizice ale constantelor c, a şi b; b) să se deducă variaţia energiei interne, a cantităţii de substanţă considerată, în cursul vaporizării la presiunea p_0, ştiind că pentru această presiune căldura latentă specifică de vaporizare este λ_{v_0}; c) ştiind că într-o stare, la presiunea p_0, cantitatea de substanţă considerată are volumul V_0, să se deducă fracţiunile x şi $1 - x$ de lichid şi, respectiv, de vapori ale substanţei în această stare; discuţie.

(Concursul de fizică, etapa judeţeană, clasa a X-a, 1983.)

21°. Într-o instalaţie Dunoyer (figura F.C.11) pentru studiul drumului liber mediu al unor atomi de sodiu vaporizaţi la $t = 100°C$, fantele F_1 şi F_2 au acelaşi diametru $d = 2$ cm, fiind situate la distanţele $d_1 = 10$ cm şi, respectiv, $d_2 = 6$ cm de peretele detector. Să se determine: a) presiunea care trebuie realizată în instalaţie, pentru ca drumul liber mediu al atomilor de sodiu să fie egal cu $10\,d_1$; b) diametrul zonei de penumbră a fasciculului atomic pe peretele detector; c) viteza pătratică medie a atomilor de sodiu. Se dau: masa atomului de sodiu $m = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg, secţiunea efectivă de împrăştiere a atomilor de sodiu pe molecule ale aerului $\tau = 10^{-19}$ m^2, constanta lui Boltzmann $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}.

(Concurs de admitere profil chimie, iulie 1981, membri ai lotului olimpic.)

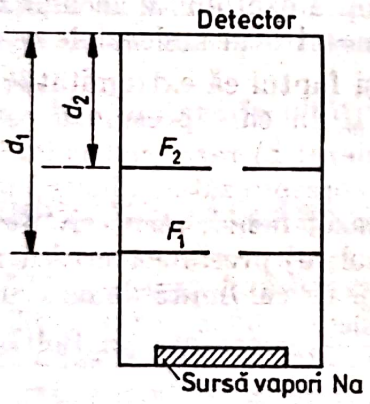


Fig. F.C.11

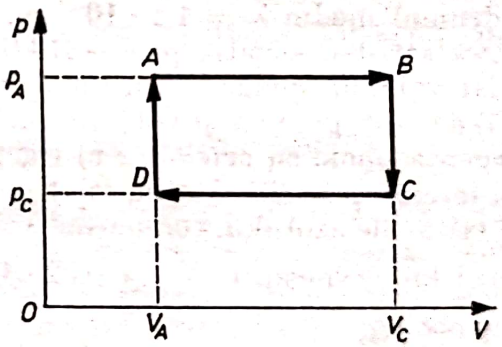


Fig. F.C.12

22°. Doi moli de gaz perfect efectuează un proces ciclic format din transformările izoterme la temperaturile $T_1 = 600$ K şi $T_2 = 300$ K şi transformările izobare la presiunile $p_1 = 2{,}718 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, $p_2 = 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}. Să se determine: a) variaţia entropiei gazului în cursul comprimării izoterme la temperatura T_2; b) exponentul adiabatic al gazului şi lucrul mecanic efectuat pe întreg ciclul; c) randamentul motorului termic care ar funcţiona după ciclul descris. Se dau: căldura molară la presiune constantă a gazului $C_p = 20{,}775$ J $\cdot$ mol^{-1} $\cdot$ K^{-1} şi constanta gazelor perfecte $R = 8{,}31$ J $\cdot$ mol^{-1} $\cdot$ K^{-1}.

23°. O cantitate de azot cu masa $m = 0{,}42$ kg efectuează un ciclu reversibil $ABCDA$ (figura F.C.12) format din transformările izobare AB şi CD şi transformările izocore BC şi DA. Cunoscînd presiunile şi volumele corespunzătoare stărilor A şi C, $p_A = 6 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2}, $V_A = 83{,}1$ l, $p_C = 3 \cdot 10^5$ N $\cdot$ m^{-2} şi $V_C = 166{,}2$ l, masa molară $M = 28$ kg $\cdot$ kmol^{-1} şi indicele adiabatei pentru azot $\gamma = 1{,}40$, precum şi

Scanned with OKEN Scanner

constanta gazelor perfecte $R = 8310\ J \cdot kmol^{-1} \cdot K^{-1}$, să se determine: a) lucrul mecanic produs de gaz prin efectuarea ciclului; b) căldura primită de gaz la parcurgerea ciclului; c) raportul dintre randamentul acestui ciclu și cel al ciclului Carnot efectuat între aceleași temperaturi extreme.

(Concurs de admitere, profil chimie, iulie 1981, membri ai lotului olimpic.)

3. ELECTRICITATE

24°. Se dă circuitul din figura F.C.13. Să se calculeze potențialul în punctul A.

25°. Între două puncte A și B sînt branșate n pile electrice în paralel, pila k avînd tensiunea electromotoare e_k și rezistența internă r_k (figura F.C.14); fiecare

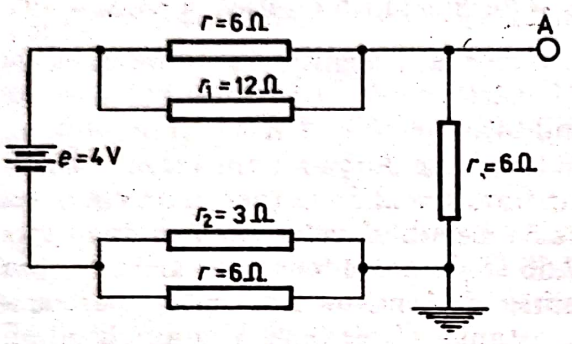


Fig. F.C.13

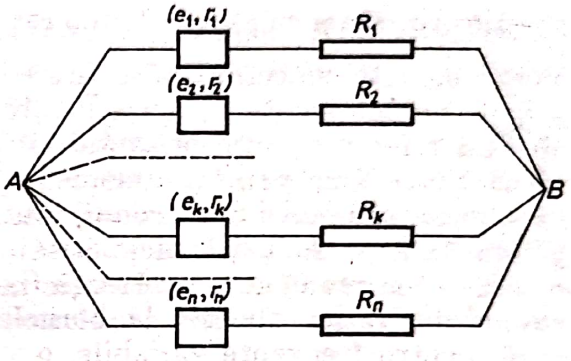


Fig. F.C.14

pilă este legată în serie cu rezistența R_k. Se cere: a) să se calculeze $V_A - V_B$, în cazurile în care $r_k = 0$ și $r_k \neq 0$; b) avînd rețeaua din figura F.C.15, să se calculeze $V_A - V_B$, pentru cazurile $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ și $r_1 = r_2 = r_3 = 1\ \Omega$.

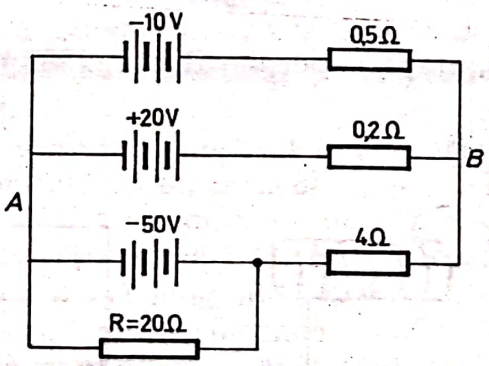


Fig. F.C.15

26°. Fie n pile electrice identice, fiecare avînd tensiunea electromotoare e și rezistența internă r. Se cer: a) tensiunea electromotoare e_s și rezistența r_s ale generatorului format prin montarea în serie a celor n pile electrice, precum și intensitatea curentului electric care trece prin rezistența, R, legată la bornele generatorului; b) tensiunea electromotoare e_p și rezistența r_p a generatorului format prin montarea în paralel a celor n pile, precum și intensitatea curentului electric care trece prin rezistența R legată la bornele generatorului; c) gruparea care trebuie aleasă pentru cele n pile, astfel încît printr-o rezistență exterioară R, legată la bornele generatorului format, să treacă un curent electric de intensitate maximă.

La fiecare punct se va face calculul pentru $n=24$, $r=1\ \Omega$, $R=6\ \Omega$ și $e=1\ V$.

Scanned with OKEN Scanner

27°. O bobină cu inductanța L și un rezistor cu rezistența R sînt montate în serie într-un circuit de curent alternativ alimentat la tensiunea $U = 110$ V caracterizată de frecvența $\nu = 50$ Hz, curentul în circuit fiind $I = 22$ A. Dacă se introduce în serie un condensator de reactanță $X_C = 4\ \Omega$, circuitul intră în rezonanță. Să se calculeze: a) valorile rezistenței, inductanței și capacității; b) intensitatea curentului în circuitul cu capacitate; c) factorul de putere și factorul de supratensiune ale circuitului.

28°. Un consumator, caracterizat de un factor de putere de 0,9, este alimentat de la rețeaua de curent alternativ cu tensiunea de 220 V, prin intermediul unor conductori a căror rezistență este de 0,2 Ω. Știind că puterea preluată de la rețea este $P = 10$ kW, să se calculeze: a) puterea consumată pe firele de transport; b) defazajul dintre tensiunea rețelei și intensitatea curentului.

29°. O vergea conductoare subțire, de masă $m = 0{,}318$ g, este suspendată în poziție orizontală cu ajutorul unui resort vertical de constantă elastică $k = 20{,}1\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Vergeaua este conectată, prin fire conductoare de masă neglijabilă, la înfășurările a două bobine identice (figura F.C.16) avînd fiecare cîte $N = 50$ spire bobinate pe cîte un miez magnetic orizontal cu permeabilitatea $\mu = 10^{-3}$ H/m, aria secțiunii transversale $S = 5$ cm^3 și lungimea $d = 4$ cm, lungimea porțiunii din vergea situată în interiorul (de mici dimensiuni) dintre bobine fiind $l = 2{,}5$ cm (vergeaua este perpendiculară pe inducția magnetică). Știind că ansamblul celor două bobine formează — împreună cu o rezistență fixă $R = 12{,}56\ \Omega$ și un condensator variabil — un circuit derivație conectat la bornele unei surse de tensiune alternativă care asigură, pentru frecvențe variabile, o valoare constantă $U_0 = 6{,}28$ V a amplitudinii tensiunii la borne, să se determine: a) frecvența tensiunii alternative pentru care oscilatorul mecanic intră în rezonanță; b) deplasarea poziției (de echilibru) a vergelei în jurul căreia se produc oscilațiile acesteia, față de poziția de echilibru, în absența curentului electric, și sensul în care se produce această deplasare; c) puterea aparentă minimă în circuitul exterior și capacitatea condensatorului pentru care este atinsă aceasta, la rezonanța oscilatorului mecanic. Se neglijează rezistența electrică a ramurii inductive.

(Concursul de fizică, etapa națională, Buzău, 1982.)

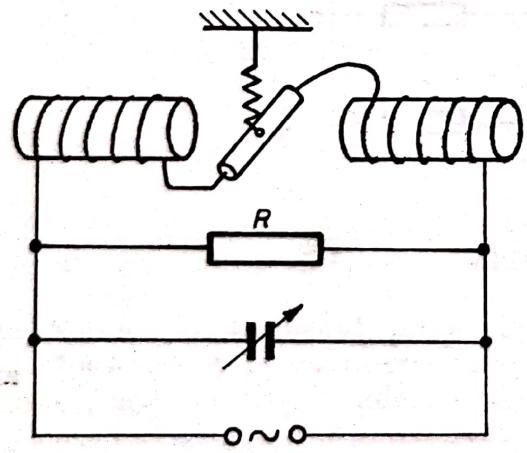


Fig. F.C.16

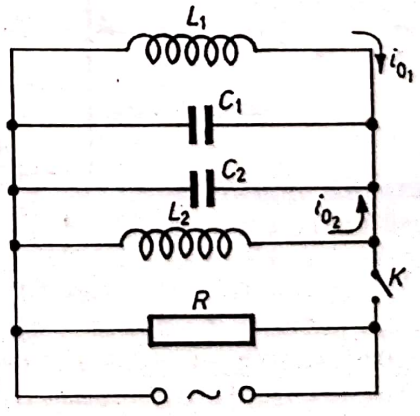


Fig. F.C.17

30°. Se consideră un circuit electric prezentat în figura F.C.17, unde $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH, $C_1 = 10$ nF, $C_2 = 5$ nF și $R = 100$ kΩ. Comutatorul K fiind închis (în poziția 1), se alimentează circuitul de la o sursă de curent alternativ

Scanned with OKEN Scanner

sinusoidal, de frecvență care poate fi modificată, dar de intensitate de curent constantă. Determinați: a) raportul dintre frecvența f_m, pentru care puterea activă în circuit atinge valoarea maximă p_m, și diferența de frecvență $\Delta f = f_+ - f_-$ a frecvențelor f_+ și f_- la care puterea activă în circuit este egală cu jumătate din puterea maximă p_m.

Se deschide întrerupătorul K. Știind că la momentul t_0, după deschiderea întrerupătorului, intensitățile curenților în bobinele L_1 și L_2 (v. în figura F.C.17 sensul respectivilor curenți) sînt $i_{0_1} = 0{,}1$ A și $i_{0_2} = 0{,}2$ A, iar tensiunea electrică la bornele condensatorului C_1 este $u_0 = 40$ V: b) calculați frecvența oscilațiilor electromagnetice în circuitul $L_1C_1C_2L_2$; c) determinați intensitatea curentului în conductorul AB; d) calculați amplitudinea oscilațiilor intensității curentului electric în bobina L_1.

Se neglijează inducția mutuală dintre bobine, ca și fenomenele tranzitorii rapide, ce au loc la închiderea și deschiderea circuitului.

e)* Să se imagineze un sistem mecanic, respectiv un circuit RLC serie, care să aibă o structură asemănătoare și să oscileze în conformitate cu ecuații similare celor ale circuitului RLC derivație de mai înainte.

(A XIV-a Olimpiadă internațională de fizică, București, 5—14 iulie, 1983)

31°. Un bec electric cu puterea $P = 100$ W și tensiunea nominală de 120 V este montat la o rețea de curent alternativ cu tensiunea mai mare decît tensiunea de lucru a becului. Pentru ca acesta să nu se ardă, se montează în serie cu el o bobină ideală. Știind că factorul de putere al circuitului astfel format este $\cos \varphi = 0{,}545$, să se determine: a) impedanța circuitului; b) reactanța circuitului; c) tensiunea rețelei de curent alternativ.

(Concurs de admitere profil electric, iulie 1981, membri ai lotului olimpic)

4. OPTICĂ

32°. O oglindă convexă a cărei distanță focală este de 0,5 m dă, pentru un obiect de 0,10 m înălțime, o imagine situată la 2,40 m de acest obiect.

Se cer: pozițiile posibile ale obiectului și, respectiv, imaginii, natura lor, precum și mărirea imaginii.

33°. Se dispune de o prismă de unghi $A = 30°$, căreia dorim să-i măsurăm indicele de refracție. Se constată că un fascicul îngust, normal la suprafața (fața) de intrare, iese din prismă deviat cu un unghi de 30°. Să se calculeze indicele de refracție n. Să se deducă deviația minimă D_m pe care o dă această prismă.

34°. Fantele unui dispozitiv Young, distanțate cu $a = 1$ mm, sînt iluminate cu o radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 0{,}5$ μm. În calea unuia dintre fascicule se introduce o lamă cu grosimea străbătută de radiație $g = 2$ μm, cu transmitanța $T = 0{,}25$. Știind că, la scoaterea lamei, sistemul franjelor de interferență se deplasează cu 2 franje, să se determine: a) indicele de refracție al lamei; b) raportul dintre intensitățile luminoase corespunzătoare franjelor întunecate, respectiv franjelor luminoase; c) lungimea de undă λ_0 a celei mai apropiate (în spectru) radiații monocromatice, care, fiind emisă de sursă concomitent cu prima radiație, va produce o neclaritate maximă a figurii de interferență rezultante între maximele de ordinele 10 și 11 (lama fiind scoasă).

(Concursul de fizică, proba de selecție a lotului R.S.R., Buzău 1982)

---

* Această chestiune nu a fost inclusă în subiectul de electromagnetism susținut de concurenții la Olimpiada internațională.

Scanned with OKEN Scanner

35°. Cu ajutorul unui microscop format din două lentile subțiri identice, avînd fiecare distanța focală $f = 2 \cdot 10^{-2}$ m, montate la distanța constantă $a = 22 \cdot 10^{-2}$ m, se studiază suprafața unei rețele de difracție. Știind că distanța dintre imaginile trăsăturilor succesive ale rețelei (obținute atunci cînd distanța de la ocular la planul acestor imagini este egală cu distanța vederii optime $D_0 = 0{,}25$ m) este $\delta = 2$ mm, să se determine: a) distanța p față de ocular a imaginii reale (dată de obiectiv) a suprafeței rețelei de difracție; b) mărirea ocularului (m_{oc}); c) distanța p_{ob} față de obiectiv a suprafeței rețelei în cazul obținerii imaginii clare; d) mărirea m_{ob} a obiectivului și mărirea transversală m a microscopului; e) constanta d a rețelei de difracție; f) lungimea de undă a radiației al cărei maxim de difracție de ordinul $n = 20$ se observă sub unghiul $\varphi = 30°$ față de direcția normalei la rețeaua optică (în cazul incidenței normale); g) distanța d_1, dintre franjele succesive de interferență observate cu dispozitivul din figura F.C.18, știind că L_1 și L_2 sînt lentile identice cu cele ale microscopului de mai înainte, distanța dintre centrele optice ale acestor două lentile alăturate este $b = 10^{-2}$ m, distanța de la sursa punctiformă S care emite o radiație monocromatică cu lungimea de undă de la punctul precedent) la lentile este $c = 10^{-1}$ m, iar distanța de la lentile la ecran este $e = 1$ m.

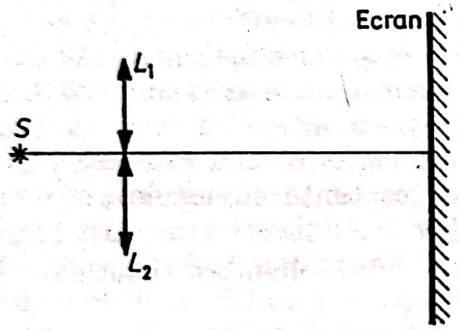


Fig. F.C.18

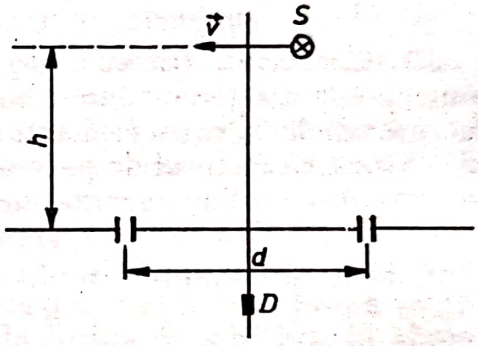


Fig. F.C.19

36°. Se consideră o lentilă convergentă confecționată din crown ($n_{roșu} = 1{,}504$, $n_{violet} = 1{,}521$), razele de curbură ale suprafețelor sale fiind $R_1 = R_2 = 0{,}1$ m. Să se determine: a) pozițiile imaginilor roșie și, respectiv, violetă ale unui obiect așezat la 0,2 m de lentilă, care emite lumină albă (compusă); b) raza de curbură R_2' a celei de-a doua suprafețe a unei lentile din flint ($n'_{roșu} = 1{,}612$, $n'_{violet} = 1{,}671$), alipită celei de crown ($R_1' = -R_1$), astfel încît imaginile în roșu și, respectiv, în violet ale aceluiași obiect prin blocul format din cele două lentile să coincidă; c) distanța focală a blocului optic format din cele două lentile.

(Concurs de admitere profil chimie, iulie 1981, membri ai lotului olimpic.)

37°. O sursă punctiformă S de lumină (figura F.C.19) se deplasează cu viteză constantă paralel cu un ecran în care sînt efectuate două fante la distanță d una față de cealaltă. Distanța de la sursă la ecran este egală cu h. În intervalul de timp în care sursa se află în apropierea axei sistemului, detectorul de lumină D, așezat pe axa sistemului, înregistrează o iluminare variabilă periodic. Să se calculeze viteza de deplasare a sursei, dacă frecvența de oscilație a intensității este $\nu = 15$ Hz, lungimea de undă a radiației luminoase $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m, iar $d = 2$, mm și $h = 1{,}2$ m.

5. FIZICĂ ATOMICĂ ȘI NUCLEARĂ

38°. Un dispozitiv Young cu distanța dintre fante $a = 1$ mm și distanța de la fante la ecranul de observație $D = 3$ m lucrează cu lumină monocromatică. În planul de observație se deplasează o celulă fotoelectrică, cu catod foarte fin, care indică intensificări periodice ale fotocurentului pentru poziții distanțate cu 1 mm.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine: a) lungimea de undă a radiației utilizate; b) potențialul de frînare a fotoelectronilor, dacă frecvența pragului efectului fotoelectric corespunzător fotocatodului este $\nu_p = 5 \cdot 10^{14}$ Hz; c) masa de mișcare și impulsul unui foton. Se dau: constanta lui Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s, sarcina electrică elementară $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, viteza luminii în vid $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^1.

(Concurs de admitere, facultăți de Fizică, iulie 1981, membri ai lotului olimpic)

39°. Știind că energia potențială coulombiană a electronului unui atom de hidrogen este egală cu $-0{,}5\ Rhc$, să se determine: a) numărul cuantic principal al stării în care se găsește electronul; b) potențialul de ionizare corespunzător acestei stări; c) distanța electron-nucleu în această stare. Se dau: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s, $c = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, constanta Rydberg $R = 1{,}09 \cdot 10^7$ m^{-1}, permitivitatea vidului $\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$.

(Concurs de admitere, facultăți de Fizică, iulie 1981, membri ai lotului olimpic)

40°. a) Să se calculeze raza celei mai mici orbite Bohr. b) Să se exprime energia stării fundamentale a atomului de hidrogen în J, în erg și în eV. c) Să se arate că energia cinetică pe o orbită Bohr circulară oarecare este egală în valoare absolută, însă de semn opus, cu energia totală. d) Să se calculeze impulsul tangențial al electronului pe cea mai mică orbită Bohr.

Se cunosc: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ J · s, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}.

41°. a) Să se afle durata unei rotații pe orbita Bohr de cea mai mică rază, în funcție de e, $\hbar$ și m. b) Să se calculeze constanta structurii fine, știind că aceasta este $\alpha = \frac{v}{c}$, v fiind viteza electronului pe orbita Bohr de cea mai mică rază. c) Justificați de ce se pot neglija, în primă aproximație, efectele relativiste în teoria atomului de hidrogen.

Se cunosc: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}}$, $\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ J · s, $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

42°. Radonul este un gaz α-activ cu numărul de masă atomic $A = 222$. Să se calculeze ce parte din energia totală, eliberată prin dezintegrarea radonului, este preluată de particula α.

43°. Prin bombardarea nucleului de ${}^6_3\text{Li}$ cu neutroni are loc reacția nucleară ${}^6_3\text{Li} + {}^1_0n \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$ și se eliberează energia $\Delta E = 4{,}8$ MeV. Să se arate cum se repartizează această energie între produsele de reacție (nucleul de tritiu, ${}^3_1\text{H}$, și particula α, ${}^4_2\text{He}$), ținînd seama de faptul că energiile cinetice ale celor două produse sînt mult mai mici decît energiile lor de repaus.

44°. Reacția de sinteză a deuteriului și tritiului, ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^1_0n + {}^4_2\text{He}$, se obține trimițînd ioni de deuteriu, accelerați pînă la energia $E_{{}^2_1\text{H}} = 2$ MeV, pe țintele de tritiu. Detectorul înregistrează neutroni, după direcția perpendiculară pe fasciculul de deuteroni. Să se calculeze energia neutronilor înregistrați, dacă în reacție se eliberează energia $\Delta E = 17{,}6$ MeV.

45°. Reacția nucleară ${}^{14}_7\text{N} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1p$ poate avea loc dacă particulele α, care lovesc nucleele de azot, au o energie care depășește valoarea de prag, $E_{\text{prag}} \simeq 1{,}4$ MeV. Cu cît trebuie să fie mai mare energia particulelor α decît energia de prag, pentru ca energia cinetică a protonilor rezultați din reacție să fie nulă?

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

1°. a) F = constant înseamnă a = constant

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v' - v}{t - 0} = \frac{\frac{v_0}{2} - v_0}{t} = -\frac{v_0}{2t}, \quad F = ma = -\frac{mv_0}{2t},$$

$$v'^2 - v^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2 = 2\left(-\frac{v_0}{2t}\right)\Delta x \Rightarrow -\frac{3v_0}{4} = -\frac{\Delta x}{t},$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2Ft}{m} = \frac{\Delta x}{t} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m\Delta x}{3F}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3\cdot 9}{3\cdot 18}} = 1 \text{ s}.$$

b) $\frac{3v_0^2}{4} = \frac{2F}{m}\Delta x \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{8F\Delta x}{3m}} = \sqrt{\frac{8\cdot 18\cdot 9}{3\cdot 3}} = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2°. a) Înainte de aruncarea primei bile barca se presupune în repaus, deci impulsul sistemului este nul. Conform teoremei conservării impulsului, după aruncarea bilei impulsul total, care reprezintă suma dintre impulsurile $\vec{p}_b$ al bilei și $\vec{p}_B$ al bărcii, este tot nul. Adică $\vec{p}_b + \vec{p}_B = 0$, de unde rezultă $p_B = p_b$ sau $[M + (n-1)m]v = mv_0$. Deoarece deplasarea bărcii poate fi numai orizontală, viteza căpătată de barcă va fi $v_1 = v\cos\alpha$, deci $v_1 = \frac{mv_0\cos\alpha}{M + (n-1)\text{m}}$. Întrucît componenta orizontală a impulsului bilei nu se schimbă în timpul deplasării spre perete, înseamnă că în momentul în care bila ciocnește peretele barca se va opri. Spațiul parcurs de barcă în timpul cît bila se deplasează pînă la perete va fi $s_1 = v_1 t$. Acest timp este dat de $t = \frac{l - s_1}{v_0\cos\alpha}$, deoarece el reprezintă timpul cît durează zborul bilei pe distanța $l - s_1$. Înlocuind, rezultă

$$s_1 = \frac{v_1 l}{v_0\cos\alpha + v_1} = \frac{\frac{mv_0\cos\alpha\cdot l}{M + (n-1)m}}{v_0\cos\alpha + \frac{mv_0\cos\alpha}{M + (n-1)m}} = \frac{l}{\frac{M}{m} + n} = \frac{15}{300} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}.$$

Cînd se aruncă cea de-a doua bilă, barca este din nou în repaus și conține același număr de bile, deci barca va căpăta aceeași viteză v_1 ca și la aruncarea primei

Scanned with OKEN Scanner

bile. Situaţia se repetă în acelaşi fel la fiecare bilă, deci spaţiul total parcurs este $S = ns_1 = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 5$ m.

b) Viteza medie este $v_m = \frac{S}{t_t} = \frac{ns_1}{n\tau} = \frac{s_1}{\tau} = 5$ cm $\cdot$ s^{-1}.

Observaţie. Se remarcă faptul că spaţiul parcurs de barcă în urma aruncării bilei nu depinde de viteza cu care este aruncată bila, nici de unghiul de aruncare.

3°. a) Forţa de apăsare pe care o exercită pîrghia asupra volantului (figura F.C.20) este $F_n = F\frac{l}{d} = F\frac{l}{\frac{l}{3}} = 3F$.

Forţa tangenţială aplicată periferiei volantului este forţa de frecare $F_t = \mu F_n = 3\mu F$. Conform legii fundamentale a dinamicii pentru un corp în mişcare de rotaţie $\vec{M}_F = \vec{I\varepsilon}$, sau $M_{F_t} = I\varepsilon$. Întrucît $M_{F_t} = RF_t$ şi $I = \frac{MR^2}{2}$, rezultă $F = \frac{MR\varepsilon}{6\mu} = \frac{150 \cdot 0{,}5 \cdot 2}{6 \cdot 0{,}25} = 100$ N.

b) Energia cinetică a volantului va fi $E_c = \frac{I\omega^2}{2}$, unde viteza unghiulară este $\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 100 - 2 \cdot 15 = 70$ rad $\cdot$ s^{-1}, deci

$$E_c = \frac{MR^2\omega^2}{4} = \frac{150 \cdot 0{,}5^2 \cdot 70^2}{4} \cong 45\,937 \text{ J} \cong 45{,}937 \text{ kJ}.$$

c) Cînd roata vine în contact cu planul, ea începe să se rostogolească pe plan, deci centrul ei de masă capătă o mişcare de translaţie. Teorema conservării energiei se va scrie $\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$,

unde ω_1 este viteza unghiulară după ce roata vine în contact cu planul, iar v este viteza mişcării de translaţie. Cînd roata se deplasează cu distanţa ΔS (figura F.C.21),

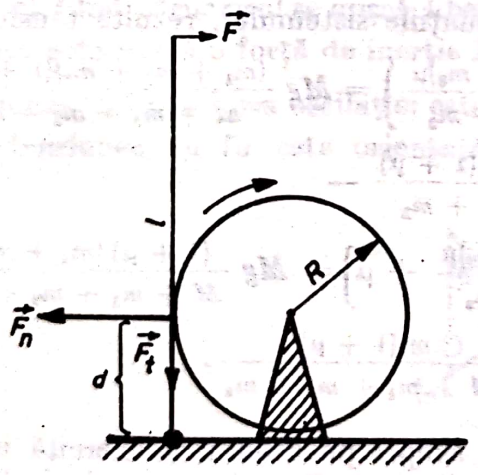


Fig. F.C.20

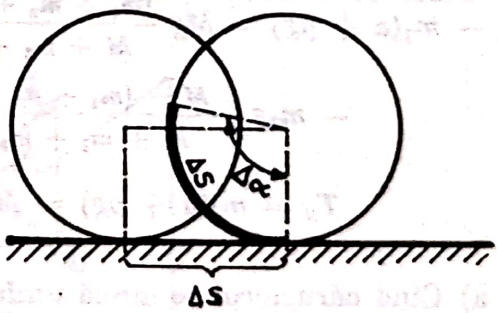


Fig. F.C.21

ea se roteşte cu un unghi $\Delta\alpha = \frac{\Delta S}{R}$. Dacă Δt este timpul corespunzător acestei deplasări, atunci $\omega_1 = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R} = \frac{v}{R}$. Înlocuind în ecuaţia conservării energiei, rezultă $I\frac{\omega^2}{2} = \frac{I}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2} + \frac{Mv^2}{2}$, sau $I\omega^2 = v^2\left(\frac{I}{R^2} + M\right)$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$v = \omega R \sqrt{\frac{I}{I + MR^2}} = \omega R \sqrt{\frac{\frac{MR^2}{2}}{\frac{MR^2}{2} + MR^2}} = \omega R \sqrt{\frac{1}{3}} = 70 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cong$$

$$\cong 20{,}23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4°. a) Se scrie ecuaţia fundamentală a dinamicii pentru fiecare corp separat. Pentru corpul de masă M forţa rezultantă care pune corpul în mişcare este $G - T_1$ deci $G - T_1 = Ma$. Pentru corpul de masă m_1 în sensul mişcării acţionează tensiunea T_1, iar în sens opus tensiunea T_2 şi forţa de frecare dintre corpul respectiv şi plan, adică $T_1 - T_2 - \mu m_1 g = m_1 a$. Analog, ecuaţia corespunzătoare corpului m_2 este $T_2 - T_3 - \mu m_2 g = m_2 a$. În cazul corpului m_3, în sens opus mişcării acţionează numai forţa de frecare, deci ecuaţia sa va fi $T_3 - \mu m_3 g = m_3 a$. Cele trei corpuri se mişcă cu aceeaşi acceleraţie, deoarece firele se presupun inextensibile. Cele patru ecuaţii găsite constituie un sistem pentru necunoscutele a, T_1, T_2 şi T_3. Le vom transcrie sub forma:

$$\begin{cases} Mg - T_1 = Ma, \\ T_1 - T_2 = m_1 a + m_1 \mu g, \\ T_2 - T_3 = m_2 a + m_2 \mu g, \\ T_3 = m_3 a + m_3 \mu g. \end{cases}$$

Adunînd ecuaţiile membru cu membru rezultă $Mg = (M + m_1 + m_2 + m_3)a + (m_1 + m_2 + m_3)g\mu$, de unde

$$a = g \frac{M - (m_1 + m_2 + m_3)\mu}{M + m_1 + m_2 + m_3}.$$

b) Înlocuind expresia acceleraţiei în ecuaţiile sistemului, rezultă tensiunile:

$$T_1 = M(g - a) = Mg\left(1 - \frac{M - (m_1 + m_2 + m_3)\mu}{M + m_1 + m_2 + m_3}\right) = Mg \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(1 + \mu)}{M + m_1 + m_2 + m_3},$$

$$T_2 = T_1 - m_1(a + \mu g) = Mg \frac{(m_1 + m_2 + m_3)(1 + \mu)}{M + m_1 + m_2 + m_3} -$$

$$- m_1 g \left(\frac{M - (m_1 + m_2 + m_3)\mu}{M + m_1 + m_2 + m_3} + \mu\right) = Mg \frac{(1 + \mu)(m_2 + m_3)}{M + m_1 + m_2 + m_3},$$

$$T_3 = m_3(a + \mu g) = Mg \frac{m_3(1 + \mu)}{M + m_1 + m_2 + m_3}.$$

5°. a) Cînd căruciorul se mişcă uniform, asupra pendulului se exercită numai forţa gravitaţională. În repaus, tensiunea în fir este $T_f = G = mg$ şi firul este aşezat vertical, $\alpha = 0$ (figura F.C.22). Dacă pendulul oscilează cu amplitudine mică, perioada oscilaţiei rezultă din ecuaţia fundamentală a dinamicii $G \sin \alpha = ma$, iar pentru $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{x}{l}$, aceasta devine $ma = -m\frac{g}{l}x$. Comparînd cu expresia acceleraţiei în mişcarea oscilatorie armonică $a = -\omega^2 x$, rezultă

$$\omega = \frac{g}{l} \text{ sau } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Cînd căruciorul se mişcă orizontal cu acceleraţia a, atunci asupra pendulului acţionează, pe lîngă greutatea G, şi forţa de inerţie $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ (figura F.C.23). Tensiunea în fir în poziţia de echilibru (fără oscilaţie) este $\vec{T} = \vec{F}_i + \vec{G}$ sau

$$T = \sqrt{m^2a^2 + m^2g^2} = m\sqrt{a^2 + g^2}.$$

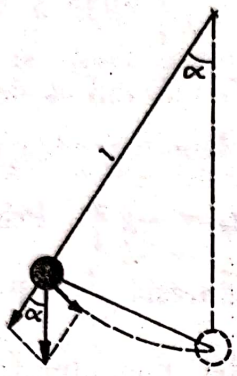


Fig. F.C.22

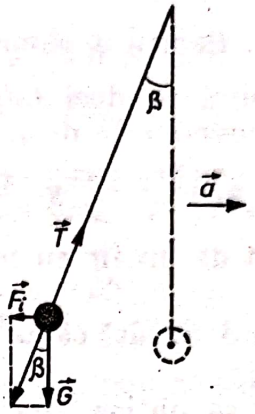


Fig. F.C.23

Unghiul β de deviaţie faţă de verticală va fi dat de $\operatorname{tg}\beta = \frac{F_i}{G} = \frac{a}{g}$. Oscilaţia pendulului va avea loc în jurul valorii β a unghiului de deviaţie, iar rezultanta $\vec{F}_i + \vec{G}$ este forţa actuală care joacă rolul avut de greutatea $\vec{G}$ la punctul precedent. Ecuaţia lui Newton va conduce, în acest caz, la expresia acceleraţiei în mişcarea oscilatorie, $ma_0 = -m\sqrt{a^2 + g^2}\,\frac{x}{l}$, de unde rezultă $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$.

c) Cînd căruciorul se mişcă liber (fără frecare) pe planul înclinat, asupra pendulului acţionează o forţă de inerţie $F_i = -ma$, dar $a = g \sin\alpha$, deci $F_i = mg \sin\alpha$. Tensiunea în fir în lipsa oscilaţiei este $\vec{T} = \vec{F}_i + \vec{G} = -\vec{G}_t + \vec{G} = \vec{G}_n$ (figura F.C.24), deci tensiunea în fir este orientată după normala la plan. Prin urmare unghiul

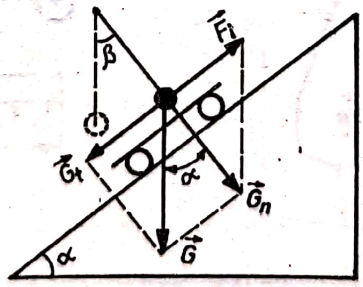


Fig. F.C.24

de deviaţie este $\beta = -\alpha$. Dacă pendulul oscilează, atunci rolul forţei este jucat de $\vec{G}_n$, deci acceleraţia mişcării oscilatorii va fi dată de $ma_0 = -m\,\frac{g\cos\alpha}{l}\,x$, de unde rezultă $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

Scanned with OKEN Scanner

6°. a) Cînd corpul este rotit cu un unghi α față de poziția de echilibru (figura F.C.25), forța care îl pune în mișcare este $G_t = G \sin \alpha$. Conform legii fundamentale a dinamicii pentru mișcarea de rotație a unui solid rigid $\vec{M}_F = I\vec{\varepsilon}$, adică $Gd \sin \alpha = I\varepsilon$. Accelerația unghiulară ε va fi legată de accelerația tangențială a centrului de greutate prin relația $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{d} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{a_t}{d}$, de unde rezultă $Gd \sin \alpha = I \frac{a_t}{d}$. Pentru unghiuri mici $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{y}{d}$, unde y este arcul corespunzător unghiului α, deci $Gdy = -Ia_t$, unde s-a ținut seama că a_t este orientat în sens invers față de y. Așadar, accelerația mișcării oscilatorii a centrului de masă va fi $a_t = -\frac{mgd}{I} y$. Ecuația corespunzătoare pentru cazul unui corp punctiform, legat de un fir cu lungimea l, este $a_t = -g\frac{y}{l}$. Prin comparație cu ecuația precedentă rezultă că lui l îi corespunde expresia $\frac{I}{md}$. Perioada cu care oscilează corpul se obține din expresia perioadei pendulului, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Înlocuind l cu $\frac{I}{md}$ rezultă $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$.

b) Notăm cu h înălțimea maximă la care ajunge centrul de greutate, în timpul oscilației, în raport cu poziția sa de echilibru. Conform teoremei conservării energiei vom avea $mgh = \frac{I\omega^2}{2}$, de unde $\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{I}}$.

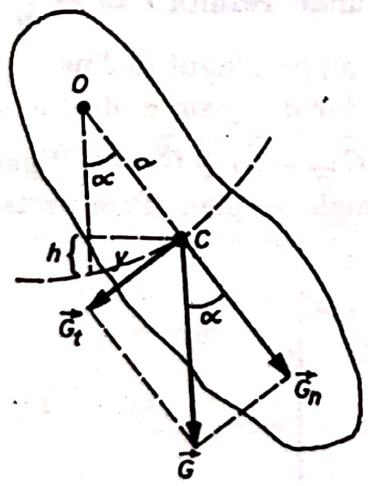


Fig. F.C.25

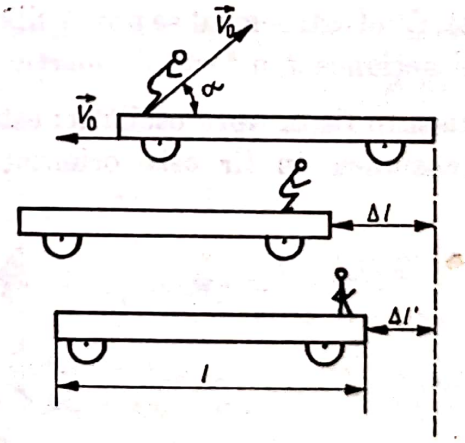


Fig. F.C.26

7°. a) Viteza inițială V_0 a căruciorului va rezulta din teorema conservării impulsului. Întrucît căruciorul se poate deplasa (figura F.C.26) numai orizontal, vom avea $MV_0 = mv_0 \cos \alpha$. Timpul de zbor al obiectului, $\Delta t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, este același cu timpul de mișcare al căruciorului pînă la oprire datorită frecării, adică $\Delta t = \frac{V_0}{\mu g}$. Egalînd cele două expresii, rezultă $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{2\mu M} = \frac{70}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 100} = \frac{7}{2}$.

Spaţiul parcurs de cărucior pînă la oprire este $\Delta l = \frac{V_0^2}{2\mu g}$. În timpul Δt, în care cărucior parcurge distanţa Δl, obiectul parcurge pe orizontală distanţa $l - \Delta l$ cu viteza $v_0 \cos \alpha$. Rezultă $\frac{l - \Delta l}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, de unde $g(l - \Delta l) = 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha =$ $= v_0^2 \sin 2\alpha$ sau $g\left(l - \frac{m^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2\mu M^2 g}\right) = v_0^2 \sin 2\alpha$, deci

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl}{\frac{m^2}{2\mu M^2}\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha}} = 10{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Teorema conservării impulsului cînd obiectul aterizează pe cărucior se va scrie: $mv_0 \cos \alpha = (M + m)V_0'$. Căruciorul va parcurge pînă la oprire spaţiul

$$\Delta l' = \frac{V_0'^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{2(M + m)^2 \mu g} = 0{,}62 \text{ m}.$$

Se observă că raportul $\frac{\Delta l'}{\Delta l} = \left(\frac{M}{M + m}\right)^2$ nu depinde nici de v_0, nici de μ.

8°. a) Corpul părăseşte cercul de rază $r = \frac{l}{4}$ în momentul în care rezultanta dintre forţa centrifugă $\vec{F}_c$ şi greutatea $\vec{G}$ are direcţia tangentă la traiectorie (figura F.C.27). În acest moment forţa centrifugă devine egală cu componenta greutăţii pe direcţia firului, $F_c = G_n = G \cos \beta$, şi deci tensiunea în fir $T = F_c - G_n$ se anulează (firul nu mai este întins). Ecuaţia aceasta se mai scrie $\frac{mv^2}{r} = mg \cos \beta$, de unde $\cos \beta = \cos (\pi - \alpha_1) = \frac{v^2}{rg}$.

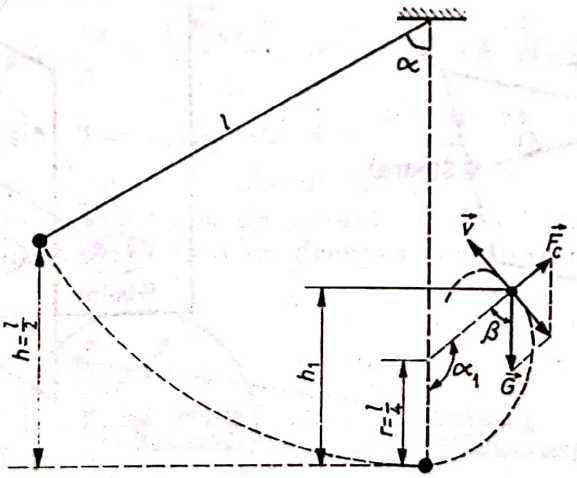


Fig. F.C.27

Viteza corpului se află cu ajutorul legii conservării energiei. La momentul iniţial corpul are numai energia potenţială $E_{p_0} = mgh$, iar în momentul cînd se află la înălţimea h_1 are energia potenţială $E_{p_1} = mgh_1$ şi energia cinetică $\frac{mv^2}{2}$. Rezultă $mgh = mgh_1 + \frac{mv^2}{2}$, de unde $v^2 = 2g(h - h_1)$. Înlocuind în ecuaţia pentru

unghiul α_1, rezultă $\cos\alpha_1 = -\frac{2(h-h_1)}{r}$. Pe de altă parte, conform figurii F.C. 27 $h_1 = r + r\cos\beta = r(1-\cos\alpha_1)$, deci $\cos\alpha_1 = -\frac{2}{r}[h - r(1-\cos\alpha_1)]$, de unde $\cos\alpha_1 = \frac{2(r-h)}{3r} = -\frac{2}{3}$, deci $\alpha_1 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \cong 131°50'$.

b) Din momentul părăsirii traiectoriei circulare corpul se mişcă liber sub acţiunea forţei $\vec{G}$ cu viteza iniţială $v = \sqrt{2g(h-h_1)}$, orientată sub unghiul β faţă de orizontală. Componenta verticală a vitezei este $v_y = \sqrt{2g(h-h_1)}\sin\beta$. Înălţimea maximă la care ajunge corpul faţă de poziţia de echilibru va fi

$$h_{max} = h_1 + \frac{v_y^2}{2g} = h_1 + (h-h_1)\sin^2\beta = r(1-\cos\alpha_1) + [h - r(1-\cos\alpha_1)]\sin^2\alpha_1 =$$

$$= r(1-\sin^2\alpha_1)(1-\cos\alpha_1) + h\sin^2\alpha_1 = \frac{l}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\sin^2\alpha_1)(1-\cos\alpha_1) + \sin^2\alpha_1\right] =$$

$$= \frac{l}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{2}{3}\right) + \left(1-\frac{4}{8}\right)\right] \cong 0{,}926\,\frac{l}{2} < \frac{l}{2}.$$

Deci înălţimea maximă la care ajunge corpul este mai mică decît înălţimea iniţială.

9°. a) Pentru orice punct material (element de volum) P_1 al Pământului se poate găsi un simetric P_2 faţă de planul care trece prin Soare şi axa polilor (figura F.C.28). Rezultanta $\vec{M}_{rez} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$, a momentelor forţelor care acţionează asupra elementelor de volum P_1 şi P_2, este perpendiculară pe planul care trece prin Soare şi axa polilor. Sensul rezultantei momentelor forţelor este cel corespunzător părţii elipsoidului situată mai aproape de Soare.

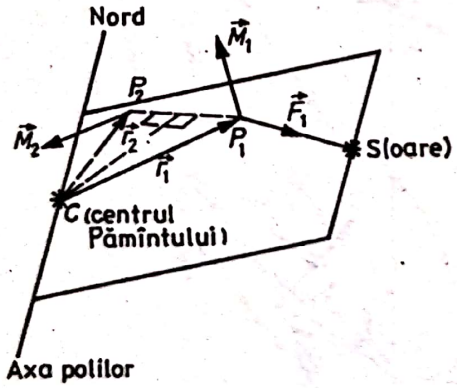


Fig. F.C.28

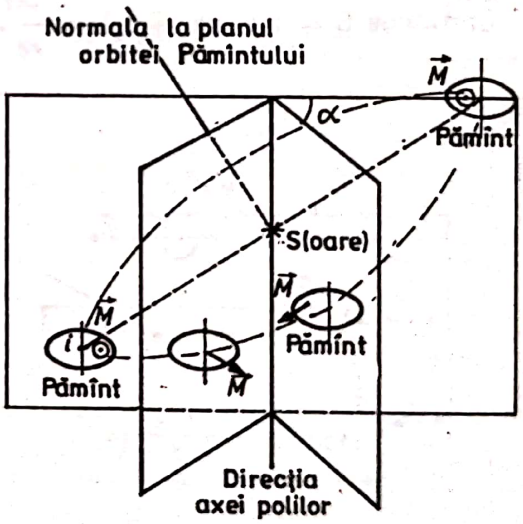


Fig. F.C.29

Media, pe o perioadă a rotaţiei Pământului în jurul Soarelui, a momentului rezultant, este perpendiculară pe planul format de normala la planul orbitei şi direcţia axei polilor (v. figura F.C.29), iar sensul momentului rezultant mediu este cel al înaintării burghiului drept rotit pentru a suprapune (pe drumul cel mai scurt) axa polilor peste normala la planul orbitei Pământului (în jurul Soarelui).

b) Momentul cinetic $\vec{L}$ al Pământului poate fi determinat din momentul său de inerţie I şi viteza unghiulară $\vec{\omega}$ a rotaţiei Pământului în jurul axei proprii:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$. Deoarece asupra Pământului acționează un moment mediu al forțelor rezultante $\vec{\mathcal{M}}_{rez}$ perpendicular pe axa polilor (deci și pe $\vec{L}$, v. figura F.C.30), variația $\Delta\vec{L}$ a momentului cinetic al Pământului într-un interval Δt va fi $\Delta\vec{L} = \vec{\mathcal{M}}_{rez}\,\Delta t$. Această variație determină rotația $\vec{L}$ (deci și a axei polilor) cu unghiul $\Delta\alpha = \frac{\Delta L}{L_\perp} = \frac{|\vec{\mathcal{M}}_{rez}|\,\Delta t}{L_\perp}$ în intervelul Δt, deci cu o viteză unghiulară de precesie $\vec{\omega}_p$, care are direcția (v. figura F.C.31) perpendiculară pe planul ce conține axa polilor și $\vec{\mathcal{M}}_{rez}$ (adică normala la planul format de axa polilor și normala la

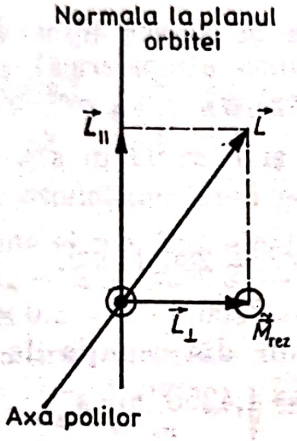


Fig. F.C.30

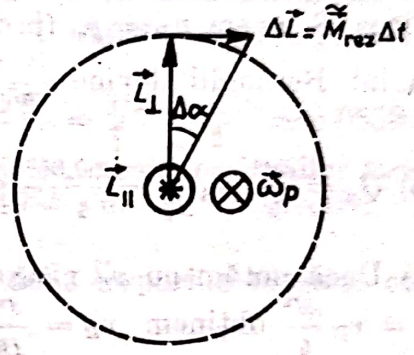


Fig. F.C.31

planul orbitei), deci direcția normalei la planul orbitei Pământului (în jurul Soarelui), și valoarea $\omega_p = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{|\vec{\mathcal{M}}_{rez}|}{L_\perp}$, rezultînd că $\vec{\mathcal{M}}_{rez} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$. În final, obținem $|\vec{\mathcal{M}}_{rez}| = L\omega_p \sin\theta = I\omega\omega_p \sin\theta = \frac{4\pi^2 I \sin\theta}{TT_p}$, unde θ este unghiul format de axa polilor cu normala la planul orbitei.

c) Pentru orice punct (element de volum) P al Pământului se poate găsi (v. figura F.C.32) un simetric P' față de dreapta care unește centrul Pământului

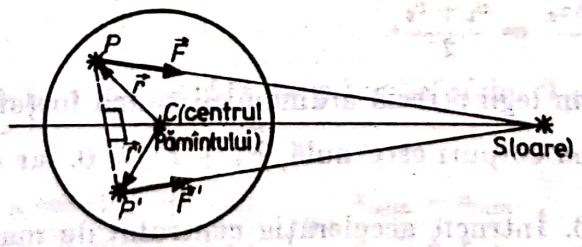


Fig. F.C.32

cu Soarele. Forțele $\vec{F}$ și $\vec{F}'$, care acționează asupra elementelor de volum P și P', sînt egale în modul. Momentele $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ și $\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}'$ sînt egale în modul, au aceeași direcție, însă sensuri opuse, deci momentul rezultant $\vec{M} + \vec{M}'$ este nul.

10°. Notăm cu p_a presiunea atmosferică și cu p presiunea într-un punct al planului de separare AB al celor două lichide.

În vasul V_1 avem $p - p_a = \rho_{H_2O} g h_1 = 10^3 g h_1$, iar în vasul V_2 avem $p - p_a = \rho_{Hg} g h_2 = 1{,}36 \cdot 10^4 g h_2$. Din cele două ecuații obținem $h_1 = 13{,}6\ h_2$. Această relație împreună cu $h = h_1 - h_2$ conduc la $h = \frac{63}{68} h_1$. Deoarece în vasul V_1 am turnat 2 l de apă, avem $\frac{\pi D^2}{4} h_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, adică $\frac{\pi 10^{-2}}{4} h_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, sau $h_1 = \frac{0{,}8}{\pi}$ m, deci $h = \frac{63}{68} \cdot \frac{0{,}8}{\pi} \approx 0{,}236$ m.

11°. a) Pentru a rezolva problema pusă vom utiliza ecuația lui Bernoulli, $\frac{p_B - p_A}{\rho g} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + y_B - y_A = 0$, aplicînd-o între altitudinea A luată ca nivel superior al apei din baraj și altitudinea B luată la ieșirea apei din conducta forțată. La altitudinea A, avem $p_A = p_a$ (presiunea atmosferică) și $v_A = 0$. La altitudinea B, avem $p_B = p_a$ (presiunea atmosferică), $y_B - y_A = -500$ m. Atunci ecuația lui Bernoulli devine $\frac{v_B^2}{2 \cdot 9{,}81} - 500 = 0$ și $v \approx 99$ m s^{-1}.

b) $Q_v = \frac{\pi d^2}{4} v_A = \frac{\pi \cdot 0{,}06^2}{4} \cdot 99 \cong 0{,}28$ m$^3 \cdot$ s^{-1} $= 280$ l $\cdot$ s^{-1}.

c) Dacă notăm cu v_B' viteza de intrare în tub, din ecuația de continuitate $v_B' \frac{\pi D^2}{4} = v_B \frac{\pi d^2}{4}$ obținem $v_B' = \frac{d^2}{D^2} v_B \cong \frac{0{,}06^2}{0{,}5^2} \cdot 99 = 1{,}4256$ m $\cdot$ s^{-1}.

Între nivelele B' și B ecuația lui Bernoulli este $\frac{p_a - p_B'}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_B'^2) = 0$, p_a fiind presiunea atmosferică. Astfel, presiunea efectivă la baza conductei este

$$p = p_B' - p_a = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_B'^2) \cong \frac{1000}{2}(99^2 - 1{,}4256^2) \cong 4{,}8995 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}.$$

12°. a) Luăm axa Ox după direcția și în sensul mișcării celor două corpuri. Fie x_1 și x_2 coordonatele de poziție ale centrelor de masă ale celor două corpuri; deoarece corpurile 1 și 2 sînt identice, coordonata x_C a centrului de masă al sistemului va fi $x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, iar viteza centrului de masă $v_C = \frac{\Delta x_C}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2 \Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

Deoarece, conform legii a treia a dinamicii, suma forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care acționează asupra celor două corpuri este nulă, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, iar $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$ și $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$, rezultă că $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 0$. Întrucît accelerația centrului de masă este $\vec{a}_C = \frac{\Delta \vec{v}_C}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_2}{2 \Delta t} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2} = 0$, rezultă că mișcarea centrului de masă al sistemului este rectilinie și uniformă, cu viteza (constantă în timp) $v_C = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_{0_1} + v_{0_2}}{2} = 0{,}2\ \frac{m}{s}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerăm oscilaţiile (separate ale) celor două corpuri în raport cu centrul de masă C. Din legea lui Hooke, $F = \frac{EA}{l_n}\Delta l$, rezultă invers proporţionalitatea constantei elastice cu lungimea l_n a resortului (nedeformat) : $k = \frac{EA}{l_n}$. Constanta elastică a unei jumătăţi de resort ($1C$, respectiv $C2$ este deci $k' = \frac{EA}{l_n/2} = 2\frac{EA}{l_n} = 2k$ şi atunci $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\cdot 2}} \cong 0{,}0795$ Hz.

c) Vom trata mişcările oscilatorii ale celor două corpuri în sistemul centrului de masă. Vitezele iniţiale ale celor două corpuri în acest sistem sînt $v'_{0_1} = v_{0_1} - v_C = -0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ şi, respectiv, $v'_{0_2} = v_{0_2} - v_C = +0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Energia totală a unui corp în sistemul centrului de masă este $W' = \frac{k'A^2}{2} = \frac{mv'^2_{max}}{2} = \frac{mv'^2_{01}}{2} + \frac{k'}{2}\left(\frac{l_0}{2} - \frac{l_n}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 + \frac{4}{2}\cdot 0{,}04^2 = 0{,}0058$ J. Rezultă că amplitudinea oscilaţiilor unui corp este $A = \sqrt{\frac{2W'}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}0058}{2\cdot 2}} \approx 0{,}0538$ m, deci valorile minimă şi maximă ale lungimii resortului în cursul oscilaţiilor sistemului sînt $l_{min} = l_n - 2A \cong 0{,}3 - 2\cdot 0{,}0538 = 0{,}1924$ m şi, respectiv, $l_{max} = l_n + 2A \cong 0{,}3 + 2\cdot 0{,}0538 = 0{,}4076$ m.

Amplitudinea vitezelor de oscilaţie ale celor două corpuri în sistemul centrului de masă este $v'_{max} = \sqrt{\frac{2W'}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}0058}{1}} \approx 0{,}108\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rezultă că valorile minime şi, respectiv, maxime ale vitezelor celor două corpuri în raport cu planul orizontal „suport" al mişcării sînt:

$$v_{1\,min} = v_{2\,min} = v_C - v_{max} \cong -0{,}008\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$ (în sensul opus mişcării iniţiale),

$$v_{1\,max} = v_{2\,max} = v_C - v_{max} \cong = 0{,}208\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$ (în sensul mişcării iniţiale).

13°. Din condiţiile de stabilitate a lanţului pe planul înclinat:

$$\sin\theta \cdot xA\rho g \leqslant \mu\cos\theta \cdot xA\rho g + (L-x)A(\rho-\rho_1)g,$$

$$\sin\theta \cdot xA\rho g + \mu\cos\theta \cdot xA\rho\, g \geqslant (L-x)A(\rho-\rho_1)g,$$

echivalente cu

$$x[\rho(\sin\theta - \mu\cos\theta) + (\rho-\rho_1)] \leqslant L(\rho-\rho_1) \leqslant x[\rho(\sin\theta + \mu\cos\theta) + (\rho-\rho_1)],$$

rezultă că

$$\frac{x_{max}}{x_{min}} = \frac{\rho(\sin\theta + \mu\cos\theta) + (\rho-\rho_1)}{\rho(\sin\theta - \mu\cos\theta) + (\rho-\rho_1)},\ \text{sau}\ \frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}} = \frac{\rho\mu\cos\theta}{\rho(1+\sin\theta) - \rho_1}.$$

Prin urmare

$$\mu = \frac{\rho(1+\sin\theta) - \rho_1}{\rho\cos\theta}\cdot\frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}} = \frac{6\cdot\frac{3}{2} - 1}{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\frac{2}{63}}{\frac{16}{63}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{16} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

14°. a) Comparînd expresia generală $y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ a ecuației undei plane cu ecuația undei particulare considerate, găsim $A = 10^{-3}$ m, $\frac{1}{T} = 10^3\ s^{-1}$ și $\frac{1}{\lambda} = 0{,}2\ m^{-1}$, deci $\lambda = \frac{1}{0{,}2} = 5$ m. Rezultă că viteza propagării fazei undei considerate este $V = \frac{\lambda}{T} = 5 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1}$.

Întrucît pentru unde longitudinale $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, obținem $E = \rho V^2 = 7800 \cdot 25 \cdot 10^6 = 1{,}95 \cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}$.

b) $a_{max} = A\omega^2 = A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = 10^{-3} \cdot 4 \cdot 3{,}14^2 (10^3)^2 = 3{,}955 \cdot 10^4\ m \cdot s^{-2}$.

c) $E = \frac{m}{2} A^2\omega^2 = \frac{2\pi^2 m A^2}{T^2} = \frac{2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{(10^{-3})^2} \cong 1{,}977 \cdot 10^{-2}$ J.

15°. a) Din relațiile $p_1V_1 = \nu RT_1$ și $p_2V_2 = \nu RT_2$ rezultă $p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 10^5 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{273 + 43{,}4}{273 + 20} \cong 5{,}4 \cdot 10^5\ N \cdot m^{-2}$.

b) Din relația lui Robert Mayer avem $C_V = C_p - R = 28750 - 8310 = 20440\ J \cdot kmol^{-1}K^{-1}$. Căldura masică, la volum constant, va fi $c_V = \frac{C_V}{M} = \frac{20\,440}{28} = 730\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, iar variația energiei interne va fi

$$U_2 - U_1 = c_V m(T_2 - T_1) = 730 \cdot 0{,}3(43{,}4 - 20) = 5124{,}6\ J.$$

16°. a) Din ecuația termică de stare a gazului ideal avem $T_1 = \frac{\mu p_1 V_1}{mR} = \frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 8310} = 300$ K.

În transformarea izocoră $1 \to 2$ (v. figura F.C.9) $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, de unde $T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = 2T_1 = 600$K.

În transformarea izobară $2 \to 3$ $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$, de unde $T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = T_2 \frac{V_3}{V_1} = 3T_2 = 1800$ K.

În transformarea izocoră $3 \to 4$ $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}$, de unde $T_4 = \frac{p_4 T_3}{p_3} = T_3 \frac{p_4}{p_3} = \frac{T_3}{2} = 900$ K.

b) Cantitățile de căldură schimbate cu exteriorul în cursul celor patru transformări sînt:

$$Q_{12} = \nu C_V(T_2 - T_1) > 0, \quad Q_{34} = \nu C_V(T_4 - T_3) < 0,$$

$$Q_{23} = \nu C_p(T_3 - T_2) > 0 \text{ și } Q_{41} = \nu C_p(T - T_4) < 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Căldura primită este

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \nu[C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2)] = \frac{m}{\mu} R\left[\frac{5}{2}(T_2 - T_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{2}(T_3 - T_2)\right] = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} 8310\left[\frac{5}{2}(600 - 300) + \frac{7}{2}(1800 - 600)\right] = 4{,}113 \cdot 10^5 \text{ J},$$

iar căldura cedată este

$$Q_2 = Q_{34} + Q_{41} = \nu R\left[\frac{5}{2}(T_4 - T_3) + \frac{7}{2}(T_1 - T_4)\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 8310 \times \left[\frac{5}{2}(900 - 1800) + \frac{7}{2}(300 - 900)\right] = -3{,}615 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

c) $\eta = \dfrac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \dfrac{4{,}113 - 3{,}615}{4{,}113} \cong 0{,}1212 = 12{,}12\%$.

17°. a) Masa totală de gaz din cele două vase nu se modifică (figura F.C.33), $m_1 + m_2 = m_1' + m_2'$. Utilizînd ecuaţia termică de stare a gazului ideal

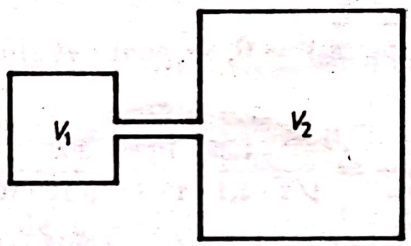


Fig. F.C.33

$pV = \dfrac{m}{\mu} RT$, aceasta devine $\dfrac{pV_1}{T} + \dfrac{pV_2}{T} = \dfrac{p'V_1}{T'} + \dfrac{p'V_2}{T}$, unde am ţinut seama că în starea finală presiunea este aceeaşi, p', în ambele vase, iar temperatura vasului V_2 rămîne T. Ecuaţia se mai scrie $\dfrac{p}{T}(V_1 + V_2) = \dfrac{p'}{T'}\left(V_1 + \dfrac{V_2 T'}{T}\right)$ sau $\dfrac{pV_1}{T}\left(1 + \dfrac{V_2}{V_1}\right) = \dfrac{p'}{T'} V_1\left(1 + \dfrac{V_2}{V_1} \cdot \dfrac{T'}{T}\right)$. Din această ecuaţie rezultă $p' = p\dfrac{T'}{T}(1 + n)\dfrac{1}{1 + n\dfrac{T'}{T}} = pk(1 + n)\dfrac{1}{1 + nk}$, unde am ţinut seama că $T' = kT$ şi $p' = np$. Cu datele problemei avem $p' = p \cdot 2(1 + 3)\dfrac{1}{1 + 2 \cdot 3} = \dfrac{8}{7} p \cong 2{,}28 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

b) Variaţia relativă a masei de gaz din vasul V_2 în procesul încălzirii va fi

$$\frac{\Delta m_2}{m_2} = \frac{m_2 - m_2}{m_2} = \frac{\dfrac{\mu}{R} \cdot \dfrac{V_2}{T}(p' - p)}{\dfrac{\mu}{R} \cdot \dfrac{V_2}{T} p} = \frac{p'}{p} - 1 = \frac{\dfrac{8}{7}p - p}{p} = \frac{1}{7}.$$

c) Variaţia pătratului vitezei termice a moleculelor gazului din vasul 1 în procesul de încălzire este

$$\Delta\widetilde{v^2} = \widetilde{v'^2} - \widetilde{v^2} = \frac{3R}{\mu}(T' - T) = \frac{3R}{\mu}(2T - T) = \frac{3RT}{\mu} = \widetilde{v^2}, \text{ deci } \frac{\Delta\widetilde{v^2}}{\widetilde{v^2}} = 1.$$

Variaţia pătratului vitezei termice este egală cu pătratul vitezei termice iniţiale (dublarea temperaturii conduce la dublarea lui $\widetilde{v^2}$).

18°. a) În intervalul Δt o moleculă cu viteza relativă (faţă de celelalte molecule) medie (în modul) $\widetilde{v}_r$ străbate distanţa relativă (faţă de celelalte molecule) $\widetilde{v}_r\Delta t$, „măturînd" un domeniu de volum $\sigma\widetilde{v}\Delta t$ şi „ciocnind" toate cele $\Delta N = n\sigma\widetilde{v}_r\Delta t$ (n = numărul de molecule din unitatea de volum a gazului) molecule aflate în acest domeniu. Deoarece spaţiul parcurs de moleculă în acest timp este $\Delta l = \widetilde{v}\Delta t$ (unde $\widetilde{v}$ este viteza medie a moleculei), rezultă că drumul mediu al moleculei (între două ciocniri succesive) este $\widetilde{\lambda} = \frac{\Delta l}{\Delta N} = \frac{\widetilde{v}}{n\sigma\widetilde{v}_r}$.

Întrucît viteza relativă a mişcării moleculei 1 faţă de molecula 2 este $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, avem $v_r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})}$. Ţinînd seama că valorile medii $\widetilde{v}_1 = \widetilde{v}_2 = \widetilde{v}$, iar $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = 0$, se poate evalua $\widetilde{v}_r$ prin $\widetilde{v}\sqrt{2}$. Rezultă că $\widetilde{\lambda} \cong \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$.

b) $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\widetilde{\lambda}n} = \frac{k_BT}{\sqrt{2}\widetilde{\lambda}n} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5} \approx 26{,}5 \cdot 10^{-20}\ \text{m}^2$ şi $r_m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{26{,}5 \cdot 10^{-20}}{3{,}14}} \approx 1{,}44\ \text{Å}$ ($1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m).

În condiţiile în care moleculele (presupuse sferice) sînt aduse în „tangenţă" (figura F.C.34), avem

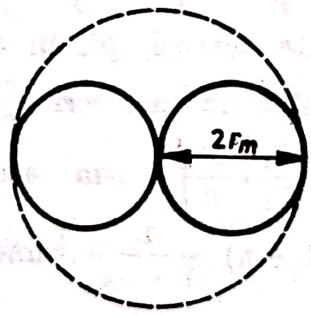


Fig. F.C.34

$$V_{\text{m lim}} = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}(2r_m)^3 = \frac{16\pi}{3} N \cdot r_m^3 =$$

$$= \frac{16\pi}{3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}44^3 \cdot 10^{-30} \cong 0{,}03\ \frac{l}{\text{mol}} \left(= 3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}\right).$$

c) Ecuaţia $4\,100V_m^2 - 738V_m + 26{,}65 = 0$, are soluţiile

$$V_m = \frac{369 \pm \sqrt{136\,161 - 109\,265}}{4\,100} = \frac{369 \pm 164}{4\,100},$$

Scanned with OKEN Scanner

cea mai mică dintre aceste soluţii, $V_{m,\text{lichid}} \approx 0{,}05 \frac{l}{\text{mol}}$, corespunde volumului molar în faza lichidă, iar cea mai mare, $V_{m,\text{vapori}} \approx 0{,}13 \frac{l}{\text{mol}}$, corespunde volumului molar în faza de vapori.

Volumul molar corespunzător amestecului unei fracţiuni x_l de lichid cu o fracţiune $x_v = 1 - x_l$ de vapori (atît lichidul cît şi vaporii, aflaţi în stările corespunzătoare extremităţilor palierului izotermei Andrews; v. figura F.C.35) este:

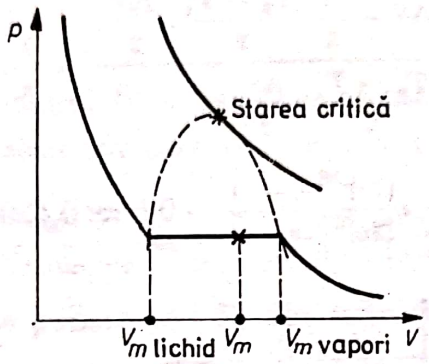


Fig. F.C.35

$V_m = x_l V_{m,\text{lichid}} + (1 - x_l) V_{m,\text{vapori}}$ de unde rezultă că

$$x_l = \frac{V_{m,\text{vapori}} - V_m}{V_{m,\text{vapori}} - V_{m,\text{lichid}}} = \frac{0{,}013 - 0{,}07}{0{,}013 - 0{,}05} = 0{,}75 \ (75\% \text{ azot lichid}).$$

d) Maximul trinomului de gradul II $y = ax^2 + bx + c$ (unde $a < 0$) este atins pentru $x_{max} = -\frac{b}{2a}$. Rezultă că $V_{\text{mol, critic}} = -\frac{738}{2(-4\,100)} = 0{,}09 \frac{l}{\text{mol}}$ şi presiunea critică $p_c = -4\,100 \cdot 0{,}09^2 + 738 \cdot 0{,}09 \cong 33{,}21$ atm.

Comparînd valorile obţinute pentru volumele molare limită şi, respectiv, critic, constatăm că (în acest caz) $V_{\text{mol, critic}} \approx 3 V_{\text{mol, limită}}$.

19°. a) $C_p = C_V + R = \frac{7R}{2}$, $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$.

Deoarece într-o transformare izocoră $\Delta U = Q_V = \nu C_V \Delta T = \nu \frac{5R}{2} \Delta T$, avem $U = \nu \frac{5RT}{2}$. Între temperaturile corespunzătoare stărilor 1...4, există relaţiile:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = a^{\frac{2}{5}}, \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{b^{2/5}},$$

$$Q_1 = Q_{\text{primit ciclu}} = Q_{23} = \nu C_p (T_3 - T_2) = \nu \frac{7R}{2} T_1 a^{\frac{2}{5}} \left(\frac{a}{b} - 1\right),$$

$$-Q_2 = Q_{\text{cedat ciclu}} = Q_{41} = \nu C_V (T_1 - T_4) = \nu \frac{5R}{2} T_1 \left(1 - \frac{a^{7/5}}{b^{7/5}}\right),$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{5(a^{7/5} \cdot b^{-7/5} - 1)}{7a^{2/5}\left(\frac{a}{b} - 1\right)} = 1 - \frac{5(e^{7/5} - 1)}{7 \cdot 2^{2/5} \cdot e^{2/5}(e - 1)} \approx 0{,}3553 \ (= 35{,}53\%).$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\varepsilon = \frac{Q_{\text{preluat sursă rece}}}{L_{\text{ciclu}}} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{\frac{Q_2}{Q_1}}{1 - \frac{Q_2}{Q_1}} = \frac{1 - \eta_{\text{mot.}}}{\eta_{\text{mto.}}} = \frac{1 - 0{,}3553}{0{,}3553} \approx 1{,}814.$

c) $\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{\nu C_p \, dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_3}{T_2} = \nu \frac{7R}{2} \ln \frac{a}{b} = 5 \cdot \frac{7 \cdot 8{,}31}{2} \cdot \ln e \approx 145{,}425 \frac{J}{K}.$

d) Din figura F.C.36 rezultă că

$$\varepsilon_{\text{real}} = \frac{\frac{T_3 + T_1}{2} \cdot \Delta S - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T_3 - T_1}{2} \cdot \frac{\Delta S}{2}}{\pi \frac{T_3 - T_1}{2} \cdot \frac{\Delta S}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{T_3 + T_1}{T_3 - T_1} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(2e)^{2/5} \cdot e + 1}{(2e)^{2/5} \cdot e - 1} - 0{,}5 \approx 0{,}4296.$$

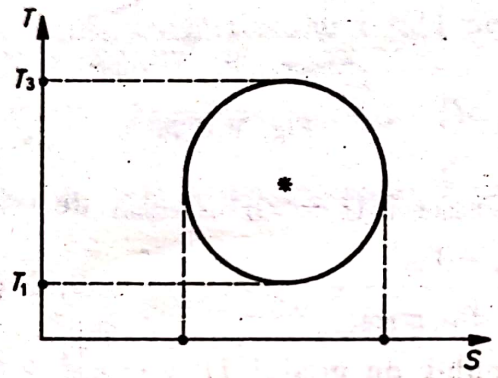


Fig. F.C.36

20°. a) Pentru $V = c$, avem $p = \text{maxim} = a$. Rezultă că $a = p_{\text{critic}}$, $c = V_{\text{critic}}$. Pentru $p = \frac{p_{\text{critic}}}{2}$ avem $\left(V - \frac{c^2}{V}\right)^2 = b^2$, deci $V - \frac{c^2}{V} = \pm b$, de unde $V^2 \mp bV - c^2 = 0$ şi obţinem pentru volumele lichidului V_l şi, respectiv, vaporilor V_v, la extremităţile palierului izotermei Andrews, $V_{l,v} = \pm \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$. Deoarece $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} > \frac{b}{2}$, doar soluţiile cu $+$ în faţa radicalului au semnificaţie fizică. Deci $V_l = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} - \frac{b}{2}$, iar $V_v = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} + \frac{b}{2}$ şi $b = V_v - V_l$ (diferenţa dintre volumele vaporilor şi lichidului la extremităţile palierului izotermei Andrews, pentru presiunea $p = \frac{1}{2} p_{\text{critic}}$).

b) $\left(V - \frac{c^2}{V}\right)^2 = \frac{ab^2}{p_0} - b^2$, de unde $V - \frac{c^2}{V} = \pm V_c \sqrt{\frac{p_c}{p_0} - 1}$. Se obţine ecuaţia $V^2 \mp V_c \sqrt{\frac{p_c}{p_0} - 1} \cdot V - V_c^2 = 0$, de unde $(V_{v,l})_{p_0} = \pm \frac{V_c}{2} \sqrt{\frac{p_c}{p_0} - 1} \pm \sqrt{\frac{V_c^2}{4}\left(\frac{p_c}{p_0} - 1\right) + V_c^2}$, semnul minus în faţa radicalului neavînd semnificaţie

fizică, din motivele indicate mai înainte. Prin urmare $\Delta U = m\lambda_{v0} + p_0[(V_v)_{p_e} - (V_l)_{p_e}] = m\lambda_{v0} + p_0 V_c \sqrt{\frac{p_c}{p_0} - 1}$, sau $\Delta U = m\lambda_{v0} + p_0 c \sqrt{\frac{a}{p_0} - 1}$.

c) După cum $V_0 < (V_l)_{p_e}$, $V_0 \in [(V_l)_{p_e}, (V_v)_{p_e}]$, sau $V_0 > (V_v)_{p_e}$, substanța se găsește în fază lichidă, amestec lichid + vapori, respectiv vapori. Pentru $V_0 \in [(V_l)_{p_e}, (V_v)_{p_e}]$ avem $x(V_l)_{p_e} + (1-x)(V_v)_{p_e} = V_0$, de unde $x = \frac{(V_v)_{p_e} - V_0}{(V_v)_{p_e} - (V_l)_{p_e}}$ și $1 - x = \frac{(V_0 - V_l)_{p_e}}{(V_v)_{p_e} - (V_l)_{p_e}}$.

21°. a) Lungimea drumului liber mijlociu al atomilor de sodiu în aer este $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\sigma}$, deci presiunea care trebuie realizată în instalație pentru ca $\tilde{\lambda} = 10d_1$ este $p = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot 10d_1 \cdot \sigma} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-19}} \approx 3{,}64 \cdot 10^{-2}$ N. m^{-2}.

b) Cele mai depărtate puncte (A, B) din cadrul zonei de penumbră satisfac relația (figura F.C.37) $\frac{AB}{FG} = \frac{AB}{d} = \frac{\frac{d_1 + d_2}{2}}{\frac{d_1 - d_2}{2}} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}$, de unde $AB = d\frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10 + 6}{10 - 6} = 0{,}08$ m.

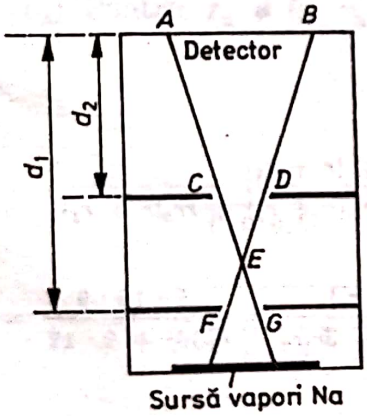


Fig. F.C.37

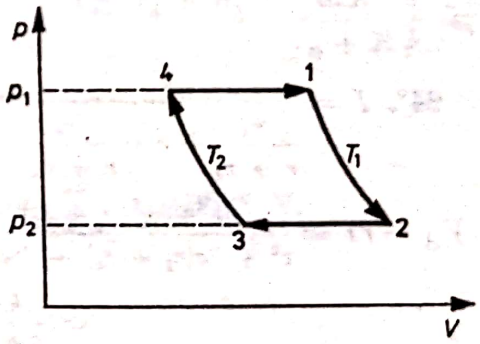


Fig. F.C.38

c) $u = \sqrt{\tilde{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{5{,}3 \cdot 10^{-26}}} \cong 539{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

22°. a) Utilizînd notațiile din figura F.C.38, avem: $\Delta S = \frac{Q_{34}}{T_2} = \frac{L_{34,\text{ef}}}{T_2} = \frac{1}{T_2} \nu R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\nu R \ln \frac{p_1}{p_2} = -2 \cdot 8{,}31 \cdot \ln 2{,}718 \approx -16{,}62 \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

b) $C_p = \frac{\Delta Q_p}{\nu \Delta T} = \left[\frac{\Delta U + p\Delta V + V\Delta p}{\nu \Delta T}\right]_{p=\text{const.}} = \frac{\Delta U}{\nu \Delta T} + \frac{\Delta(pV)}{\nu \Delta T} = \frac{\Delta Q_V}{\nu \Delta T} + \frac{\nu R \Delta T}{\Delta T} = C_V + R$, de unde $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_p}{C_p - R} = \frac{20{,}775}{12{,}465} = \frac{5}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $L_{\text{ef. ciclu}} = L_{41} + L_{23} + L_{12} + L_{34} = p_1(V_1 - V_4) + p_2(V_3 - V_2) +$
$+ \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = \nu R(T_1 - T_2) + \nu R(T_2 - T_1) + \nu RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} +$
$+ \nu RT_2 \ln \frac{p_2}{p_1} = \nu R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_1}{p_2} = 2 \cdot 8{,}31(600 - 300) \ln 2{,}718 \approx 4986$ J,

$Q_{\text{primit ciclu}} = Q_{41} + Q_{12} = \nu C_p(T_1 - T_2) + \nu RT_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = 2 \cdot 20{,}775(600 - 300) +$
$+ 2 \cdot 8{,}31 \cdot 600 \ln 2{,}718 \approx 22437$ J, deci $\eta = \frac{L_{\text{ef. ciclu}}}{Q_{\text{prim. ciclu}}} \approx \frac{4986}{22437} = \frac{2}{9} (\approx 22{,}2\%)$.

23°. a) $L_{\text{ciclu}} = (p_A - p_C)(V_C - V_A) = (6 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5)(166{,}2 - 83{,}1) \cdot 10^{-3} =$
$= 24930$ J.

b) $C_p = \gamma C_V = C_V + R$, deci $C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{R}{0{,}4} = \frac{5}{2} R$, $C_p = C_V + R = \frac{7}{2} R$,

$Q_{\text{primit ciclu}} = Q_{DA} + Q_{AB} = \nu C_V(T_A - T_D) + \nu C_p(T_B - T_A) = \frac{C_V}{R}(p_A V_A - p_C V_A) +$
$+ \frac{C_p}{R}(p_A V_C - p_A V_A) = \frac{5}{2} V_A(p_A - p_C) + \frac{7}{2} p_A(V_C - V_A) = \frac{5}{2} \cdot 83{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot$
$\cdot (6 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5) + \frac{7}{2} \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot (166{,}2 - 83{,}1) \cdot 10^{-3} \cong 236835$ J.

c) $\eta = \frac{L_{\text{ciclu}}}{Q_{\text{primit ciclu}}} = \frac{24930}{236835} = \frac{2}{19} (\approx 10{,}5\%)$, $T_{min} = \frac{p_C V_A}{\nu R}$, $T_{max} = \frac{p_A V_C}{\nu R}$,

$\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{p_C V_A}{p_A V_C} = 1 - \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 83{,}1 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^5 \cdot 166{,}2 \cdot 10^{-3}} = 0{,}75$ $(= 75\%)$, de unde

$\frac{\eta}{\eta_C} = \frac{\frac{2}{19}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{57} = 0{,}14$.

24°. $I = \frac{e}{\frac{rr_1}{r + r_1} + r + \frac{rr_2}{r + r_2}} = \frac{e(r + r_1)(r + r_2)}{rr_1(r + r_2) + r(r_1 + r)(r + r_2) + rr_2(r + r_1)}$,

$V_A = rI = \frac{e(r + r_1)(r + r_2)}{r^2 + 2r(r_1 + r_2) + 3r_1 r_2} = \frac{e(r + r_1)(r + r_2)}{r(r + 2r_1 + 2r_2) + 3r_1 r_2} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 9}{6(36) + 9 \cdot 12} =$

$= \frac{4 \cdot 18}{6(4 + 2)} = \frac{4 \cdot 3}{6} = 2$ V.

25°. a$_1$) $r_k = 0$, $V_A - V_B = e_k + i_k R_k$, $(V_A - V_B) \frac{1}{R_k} = \frac{e_k}{R_k} + i_k$.

Sumînd pentru cele n ramuri, avem

$$(V_A - V_B) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{R_k} + \sum_{k=1}^{n} i_k.$$

Deoarece $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$, se obține $V_A - V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} e_k / R_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$.

Scanned with OKEN Scanner

a$_2$) $r_k \neq 0$, $V_A - V_B = e_k + i_k(r_k + R_k)$, $(V_A - V_B)\dfrac{1}{r_k + R_k} = \dfrac{e_k}{r_k + R_k} + i_k$,

$$(V_A - V_B)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{r_k + R_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{e_k}{r_k + R_k} + \sum_{k=1}^{n} i_k.$$

Deoarece $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$, rezultă $V_A - V_B = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{e_k}{r_k + R_k}}{\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{r_k + R_k}}$.

b$_1$) Pentru $r_k = 0$, rezistența de 20 Ω plasată la bornele pilei electrice de 50 V nu intervine în calcule. Atunci

$$V_A - V_B = \frac{\sum_{k=1}^{3}\dfrac{e_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{3}\dfrac{1}{R_k}} = \frac{+\dfrac{10}{0,5} - \dfrac{20}{0,2} + \dfrac{50}{4}}{\dfrac{1}{0,5} + \dfrac{1}{0,2} + \dfrac{1}{4}} = -\frac{67,5}{7,25} \cong -9,31 \text{ V}.$$

b$_2$) Pentru $r_k \neq 0$, $r'_n = \dfrac{r_n R}{r_n + R}$, $V_A - V_B = \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{e_k}{r_k + R_k} + \dfrac{e_n}{\dfrac{r_n R}{r_n + R} + R_n}}{\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{r_k + R_k} + \dfrac{1}{\dfrac{r_n R}{r_n + R} + R_n}} =$

$$= \frac{\dfrac{10}{1 + 0,5} - \dfrac{20}{1 + 0,2} + \dfrac{50}{\dfrac{1 \cdot 20}{1 + 20} + 4}}{\dfrac{1}{1 + 0,5} + \dfrac{1}{1 + 0,2} + \dfrac{1}{\dfrac{1 \cdot 20}{1 + 20} + 4}} = \frac{18}{282,6} \cong 0,0637 \text{ V}.$$

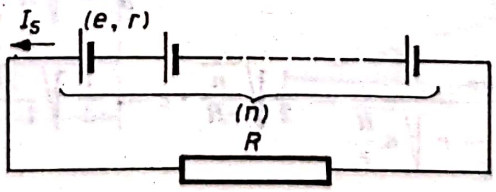


Fig. F.C.39

26°. a) $e_s = ne = 24 \cdot 1 = 24$ V (figura F.C.39), $r_s = nr = 24 \cdot 1 = 24$ Ω,

$$I_s = \frac{e_s}{r_s + R} = \frac{ne}{nr + R} = \frac{24 \cdot 1}{24 \cdot 1 + 6} = \frac{4}{5} \text{ A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $e_p = e = 1$ V (figura F.C. 40), $r_p = \dfrac{1}{\underbrace{\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\ldots+\frac{1}{r}}_{n}} = \dfrac{r}{n} = \dfrac{1}{24}\ \Omega$,

$$I_p = \frac{e_p}{r_p + R} = \frac{e}{\frac{r}{n} + R} = \frac{ne}{r + nR} = \frac{24 \cdot 1}{1 + 24 \cdot 6} = \frac{24}{145}\ \text{A}.$$

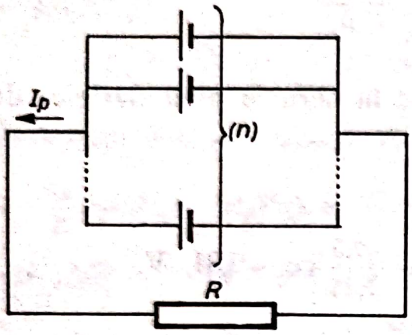


Fig. F.C.40

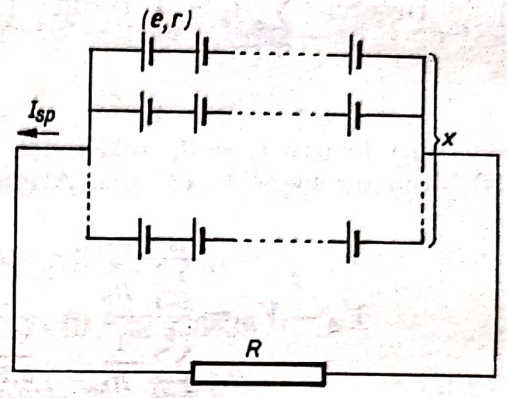


Fig. F.C.41

c) Notăm cu x numărul de serii şi cu y numărul de elemente dintr-o serie (figura F.C.41); atunci $xy = n$ = numărul total de elemente.

Pentru o serie avem $e_{s_1} = ey$, $r_{s_1} = yr$, iar pentru cele x serii avem $e_{sp} = ey$, $r_{s_p} = \dfrac{y}{x} r$.

Intensitatea curentului care trece prin rezistenţa R, este:

$$I = \frac{e_{sp}}{r_{sp} + R} = \frac{ey}{\frac{y}{x} r + R} = \frac{exy}{yr + xR} = \frac{ne}{xR + yr}, \qquad I = I_{max} \Rightarrow xR + yr = \text{minim},$$

$$\left.\begin{aligned} xy &= n \\ xR + yr &= \min \end{aligned}\right\} \Rightarrow xR = yr, \qquad \left.\begin{aligned} xy &= n \\ xR &= yr \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{n\frac{r}{R}} = \sqrt{24 \cdot \frac{1}{6}} = 2, \\ y &= \sqrt{n\frac{R}{r}} = \sqrt{24 \cdot \frac{6}{1}} = 12, \end{aligned}$$

$$I_{max} = \frac{ne}{R\sqrt{n\frac{r}{R}} + r\sqrt{n\frac{R}{r}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{rR}} \cdot e = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{1 \cdot 6}} \cdot 1 = 1\ \text{A},$$

$$e_{sp} = ey = 1 \cdot 12 = 12\ \text{V}, \quad r_{sp} = \frac{y}{x} r = \frac{12}{2} \cdot 1 = 6\ \Omega.$$

27°. a) În absenţa capacităţii (comutatorul K pe poziţia 1 în figura F.C.42)

$$I = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}, \text{ de unde } \left(\frac{U}{I}\right)^2 = R^2 + X_L^2.$$

Cînd comutatorul K trece în poziţia 2 apare rezonanţa (figura F.C.43), deci $X_L = X_C$. Ecuaţia anterioară devine $\left(\frac{U}{I}\right)^2 = R^2 + X_C^2$, de unde

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - X_C^2} = \sqrt{\left(\frac{110}{22}\right)^2 - 16} = 3\,\Omega.$$

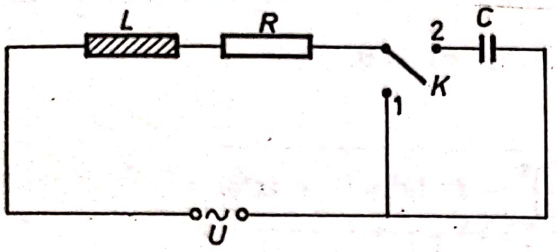


Fig. F.C.42

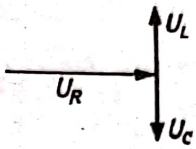


Fig. F.C.43

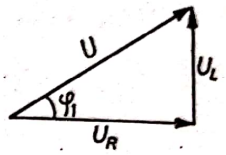


Fig. F.C.44

De asemenea,

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = \frac{1}{2\pi 50}\sqrt{\left(\frac{110}{22}\right)^2 - 9} \cong$$

$$\cong 12{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{H}, \quad X_C = \frac{1}{C\omega}, \text{ deci } C = \frac{1}{2\pi\nu X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 4} = 79{,}5\ \mu\text{F}.$$

b) La rezonanţă $Z = R$, deci $I = \frac{U}{R} = \frac{110}{3} = 36{,}6$ A.

c) Din figura F.C.44, rezultă că

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{4}{3},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\ 1{,}(3) \approx 53°;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{|U_L - U_C|}{R} = 0, \text{ deoarece } X_L = X_C, \text{ deci } \varphi_2 = 0;$$

$$Q = \left(\frac{U_L}{U_R}\right)_{\omega_0} = \frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4}{3}.$$

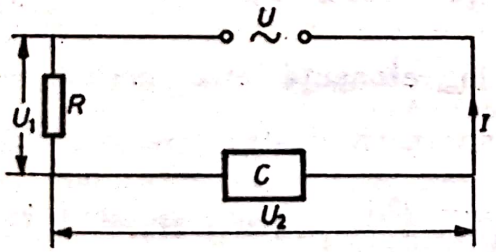


Fig. F.C.45

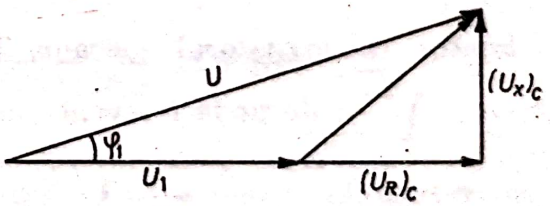


Fig. F.C.46

28°. În figura F.C.45, R reprezintă rezistenţa firului, iar C consumatorul. Tensiunea U la borne este suma vectorială a căderilor de tensiune pe fire U_1 şi pe consumator U_2. Notăm $(U_R)_C$ şi $(U_X)_C$ căderile de tensiune pe rezistenţa consumatorului şi pe reactanţa acestuia (figura F.C.46).

Puterea consumată în conductori este $P_1 = U_1 I = RI^2$, iar puterea (activă) preluată de la reţea este $P = (U_1 + (U_R)_C)I = (U_1 + U_2 \cos\varphi)I = P_1 + U_2 I \cos\varphi$.

Pe de altă parte (figura F.C.46),

$$U^2 = [U_1 + (U_R)_C]^2 + (U_X)_C^2 = (U_1 + U_2 \cos \varphi)^2 + U_2^2 \sin^2 \varphi.$$

Multiplicăm această ecuație cu I^2 și obținem $U^2I^2 = (U_1 + U_2 \cos \varphi)^2 I^2 + U_2^2 I^2 \sin^2 \varphi$. Utilizînd ecuațiile pentru puteri, această ecuație devine $U^2 \frac{P_1}{R} = P^2 + \frac{(P - P_1)^2}{\cos^2 \varphi} \sin^2 \varphi$. Această ecuație pentru necunoscuta P_1 poate fi scrisă $\operatorname{tg}^2 \varphi \, P_1^2 - 2\left(P \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{U^2}{2R}\right) P_1 + P^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 0$.

Soluția este

$$P_1 = \frac{P \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{U^2}{2R} \pm \sqrt{\left(P \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{U^2}{2R}\right)^2 - P^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \, (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}{\operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Numai soluția cu minus este acceptabilă deoarece soluția cu plus conduce la $P_1 > P$, deci, deoarece $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 = \frac{1}{0{,}81} - 1 \cong 0{,}234$, rezultă

$$P_1 = \frac{10^4 \cdot 0{,}234 + 121 \cdot 10^3 - \sqrt{(2{,}34 \cdot 10^3 + 121 \cdot 10^3)^2 - 10^8 \cdot 0{,}234(1 + 0{,}234)}}{0{,}234} =$$

$$= \frac{123{,}34 \cdot 10^3 - 123{,}22215 \cdot 10^3}{0{,}234} \cong 503{,}6 \text{ W}.$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{U_1 + (U_R)_C}{U} = \frac{U_1 + U_2 \cos \varphi}{U} = \frac{P}{UI} = \frac{P}{U\sqrt{\frac{P_1}{R}}} = \frac{10^4}{220\sqrt{\frac{503{,}6}{0{,}2}}} = 0{,}9058,$$

valoare mai mare decît a factorului de putere pentru consumator, deoarece s-a presupus că firele de transport au numai rezistență electrică (nu și reactanțe).

29°. a) În condițiile în care vergeaua conductoare, parcursă de un curent electric alternativ de intensitate momentană $I_L = I_{L_0} \sin \omega t$, este perpendiculară pe direcția inducției magnetice $\vec{B} = \frac{\mu N}{d} I_L \vec{1}_B$ în întrefierul bobinelor, forța electromagnetică acționînd asupra vergelei va fi

$$F = BI_L l = B_0 I_{L_0} l \sin^2 \omega t = \frac{B_0 I_{L_0} l}{2}[1 - \cos 2 \omega t].$$

Pentru ca oscilatorul mecanic să intre în rezonanță este necesar ca $2\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, de unde frecvența curentului alternativ pentru care se obține această rezonanță, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \cong \frac{1}{4 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{20{,}1}{3{,}18 \cdot 10^{-4}}} \cong 20{,}1$ Hz.

b) Inductanța ansamblului celor 2 bobine este

$$L = 2\mu \frac{N^2 S}{d} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2500 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} = 6{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

Amplitudinea intensității curentului alternativ prin bobine este $I_{L_0} = \frac{U_0}{L\omega} =$

$= \frac{6{,}28}{6{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}28 \cdot 20{,}1} \approx 0{,}8$ A, iar amplitudinea inducției magnetice în întrefie-

Scanned with OKEN Scanner

rul bobinelor va fi $B_0 = \mu \frac{NI_{L_0}}{d} \approx 10^{-3} \cdot \frac{50 \cdot 0{,}8}{4 \cdot 10^{-2}} = 1$ T. Rezultă că deplasarea poziţiei de echilibru a vergelei în cazul conectării la generatorul de tensiune alternativă va fi $\Delta h = \frac{B_0 I_{L_0} l}{2k} \cong \frac{1 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10{,}1}$ m $\approx 0{,}5$ mm. Sensul deplasării poziţiei de echilibru este dat de sensul forţei electromagnetice (v. figura F.C.47), deci depinde de modul de conectare al vergelei conductoare la bobine, între acestea.

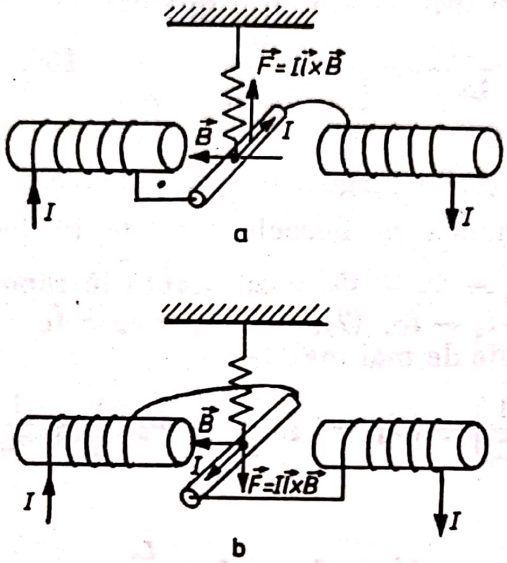


Fig. F.C.47

c) $P_a = \frac{U_0 I_0}{2} = \frac{U_0^2}{2} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$, deci

$$P_{a\,min} = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{6{,}28^2}{2 \cdot 12{,}56} = 1{,}57 \text{ W}.$$

Pentru ca P_a = minim, trebuie ca $\frac{1}{L\omega} = C\omega$, deci

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{6{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}28^2 \cdot 20{,}1^2} \approx 1 \text{ mF}.$$

30°. a) Dacă L şi C sînt inductanţa şi, respectiv, capacitatea echivalentă pentru întreg circuitul derivaţie, intensitatea efectivă i a curentului debitat de generator va fi $i = U \sqrt{\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$, de unde rezultă că valoarea maximă a tensiunii efective, $U_m = Ri$, va fi atinsă pentru $\frac{1}{L\omega_m} - C\omega_m = 0$, adică atunci cînd

$$\omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10 \cdot 20}{30} \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^{-9}}} = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o frecvență oarecare: $P = \frac{U^2}{R} = \frac{i^2}{R} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2 + \frac{1}{R^2}}$, deci — pentru ca $P(\omega_\pm) = \frac{P_m}{2} = \frac{Ri^2}{2}$, este necesar ca $\frac{1}{L\omega_\pm} - C\omega_\pm = \pm\frac{1}{R}$, de unde $RLC\omega_\pm^2 \mp$ $\mp L\omega_\pm - R = 0$ și $\omega_\pm = \frac{\pm L \pm \sqrt{L^2 + 4R^2LC}}{2RLC}$, avînd semnificație fizică numai soluția cu semnul plus în fața radicalului. Rezultă că $\omega_+ - \omega_- = \frac{2L}{2RLC} = \frac{1}{RC}$, iar $\frac{f_m}{\Delta f} = \frac{\omega_m}{\Delta\omega} = RC\omega_m = \frac{R}{L\omega_m} = \frac{10^5}{\frac{10 \cdot 20}{30} \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} = 150.$

b) Fie Φ_1 și Φ_2 fluxurile magnetice prin bobinele L_1 și, respectiv L_2, iar $u = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t}$ (1) tensiunea la bornele condensatorilor (circuitului derivație). Rezultă că diferența $\Phi_c = \Phi_1 - \Phi_2 =$ constantă în raport cu timpul. Pe de altă parte, $i_1 + i_{C_1} = I = -i_2 - i_{C_2}$ (2), deci $i_1 + i_2 + i_{C_1} + i_{C_2} = 0$.

Ținînd seamă de cele de mai înainte,

$$0 = \frac{\Phi_c}{L_1} + \Phi_2\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) + (C_1 + C_2)\frac{\Delta u}{\Delta t} = \Phi_2'\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) + (C_1 + C_2)\frac{\Delta u}{\Delta t}, \quad (2')$$

unde

$$\Phi_2' = \Phi_2 + \Phi_c\frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad (3)$$

deci

$$u = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\Phi_2'}{\Delta t}. \quad (1')$$

Ecuațiile (1') și (2') sînt tipice pentru oscilațiile unui circuit oscilant cu frecvența:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(C_1 + C_2)\frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}}} = \frac{1}{2\pi}\omega_m = \frac{10^5}{2\pi} \approx 15{,}9 \text{ kHz}.$$

c) Din relația (2) rezultă că

$$2I = i_1 + i_{C_1} - i_2 - i_{C_2} = \frac{\Phi_c}{L_1} + \Phi_2\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right) + (C_1 - C_2)\frac{\Delta u}{\Delta t} =$$

$$= \Phi_c\left[\frac{1}{L_1} - \frac{L_2}{L_1 + L_2}\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)\right] + \Phi_2'\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right) - (C_1 - C_2)\Phi_2'\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\frac{1}{C_1 + C_2} =$$

$$= \Phi_c\left[\frac{1}{L_1} - \frac{L_2 - L_1}{L_1(L_1 + L_2)}\right] + \frac{\Phi_2'}{L_1L_2}(L_1 + L_2)\left[\frac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2} - \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right].$$

Pentru valorile numerice din enunț $\frac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{3}$, deci $I = \frac{\Phi_c}{2} \times$

$\times \frac{2L_1}{L_1(L_1 + L_2)} = \frac{\Phi_c}{L_1 + L_2} =$ constantă în raport cu timpul.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $i_{C_1} = C_1 \frac{\Delta u}{\Delta t}$, $i_{C_2} = C \frac{\Delta u}{\Delta t}$, rezultă că $i_{C_1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(i_{C_1} + i_{C_2}) =$

$= -\frac{C_1}{C_1 + C_2}(i_1 + i_2)$; la momentul t_0: $i_{0C_1} = -\frac{C_1}{C_1 + C_2}(i_{01} + i_{02}) =$

$= -\frac{2}{3} \cdot 0{,}3 \text{ A} = -0{,}2 \text{ A}$, deci $I_{01} = i_{01} + i_{0C_1} = -0{,}1$ A, adică prin conductorul AB circulă, de la B spre A, un curent continuu de 0,1 A.

d) Circuitele L_1C_1 şi L_2C_2 oscilează separat, intensitatea curentului oscilant prin L_1 la momentul t_0 fiind astfel: $i_{01\ osc} = i_{01} - I_{01} = 0{,}2$ A.

Din condiţia conservării energiei în circuitul L_1C_1 se obţine:

$$\frac{L_1}{2} i_{1\,max}^2 = \frac{L_1}{2} i_{01,\,osc.}^2 + \frac{C_1}{2} u_0^2 = 10^{-3} \cdot \frac{10}{2} \cdot (0{,}2)^2 + \frac{10^{-3}}{2} \cdot 1600 =$$

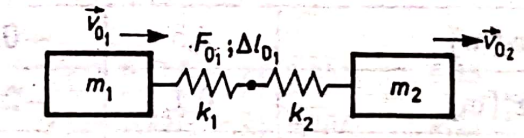
$$= 2{,}08 \cdot 10^{-4}, \text{ deci } i_{1\,max} \cong 0{,}204 \text{ A}.$$

e) Pornind de la expresiile $W_{cond} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C}$,

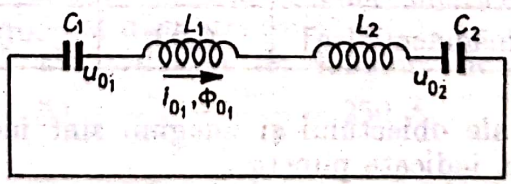
$$W_{bob.} = \frac{Li^2}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)^2 = \frac{\Phi^2}{2L}, \quad W_{cin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 = \frac{p^2}{2m},$$

$W_{elast.} = \frac{F^2}{2k} = \frac{1}{2k}\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)^2 = \frac{kx^2}{2}$, rezultă analogiile:

i	$Q = \int i\,dt$	L	$\Phi = Li$	C	$u = Q/C$
u	$\Phi = \int u\,dt$	C	$Q = Cu$	L	$i = \Phi/L$
v	$x = \int v\,dt$	m	$p = mv$	$1/k$	$F = \frac{x}{1/k}$
F	$p = \int F\,dt$	$1/k$	$x = F\frac{1}{k}$	m	$v = p/m$



b



a

Fig. F.C.48

Din figura F.C.48, se constată analogia problemei de faţă cu problema 12°.

31°. a) $I = \frac{P}{U \cos\varphi} = \frac{100}{120 \cdot 0{,}545} = \frac{5}{3{,}27} \approx 1{,}53$ A, $R = \frac{U}{I} = 120 \cdot \frac{3{,}27}{5} = 78{,}48\ \Omega$,

$Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{78{,}48}{0{,}545} = 144\ \Omega$;

b) $X = Z \sin \varphi = Z \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 144 \sqrt{1 - 0{,}545^2} \approx 120{,}73\ \Omega$;

c) $U_b = ZI = 144 \cdot \frac{5}{3{,}27} \approx 220{,}2$ V.

32°. Se alege, ca sens pozitiv, sensul luminii reflectate. Notînd cu x_0 abscisa obiectului şi cu x_i abscisa imaginii, avem (figura F.C.49) $x_0 x_i = f^2 = (-0{,}5)^2 = 0{,}25$ şi $x_0 - x_i = 2{,}4$.

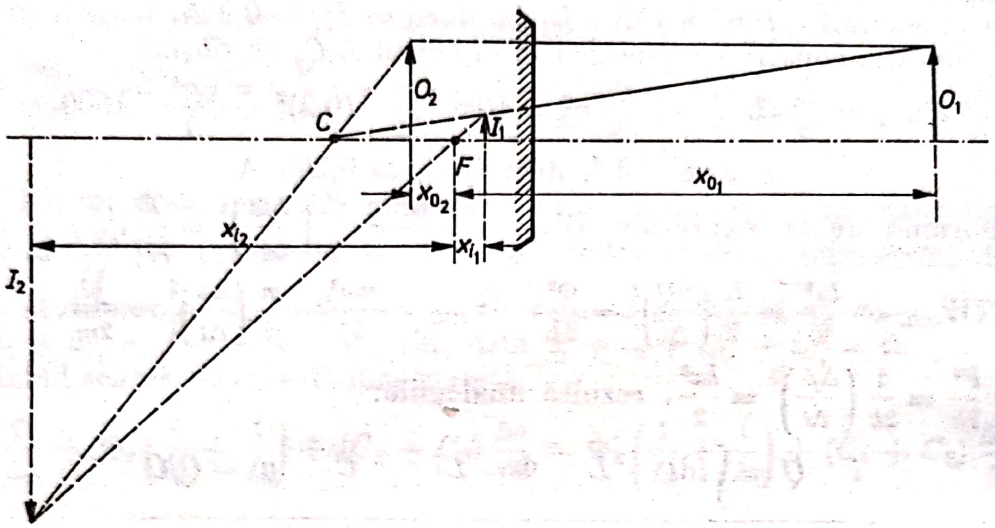


Fig. F.C.49

Introducînd pe $x_i = -2{,}4 + x_0$, din a doua relaţie, în prima, se obţine $x_0^2 - 2{,}40 x_0 - 0{,}25 = 0$, adică $x_{0_1} = 2{,}5$ m şi $x_{0_2} = -0{,}1$ m.

Deoarece mărirea este $\frac{-f}{x_0}$, avem următorul tablou:

	Cazul 1	Cazul 2
x_0[m]	2,5	−0,1
x_i[m]	0,1	−2,5
$\frac{I}{O} = \frac{-f}{x_0}$	$\frac{1}{5}$	−5
imaginea I[m]	0,02	−0,5

Poziţiile relative ale obiectului şi imaginii sînt indicate în figura F.C.49. Elementele virtuale sînt indicate punctat.

33°. Fasciculul iese din prismă formînd un unghi de 30° cu direcţia sa iniţială, dar nu este deviat în prismă, deoarece el cade normal pe faţa de intrare (figura F.C.50). Fasciculul emergent formează un unghi $i' = 30° + 30° = 60°$ cu normala la faţa de ieşire. Deci $r' = 30°$ şi $\sin i' = n \sin r'$, adică

$$n = \frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin 60°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Minimul deviației apare pentru $r = r' = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{30}{2} = 15°$ (figura F.C.51). Se știe că $\sin 15° \cong 0{,}2588$ și din relația $\sin i' = n \sin r'$, avem $\sin i' \cong \sqrt{3} \cdot 0{,}2588 \approx 0{,}4482$, adică $i' \cong 26°37'$. Deviația minimă este $D_m = 2i' - A \cong 2 \cdot 26° \ 37' - 30° = 23° \ 14'$.

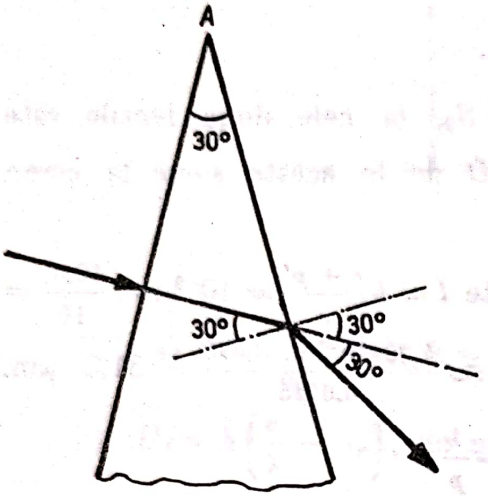


Fig. F.C.50

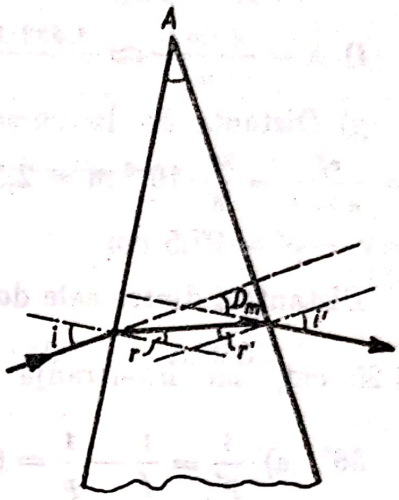


Fig. F.C.51

34°. a) Deoarece $(n-1)g = \lambda \Delta m$, rezultă că indicele de refracție al lamei este $n = 1 + \frac{\Delta m \cdot \lambda}{g} = 1 + \frac{2 \cdot 0{,}5}{2} = 1{,}5$.

b) Deoarece intensitatea luminoasă este proporțională cu pătratul intensității cîmpului electric al undei electromagnetice,

$$I_{rez} = kE_{rez}^2 = k(E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \Delta\varphi) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi,$$

rezultă că

$$\frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{I_1 + 0{,}25I_1 - 2\sqrt{0{,}25I_1}}{I_1 + 0{,}25I_1 + 2\sqrt{0{,}25I_1}} = \frac{0{,}25}{2{,}25} = \frac{1}{9}.$$

c) Neclaritatea maximă a figurii de interferență se va produce atunci cînd maximul de ordinul m (=10) al radiației monocromatice cu lungimea de undă $\lambda + \Delta\lambda$ va coincide cu mijlocul distanței (minimul de ordinul m) dintre maximele de ordinele m și $m+1$ ale radiației de lungime de undă λ: $m(\lambda + \Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Rezultă că $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2m} = \frac{5000}{2 \cdot 10} = 250$ Å.

35°. a) $\frac{1}{p} = \frac{1}{D_0} + \frac{1}{f}$, deci $p = \frac{f \cdot D_0}{D_0 + f} = \frac{2 \cdot 25}{27} \cdot 10^{-2}$ m $\approx 1{,}85$ cm.

b) $m_{oc} = \frac{D_0}{p} = \frac{D_0 + f}{f} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \times$.

c) $\frac{1}{p_{ob}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a-p}$, de unde $p_{ob} = \frac{f(a-p)}{a-p-f} \cong 2{,}06$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

d) $m_{ob} = \frac{a-p}{p_{ob}} = \frac{a-f-p}{f} \approx 9{,}07\ \times$,

$$m = m_{oc} m_{ob} = \frac{(D_0 + f)(a-f) - fD_0}{f^2} = \frac{490}{4} = 122{,}5\ \times.$$

e) $d = \frac{\delta}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{122{,}5}$ m $\approx 16{,}32$ μm.

f) $\lambda = \frac{d \sin \varphi}{n} \approx \frac{1{,}632 \cdot 10^{-5}\ \text{m} \cdot 0{,}5}{20} = 4080$ Å.

g) Distanța de la sursele virtuale, S_1 și S_2, la cele două lentile este $p' = \frac{ef}{e-f} = \frac{20}{8} \cdot 10^{-2}$ m $= 2{,}5$ cm, iar distanța D de la aceste surse la ecran $D = e - p' = 97{,}5$ cm.

Distanța l dintre cele două surse virtuale este $l = b\frac{c+p'}{c} = 10^{-2}\ \text{m} \cdot \frac{12{,}5}{10} =$ $= 1{,}25$ cm, iar interfranja d_i va fi $d_i = \frac{\lambda L}{l} \approx \frac{4{,}08 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \cdot 0{,}975}{0{,}0125} = 31{,}8$ μm.

36°. a) $\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{p}$.

Efectuînd calculele, obținem $\frac{1}{p'_{\text{roșu}}} = 0{,}504\left(\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}1}\right) - \frac{1}{0{,}2} = 5{,}08\ \text{m}^{-1}$, de unde $p'_{\text{roșu}} = \frac{1}{5{,}08} \approx 0{,}1968$ m și $\frac{1}{p'_{\text{violet}}} = 0{,}521\left(\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}1}\right) - \frac{1}{0{,}2} = 5{,}42\ \text{m}^{-1}$ deci $p'_{\text{violet}} = \frac{1}{5{,}42} \approx 0{,}1845$ m.

b) $\frac{1}{F_{\text{roșu}}} = (n_r - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_r - 1)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{F_{\text{violet}}} =$

$= (n_v - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n'_v - 1)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R_1}\right)$, de unde $(n'_v - n'_r)\left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R_1}\right) =$

$= (n_r - n_v)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ și $\frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) =$

$= \frac{1}{0{,}1} - \frac{1{,}521 - 1{,}504}{1{,}671 - 1{,}612}\left(\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}1}\right) \approx 4{,}237\ \text{m}^{-1}$, deci $R'_2 = \frac{1}{4{,}237} \approx 0{,}236$ m.

c) Înlocuind valoarea determinată pentru R'_2 în expresiile de mai înainte ale convergențelor sistemului în roșu, respectiv violet, se verifică faptul că $\frac{1}{F_{\text{roșu}}} = \frac{1}{F_{\text{violet}}} \approx 6{,}553\ \text{m}^{-1}$, deci $F_{\text{roșu}} = F_{\text{violet}} \approx 0{,}1526$ m.

37°. Cele două fante reprezintă două surse de lumină pentru detectorul D. Diferența de fază dintre undele emise de cele două surse depinde de viteza de deplasare a sursei S, aflată la distanța x de axa sistemului (figura F.C.52). Astfel, $\Delta\varphi = \frac{2\pi h}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos \alpha_2} - \frac{1}{\cos \alpha_1}\right)$.

Deoarece $d \ll h$ și $x \ll h$, rezultă $\sin \alpha_1 \simeq \alpha_1$, $\sin \alpha_2 \simeq \alpha_2$, $\cos \alpha_1 \simeq 1 - \frac{\alpha_1^2}{2} =$ $= 1 - \frac{(d-2x)^2}{8h^2}$ și $\cos \alpha_2 = 1 - \frac{\alpha_2^2}{2} = 1 - \frac{(d+2x)^2}{8h^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de aceste relaţii, avem $\Delta\varphi = \frac{2\pi dx}{\lambda h} = 2\pi\frac{dv}{\lambda h}t$, deci $v = \frac{\lambda h\nu}{d} = \frac{6\cdot10^{-7}\cdot1{,}2\cdot15}{2\cdot10^{-3}} = 5{,}4\cdot10^{-3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

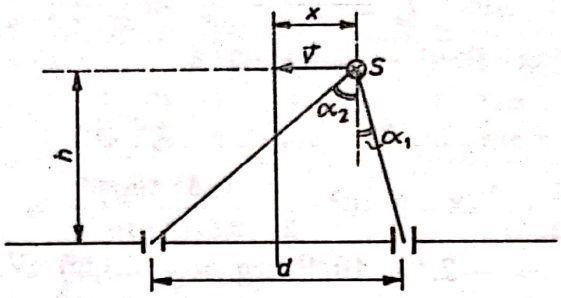


Fig. F.C.52

38°. a) $i = \frac{\lambda D}{a}$, deci $\lambda = \frac{ia}{D} = \frac{10^{-3}\cdot10^{-3}}{3} = \frac{1}{3}\cdot10^{-6}$ m ($\approx$3333 Å).

b) $eU_f = h\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_p\right)$, de unde

$$U_f = \frac{h}{e}\left(\frac{c}{\lambda} - \nu_p\right) = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\left(\frac{3\cdot10^8}{\frac{1}{3}\cdot10^{-6}} - 5\cdot10^{14}\right) = 1{,}65\ \mathrm{V}.$$

c) $m_f = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{hc}{\lambda}\cdot\frac{1}{c^2} = \frac{h}{c\lambda} = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}}{3\cdot10^8\cdot\frac{1}{3}\cdot10^{-6}} = 6{,}6\cdot10^{-36}$ kg,

$$p_f = \frac{h}{\lambda} = m_f c = 6{,}6\cdot10^{-36}\cdot3\cdot10^8 = 1{,}98\cdot10^{-27}\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

39°. a) Deoarece forţele centrifugă şi de atracţie coulombiană se echilibrează, $\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, între energia potenţială coulombiană $U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ şi energia cinetică a electronului atomului de hidrogen, $W_c = \frac{mv^2}{2}$, există relaţia $W_c = -\frac{U}{2}$, deci energia totală a acestui atom (în ipoteza nucleului imobil) este $W = U + W_c = \frac{U}{2}$. Rezultă că în starea considerată a atomului de hidrogen $W_n = -\frac{0{,}5\,Rhc}{2} = -\frac{Rhc}{4}$; cum $W_n = -\frac{Rhc}{n^2}$, găsim că $n = \sqrt{-\frac{Rhc}{W_n}} = 2$.

b) $eU_i = -W_2$, deci $U_i = -\frac{W_2}{e} = \frac{Rhc}{4e} = \frac{1{,}09\cdot10^7\cdot6{,}6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{4\cdot1{,}6\cdot10^{-19}} \approx 3{,}37$ V.

c) Conform celor de mai înainte, $W_n = -\frac{Rhc}{n^2} = \frac{U}{2} = \frac{-e^2}{2\cdot4\pi\varepsilon_0 r}$,

deci $r = \frac{e^2n^2}{8\pi\varepsilon_0 Rhc} \cong \frac{(1{,}6\cdot10^{-19})^2\cdot4}{2\cdot\frac{1}{9}\cdot10^{-9}\cdot1{,}09\cdot10^7\cdot6{,}6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8} \approx 2{,}13\cdot10^{-10}$ m $= 2{,}13$ Å.

40°. a) Din relaţia $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}=mr\omega^2$ şi condiţia lui Bohr, $mr^2\omega=n\frac{h}{2\pi}=n\hbar$ (unde $n=1,\ 2,\ \ldots$, iar ω este viteze unghiulară) rezultă

$$r_n=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2=r_1n^2,\ \text{deci}\ r_1\equiv r_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\cong\frac{(1{,}054\cdot10^{-34})^2}{9\cdot10^9\cdot9{,}1\cdot10^{-31}(1{,}6\cdot10^{-19})^2}\cong$$

$$\cong 5{,}293\cdot10^{-11}\ \text{m}=0{,}5293\ \text{Å}.$$

b) $E_n=-\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{r_0}\cdot\frac{1}{n^2},$

$$E_1=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{r_0}\cong-9\cdot10^9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1{,}6\cdot10^{-19})^2}{0{,}5293\cdot10^{-10}}\cong-2{,}17\cdot10^{-18}\ \text{J}=$$

$$=-2{,}17\cdot10^{-11}\ \text{erg}\cong-13{,}56\ \text{eV}.$$

c) $E_p=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r},\ E_c=\frac{1}{2}mv^2,$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r},$$

$$E=E_p+E_c=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}=-\frac{1}{2}mv^2=-E_c.$$

d) $\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\\&mvr=n\hbar\end{aligned}\right\}\Rightarrow v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{n},\qquad p_t=mv=\frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{n},$

$$(p_t)_{n=1}=\frac{m}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\hbar}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(1{,}6\cdot10^{-19})^2\cdot9\cdot10^9}{1{,}054\cdot10^{-34}}\cong2\cdot10^{-25}\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

41°. a) $\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\\&mvr=n\hbar\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{\hbar}\cdot\frac{1}{n},\\&r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2,\end{aligned}\qquad\tau=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3}{me^4}n^3,$

$$n=1\Rightarrow\tau=2\pi\frac{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3}{me^4}\cong6{,}28\cdot\frac{1}{(9\cdot10^9)^2}\cdot\frac{(1{,}054\cdot10^{-34})^3}{9{,}1\cdot10^{-31}(1{,}6\cdot10^{-19})^4}=1{,}52\cdot10^{-16}\ \text{s}.$$

b) $\alpha=\left(\frac{v}{c}\right)_{n=1}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\cong\frac{(1{,}6\cdot10^{-19})^2}{1{,}054\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}\cdot9\cdot10^9\cong\frac{1}{137}.$

c) Efectele relativiste aduc corecţii de ordinul $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, adică de ordinul (erorii relative) $\alpha^2=\left(\frac{1}{137}\right)^2\simeq5{,}328\cdot10^{-5}$.

42°. Reacţia nucleară corepunzătoare dezintegrării α a radonului este $^{222}_{86}\text{Rn}\rightarrow{}^{4}_{2}\text{He}+{}^{218}_{84}\text{Po}$. Energia ΔE, eliberată prin dezintegrare şi preluată atît de particula α, cît şi de nucleul de Po sub formă de energie cinetică, este $\Delta E=E_{c\alpha}+E_{c\text{Po}}=\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}+\frac{m_{\text{Po}}v_{\text{Po}}^2}{2}$. Ţinînd seama de această relaţie şi de legea conservării impulsului, $m_\alpha v_\alpha+m_{\text{Po}}v_{\text{Po}}=0$, obţinem:

$$\frac{E_{c_\alpha}}{\Delta E}=\frac{E_{c_\alpha}}{E_{c_\alpha}+E_{c\text{Po}}}=\frac{E_{c_\alpha}}{\left(\frac{m_\alpha}{m_{\text{Po}}}+1\right)E_{c_\alpha}}=\frac{m_{\text{Po}}}{m_\alpha+m_{\text{Po}}}\approx\frac{A_{\text{Po}}}{A_\alpha+A_{\text{Po}}}=\frac{218}{4+218}\cong0{,}98,$$

adică particula α preia 98% din energia eliberată în reacţie.

Scanned with OKEN Scanner

43°. În cazul nerelativist, legile de conservare ale energiei și impulsului, $\frac{m_{_1^3H} v_{_1^3H}^2}{2} + \frac{m_\alpha v_2^2}{2} = \Delta E$ și $m_{_1^3H} v_{_1^3H} + m_\alpha v_\alpha = 0$, conduc la:

$$E_{c_1^3H} = \frac{m_{_1^3H} v_{_1^3H}^2}{2} = \frac{m_\alpha}{m_{_1^3H} + m_\alpha} \Delta E \simeq \frac{A_\alpha}{A_{_1^3H} + A_\alpha} \Delta E \simeq \frac{4}{3+4} 4{,}8 \cong 2{,}74 \text{ MeV},$$

$$E_{c\alpha} = \Delta E - E_{_1^3H} = \frac{m_{_1^3H}}{m_{_1^3H} + m_\alpha} \Delta E = \frac{3}{3+4} 4{,}8 \cong 2{,}06 \text{ MeV}.$$

Se observă că $\frac{E_{_1H}}{E_\alpha} \simeq \frac{A_\alpha}{A_{_1^3H}} = \frac{4}{3}$.

44°. Legile de conservare ale energiei și impulsului sînt $\frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + E_{_1^2H} + \Delta E$ și $\vec{p}_{_1^2H} = \vec{p}_n + \vec{p}_\alpha$. Din figura F.C.53, se vede că legea de conservare a impulsului se poate scrie sub forma $p_\alpha^2 = p_{_1^2H}^2 + p_n^2$, deoarece $\vec{p}_n \perp \vec{p}_{_1^2H}$. Atunci

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_n} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \left(\Delta E + \frac{m_\alpha - m_{_1^2H}}{m_\alpha} E_{_1^2H} \right) = \frac{4}{1+4} \left(17{,}6 + \frac{4-2}{4} \cdot 2 \right) = 14{,}88 \text{ MeV}.$$

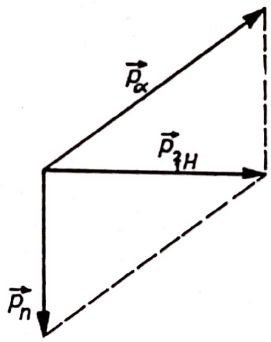


Fig. F.C.53

45°. Această reacție are loc cu absorbție de energie, adică suma maselor produselor de reacție trebuie să fie mai mare decît suma maselor nucleelor inițiale. Astfel, energia de prag trebuie să fie egală cu suma dintre energia absorbită ΔE și energia cinetică a centrului de masă al sistemului, $E_{prag} = \Delta E + \frac{MV^2}{2}$, unde $M = m_n + m_\alpha$, iar din teorema de conservare a impulsului, $MV = m_\alpha v_\alpha$, rezultă $V = \frac{m_\alpha}{M} v_\alpha$, deci $\Delta E = E_{prag} - \frac{MV^2}{2} = \frac{7}{9} E_{prag}$. Dar $E_\alpha = \Delta E + \frac{m_{_8^{17}O} v_{_8^{17}O}^2}{2}$ și $m_\alpha v_\alpha = m_{_8^{17}O} v_{_8^{17}O}$, de unde rezultă $E_\alpha = \frac{m_{_8^{17}O}}{m_{_8^{17}O} - m_\alpha} \Delta E \simeq \frac{17}{17-4} \Delta E = \frac{119}{117} E_{prag}$.

Deci energia particulei α trebuie să fie mai mare decît energia de prag cu $E_\alpha - E_{prag} = \left(\frac{119}{117} - 1 \right) E_{prag} = \frac{2}{117} \cdot 1{,}4 \simeq 24 \cdot 10^{-3}$ MeV $= 24$ keV.

Scanned with OKEN Scanner

CHIMIE

Scanned with OKEN Scanner

A. BREVIAR

Manualele de chimie după care se studiază în clasele IX—XII stau la baza programei pentru admitere în facultate şi conţin noţiuni de bază din domeniul chimiei anorganice, chimiei organice, chimiei fizice, precum şi unele noţiuni de tehnologie chimică.

Problematica este complexă, materialul este prezentat într-o succesiune care ţine seama şi se bazează pe cunoştinţele de chimie care au fost predate în clasele a VII-a şi a VIII-a, a căror cunoaştere este indispensabilă în înţelegerea noilor cunoştinţe.

Examenul de admitere în învăţământul superior are ca scop selectarea celor mai buni candidaţi, şi prin probele care se dau, testează nivelul de cunoştinţe şi modul de gîndire, capacitatea de a opera cu noţiunile însuşite.

De aceea, atragem atenţia, ca în perioada de pregătire, de recapitulare, să se acorde o atenţie deosebită următoarelor probleme:

1. Modul de a învăţa, acesta fiind determinant în pregătirea profesională.
2. Conţinutul programei de admitere.
3. Necesitatea corelării cunoştinţelor, a fenomenelor.

Luînd în consideraţie aceste trei puncte, vom insista în continuare asupra principalelor aspecte, făcînd totodată şi unele aprecieri generale asupra unor tipuri de subiecte, de probleme şi a rezolvării lor.

1. *Modul de învăţare.*

Această problemă prezintă o importanţă deosebită şi subliniem în primul rînd necesitatea însuşirii raţionale şi integrale a materialului prevăzut în programă.

Termenul de învăţare raţională este folosit în sensul înţelegerii cunoştinţelor predate şi reţinerii noţiunilor tratate în manuale şi nu a memorizării lor automate.

Pentru elementele chimice, substanţele anorganice sau organice, pentru interacţiile care pot avea loc între diferiţi compuşi, în anumite condiţii, cînd se pot produce reacţii chimice, ş.a., se folosesc anumite modalităţi de reprezentare grafică, abstracţii convenţionale la nivel internaţional, cu care operăm în mod curent în domeniul chimiei.

Se impune, în mod special, acordarea unei atenţii deosebite concordanţei dintre formă şi fond, simbolistica utilizată în chimie, la care ne-am referit, repre-

Scanned with OKEN Scanner

zentînd pe de o parte modalităţi de a reprezenta realităţi obiective, „*materia*“ (proprietăţile şi posibilităţile de transformare a acesteia), iar pe de altă parte, prin această simbolistică specifică „Chimiei“ candidatul evidenţiază în tratarea subiectelor la examene, bagajul de cunoştinţe acumulat şi nivelul de înţelegere a fenomenelor chimice studiate.

Problema formei în redarea cunoştinţelor de chimie la examenul scris nu elimină modul clar de exprimare, de scriere corectă şi descifrabilă (uneori greşeli de redare grafică, afectează fondul), de înlănţuire logică a ideilor în tratarea unui subiect teoretic, de ordonare a ecuaţiilor chimice, a calculelor, a prezentării rezultatului dacă ne referim la probleme cu calcule.

Subliniem, în mod special, atenţia ce trebuie acordată modului în care se operează cu abstracţiile în chimie (întreaga simbolistică utilizată) pentru a reda aspecte calitative, cantitative sau exprimări matematice a unor regularităţi.

Un aspect deosebit de important în procesul de învăţare a chimiei îl constitue însuşirea corectă a noţiunilor şi reflectarea gradului de cunoaştere prin modul de prezentare a cunoştinţelor dobîndite.

După parcurgerea întregului material prezentat în manuale, subliniem necesitatea de a reflecta (utilizînd toate cunoştinţele acumulate) asupra semnificaţiei simbolurilor elementelor, a formulelor moleculare, a ecuaţiilor chimice, a reacţiilor matematice pe baza cărora pentru o anumită transformare chimică, se pot calcula o serie de mărimi caracteristice procesului respectiv.

Pentru fixarea cunoştinţelor, etapă importantă a procesului de învăţare, să se facă apel la lucrările practice (multe fiind realizate în laboratorul şcolii) sau la aspectele experimentale descrise în manual, rezultatul activităţii practice fiind punctul de plecare a generalizărilor teoretice.

Corelarea cunoştinţelor teoretice cu aplicarea acestora la rezolvarea de probleme, să se facă după ce primele au fost însuşite temeinic. Rezolvarea automată a unor probleme, introducerea unor date numerice în relaţii matematice memorate (fără a li se fi înţeles semnificaţia), învăţarea mecanică de a rezolva tipuri de probleme, nu reprezintă decît o stocare de cunoştinţe pentru scurtă durată, consum de energie intelectuală fără randament, îndepărtarea de scopul deosebit de important — *de a învăţa cu plăcere* — şi a găsi satisfacţie în rezolvări corecte, prin manipularea bagajului de cunoştinţe teoretice acumulate şi aplicarea lor cu discernămînt în *n* cazuri diferite de cele rezolvate anterior.

Învăţarea, bazată inevitabil în fiecare etapă pe cunoştinţele anterioare, şi *recapitularea* trebuie să conducă în mod firesc la corelarea noţiunilor, fapt care asigură posibilitatea tratării unor subiecte de sinteză, a rezolvării problemelor care fac apel la cunoştinţe din capitole diferite, din ani diferiţi de studiu.

Pentru a exemplifica acest aspect al corelării cunoştinţelor, ne vom referi în cele ce urmează la elementul *clor*, care a fost prezentat în linii generale în clasa a VIII-a, din punct de vedere a poziţiei în sistemul periodic al elementelor, apoi obţinerea, reactivitatea, prezentarea succintă a cîtorva combinaţii chimice ale clorului.

$Z = 17$		— acidul halogenat corespunzător (HCl);
Cl	M 7	săruri ale acidului — cloruri — (NaCl);
	L 8	oxizi; acizi oxigenaţi; săruri ale unor acizi
$A = 35$	K 2	oxigenaţi.

În manualele din clasele a IX-a — XII-a se prezintă noi noţiuni, care definesc mai clar, cu explicaţii bazate pe experiment, conceptele de clor molecular (Cl_2), atomic ($Cl^{\cdot}$), ionic (Cl^- şi Cl^+).

Scanned with OKEN Scanner

a) Caracterul nemetalic al clorului, mai accentuat decît al bromului, este evidenţiat prin reacţia dintre clor molecular şi ioni de brom, reacţia putînd fi efectuată în laborator.

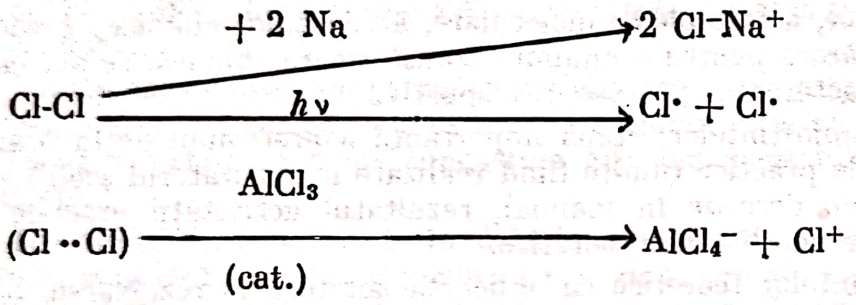
$$\overset{2\ e^-}{\overbrace{}}$$
$$Cl_2 + 2\ Br^- \rightarrow 2\ Cl^- + Br_2$$

De la o proprietate, un exemplu de proprietate chimică periodică, dovedită experimental, se trece la generalizarea:

Caracterul nemetalic scade în grupă de sus în jos. (În grupa a VII-a iodul are deci caracterul nemetalic cel mai slab).

b) Modul de scindare a moleculei de clor (Cl_2; Cl-Cl) în funcţie de condiţiile de lucru, problemă abordată în diferite capitole ale manualelor, evidenţiază posibilitatea formării de legături ionice sau covalente polare între clor şi atomi ai altor elemente.

La această generalizare, bazată de asemenea pe date experimentale, se ajunge în mod firesc după parcurgerea tuturor manualelor, aceasta dînd candidatului la admitere capacitatea de a trata subiecte de sinteză.



În primul caz se formează ioni Cl^- şi, respectiv, clorura de sodiu (legătura ionică); *în al doilea caz* se formează atomi de clor care pot reacţiona, de exemplu, cu un substrat organic (CH_4 sau alte hidrocarburi) cu eliminare de acid clorhidric — se formează o legătură covalentă polară prin punerea în comun a cîte unui electron de către cei doi atomi, clor şi carbon; *în al treilea caz*, prin interacţia cu catalizatorul ($AlCl_3$), se formează, în mediul de reacţie, ionul Cl^+, care reacţionează cu substratul organic formîndu-se de asemenea o legătură covalentă carbon-clor, de data aceasta dubletul de electroni necesar legăturii covalente fiind furnizat de substratul hidrocarbonat (reacţia *Friedel-Crafts*).

Reacţia dintre clor şi sodiu este exemplificată în cîteva rînduri în manuale, subliniindu-se modul de formare a ionilor, reacţie cu transfer de electroni, capacitatea celor doi ioni (Cl^- şi Na^+) de a forma un compus ionic.

Reacţia clorului atomic cu hidrocarburile alifatice sau aromatice cu catenă laterală — reacţie de *substituţie homolitică*, sau reacţia ionului Cl^+ cu hidrocarburile aromatice — *substituţia heterolitică electrofilă*, de asemenea sînt exemplificate în mai multe moduri; pot fi luate în consideraţie şi reacţiile de adiţie a clorului la legăturile multiple carbon-carbon, în anumite condiţii de lucru, care condiţionează mecanismul de reacţie.

Speciile Cl_2; Cl^-; $Cl^\cdot$; Cl^+; se întîlnesc într-o serie de reacţii principale sau secundare, vezi: electroliza NaCl, halogenarea directă a hidrocarburilor alifatice sau a celor aromatice, diferite procese redox.

c) Alte aspecte importante tratate în manuale şi în care este implicat elementul clor, se referă la explicarea complexităţii unor procese; sînt abordate unele reacţii cu aplicaţii industriale (ca, de exemplu, reacţia dintre clor şi hidrogen utilizată pentru obţinerea industrială a acidului clorhidric) prin prisma influenţei

Scanned with OKEN Scanner

condițiilor de lucru care determină mecanismul reacției, desfășurarea ei în timp, (aspectele cinetice), probleme privind echilibrul chimic.

d) Clorul fiind o substanță gazoasă prezentă în multe procese chimice, reamintim necesitatea corelării cunoștințelor generale cu problemele însușite la studierea legilor gazelor, legea lui Avogadro, ecuația de stare a gazelor perfecte ș.a. în vederea completării ansamblului de cunoștințe și a rezolvării unor probleme.

Candidatul la examenul de admitere poate găsi foarte multe exemple asemănătoare cu cel la care ne-am referit. De asemenea, recomandăm să se dea o atenție mai mare în etapa de fixare a cunoștințelor, problemelor de complexitate mai mare, cu grad apreciabil de abstractizare, sau aspectelor aparent diferite, care formează totuși un tot unitar caracterizînd un anumit proces chimic, precum și legăturii dintre metodele de obținere, de sinteză și proprietățile chimice ale unor elemente, ale unor compuși.

Se impune totodată realizarea în scris, în timpul învățării, a unor sistematizări proprii, în care formulele chimice și relațiile matematice să fie scrise clar, aceste conspecte reprezentînd rezultatul unui studiu individual sistematic și totodată un ghid în recapitularea cunoștințelor de bază.

2. *Conținutul programei de admitere.*

În cele ce urmează ne-am putea opri asupra unor probleme de conținut, cu scopul de a face unele recomandări, ținînd seama de ordinea în care sînt tratate acestea în clasele a IX-a — XII, sau s-ar putea face referiri pe domenii ale chimiei, respectiv chimie anorganică, chimie organică, chimie fizică. Deși această clasificare este utilă din punct de vedere didactic și, totodată, din punct de vedere a însușirii generalizărilor pe baza studierii anterioare a compușilor anorganici și organici sub aspectul structurii lor, a obținerii, a proprietăților fizico-chimice condiționate de structură, vom urmări totuși din aproape în aproape tematica manualelor referindu-ne doar la unele probleme de conținut însoțite de recomandări.

a) *Chimia pentru clasa a IX-a.*

— *Capitolul I. Structura învelișului electronic al atomului* prezintă o importanță deosebită. Este necesar să fie învățat cu multă atenție, cu sistemul periodic al elementelor în față, cu revederea cunoștințelor anterioare, în special la studiul noțiunii de valență și studiul proprietăților chimice.

Sugerăm să se revadă principalele substanțe chimice studiate anterior, formulele chimice ale acestora, semnificația lor în lumina noilor cunoștințe.

Și la acest capitol, ca și la cele ce vor urma, să se revadă cu atenție experiențele de laborator, acestea constituind argumentarea directă care condiționează înțelegerea și reținerea cunoștințelor.

— *Capitolul 2. Proprietăți ale substanțelor solide, lichide și gazoase, determinate de tipul de legătură.* Capitolul conține noțiuni teoretice și explicații care fac posibilă înțelegerea celor mai importante proprietăți fizice și chimice ale unor substanțe în special anorganice. Se corelează problemele privind legăturile chimice cu starea de agregare și unele proprietăți caracteristice.

Subcapitolul 2.4. — *Starea gazoasă* prezintă noțiuni care au fost tratate mai amplu la Fizică. Recomandăm revederea legilor gazelor, a legii lui Avogadro, ș.a., exprimate prin relațiile care sînt date în manual, și a căror semnificație este necesar să fie foarte clară, să fie înțeles sensul lor fizic.

Relațiile matematice, indicate în manual, sînt utilizate curent în rezolvarea unor probleme, în cazul în care se lucrează cu substanțe în stare gazoasă (reactanți

Scanned with OKEN Scanner

sau produși de reacție anorganici sau organici) și dau posibilitatea să se calculeze volumul unui gaz în anumite condiții, presiunea, temperatura, volumul molar, densitatea, fracția molară, presiunea parțială a unui gaz din amestec, volumul total al unui amestec de gaze, ș.a., mărimi a căror valoare prezintă importanță deosebită în practica chimică.

Recomandăm revederea noțiunilor cu foarte mult discernămînt, înțelegerea condiționării reciproce a parametrilor menționați, importanța lor cînd ne referim la anumite procese chimice în condiții bine determinate de laborator sau la nivel industrial.

— *Capitolul 3. Sisteme disperse* tratează probleme cu aspect de generalitate, care vizează interacții între substanțe de diverse tipuri insistîndu-se în special asupra soluțiilor, a fenomenului de dizolvare și a efectelor care se produc, corelate cu o proprietate fizică importantă a substanțelor chimice, *solubilitatea* și factorii care o influențează.

Dizolvarea substanțelor în diferiți solvenți conduce la *soluții* care, în mod firesc, conțin o anumită cantitate de substanță dizolvată într-o anumită cantitate de solvent — spunem deci că are o concentrație bine determinată —, iar importanța acesteia în practica chimică este foarte mare.

Un număr mare de reacții chimice se produc cînd se lucrează cu substanțe în soluție, fie că reacțiile respective se realizează în scop analitic sau în scop sintetic.

De aceea, cunoașterea factorilor care influențează solubilitatea, proprietățile soluțiilor, obținerea unor soluții de anumite concentrații, precum și determinarea concentrației necunoscute a unor soluții, sînt probleme cu implicații directe în practica de laborator și industrială și a căror efectuare corectă se bazează pe cunoașterea problemelor teoretice și aplicarea acestora cu rigurozitate în practică.

Dintre problemele tratate în acest capitol, insistăm asupra subcapitolului 3.6. — *Concentrația soluțiilor*, în care se subliniază posibilitățile de exprimare a concentrațiilor soluțiilor, respectiv *concentrație procentuală*, *concentrație molară sau molaritatea*, *concentrație normală* (normalitatea sau concentrație valară).

Recomandăm ca după însușirea acestor cunoștințe să se compare între ele diferitele moduri de exprimare a concentrației, pentru a rămîne cu o imagine clară referitoare la faptul că în toate cazurile o anumită masă de substanță luată în grame, dizolvată într-o anumită cantitate de solvent, formează o anumită cantitate de soluție, a cărei concentrație poate fi exprimată fie în procente fie în moli sau echivalenți la litru.

Din punct de vedere cantitativ între solvit și solvat există o anumită relație, iar această relație poate fi exprimată în diferite moduri, după cum se ia în considerație de exemplu: masa soluției exprimată în g(masă solvit + masă solvent), și masa de substanță (solvitul) exprimată în g, existentă în 100 g de soluție; sau pornind de la masa substanței dizolvate, se calculează numărul de moli care corespund acesteia, cantitatea de soluție în care se găsește numărul de moli la care ne-am referit fiind exprimată în litri, ș.a.m.d.

Pentru fiecare caz în parte este necesar să se încerce deducerea formulelor utilizate pentru calculul concentrației, care se bazează, de altfel, pe regula de trei simple, nefiind necesară memorarea lor.

Exprimarea concentrației pentru o anumită soluție în procente și trecerea de la aceasta la exprimarea în concentrație molară sau normală și invers, se cere frecvent în unele probleme; de asemenea, utilizarea unor soluții de concentrații diferite pentru obținerea unei soluții de o concentrație intermediară se utilizează adesea în practica de laborator; acestea sînt probleme cu care se confruntă în mod obișnuit candidații la examene.

— *Capitolele 4*, *5* și *6* abordează succint unele probleme generale ale reacțiilor chimice exemplificate la transformările chimice pe care le suferă unele substanțe

Scanned with OKEN Scanner

chimice anorganice studiate anterior, insistînd asupra efectelor termice, a echilibrului chimic și factorii care îl influențează, asupra desfășurării reacțiilor chimice în timp și a factorilor care influențează viteza de reacție. Se insistă de asemenea asupra acizilor și bazelor, asupra proceselor redox, a mecanismului și legilor electrolizei.

Problematica abordată permite rezolvarea unor probleme care implică calcule stoechiometrice, respectiv calcularea randamentului (η) unor reacții, exprimat procentual, calculul gradului de ionizare (α), calculul, de exemplu, a masei compușilor obținuți în baia de electroliză, a intensității curentului folosit, a volumului soluției inițiale supusă electrolizei ș.a., pe baza legilor electrolizei.

Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme *nu este posibilă fără cunoașterea fenomenelor chimice* care stau la bază și a celorlalte cunoștințe acumulate (concentrația soluțiilor, legile gazelor etc.).

Unele probleme tratate succint sau enunțate în manualul pentru clasa a IX-a sînt redate mai amplu în manualul pentru clasa a XI-a.

b) *Chimia pentru clasa a X-a.*

Manualul prezintă cele mai importante probleme ale chimiei organice, dînd o imagine de ansamblu asupra acestui domeniu important al chimiei. Compușii organici naturali au o răspîndire universală în organismele vii, joacă un rol important în procesele vieții și ca materii prime, iar compușii organici de sinteză, care nu își au corespondent în natură, realizați în laboratoare într-un număr impresionant, își găsesc cele mai diverse aplicații.

Capitolul I. Introducere în chimia organică conține noțiuni generale a căror însușire stă la baza înțelegerii raționale a problemelor care se tratează în continuare.

Vom insista puțin asupra noțiunilor de *formulă brută*, *formulă moleculară*, *formulă de structură* care prezintă o importanță deosebită ca instrumente de lucru — toate redau caracteristici ale unei specii moleculare organice *pure* dar fiecare evidențiază anumite particularități ale unei substanțe, formulele de structură fiind mult mai bogate în conținutul lor explicativ.

Rezultatele analizei chimice, stabilirea masei moleculare, determinarea unor proprietăți fizice și chimice dau posibilitatea stabilirii formulelor menționate, pentru o substanță organică oarecare.

Analiza chimică calitativă și cantitativă conduce la stabilirea *formulei brute*, care indică felul atomilor și raportul în care se găsesc aceștia în masa substanței.

Masa moleculară și rezultatele anterioare dau posibilitatea stabilirii *formulei moleculare*, care redă felul și numărul atomilor care constituie molecula.

Proprietățile fizico-chimice dau o imagine a modului în care sînt legați atomii în moleculă, tipurile de legături chimice covalente existente, deci succesiunea atomilor, modul de legare între ei și, eventual, influențele reciproce care se pot stabili între atomii legați sau nelegați direct; toate acestea conduc la formula de structură.

Cunoștințele privind hibridizarea atomului de carbon (clasa a IX-a) aplicate în cazul compușilor organici cu legături simple și multiple, completează aspecte importante ale structurii, dacă se face legătura între tipul de hibridizare și efectul steric al acesteia, cu alte cuvinte orientarea în spațiu bine determinată a legăturilor covalente, a atomilor care formează o anumită moleculă.

Studiul chimiei organice pornește inevitabil de la concepția argumentată experimental, că moleculele compușilor organici au o structură bine determinată, care poate fi stabilită și pe care o putem reprezenta sub aspectele ei cele mai generale prin formulele de structură.

Scanned with OKEN Scanner

Elevul, candidatul la admitere în învățământul superior, trebuie să aibă permanent în minte imaginea cît mai apropiată de realitate a simbolurilor pe care le utilizează.

Este o realitate faptul că moleculele compușilor organici au o structură spațială, dar nu întotdeauna folosim formule tridimensionale sau bidimensionale pentru a sugera particularitățile sterice, pe care le subînțelegem în mod convențional și atunci cînd lucrăm, în mod curent, cu formule de structură de proiecție, cu formule plane sau formule restrînse.

Chimia organică nu reprezintă doar o multitudine de formule pe care mulți se străduiesc să le reproducă și o multitudine de metode de sinteză și de proprietăți atribuite acestor compuși, pe care se străduiesc să le memorizeze.

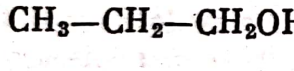
Pentru a exemplifica posibilitatea de a interpreta corect unele date, de a trece pe baza noțiunilor fundamentale însușite corect la abordarea unor probleme care nu au fost tratate în manual, dar cărora pe baza cunoștințelor generale, a corelării lor, li se poate da un răspuns corect, vom lua în considerație două formule moleculare:

$$A\ (C_3H_8O) \text{ și } B\ (C_3H_6O)$$

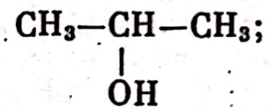
Acestor formule moleculare le pot corespunde anumite moduri de legare a atomilor constituenți, reprezentate prin formulele de structură corespunzătoare pornind de la valența elementelor formatoare și putînd deduce din formula moleculară faptul că în primul caz atomii de carbon prezintă numai hibridizare sp^3 (deci în moleculă sînt numai legături simple), iar în al doilea caz este posibilă și prezența atomilor de carbon cu hibridizare sp^2 (în moleculă poate exista eventual și o legătură dublă).

De la caz la caz, pot fi folosite formule de structură plane, restrînse sau tridimensionale (în funcție de solicitarea examinatorului).

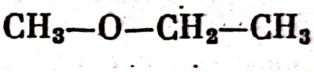
A (C_3H_8O)



1

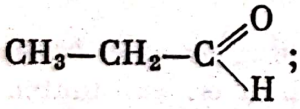


2

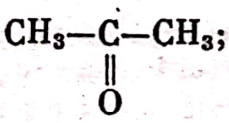


3

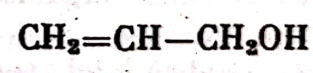
B (C_3H_6O)



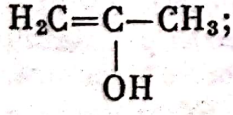
1



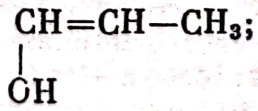
2



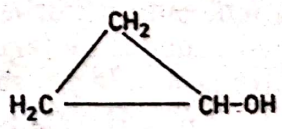
3



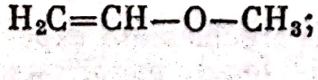
4



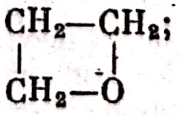
5



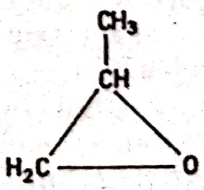
6



7



8

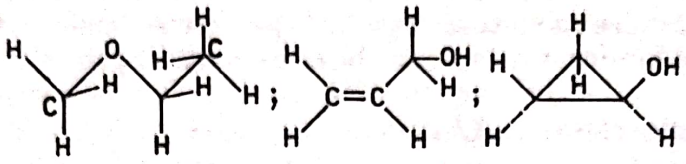


9

Scanned with OKEN Scanner

Menționăm că nu toate aceste posibilități de legare a atomilor conduc la structuri stabile (ex. B_4, B_5 ș.a.). De aceea pentru unele substanțe nu se cunosc toți izomerii teoretic posibili.

Dacă pentru unii dintre izomerii substanței A sau B s-ar cere să se indice orientarea atomilor în spațiu, de exemplu pentru: A_3; B_3; B_6



A_3 B_3 B_6

Considerăm că trecerea de la formula de structură plană la cea tridimensională este foarte simplă. Un asemenea subiect dat la examen ar fi considerat de unii candidați ca nefiind în programă. Este o concepție complet greșită și în mod intenționat am dat acest exemplu, pentru a sugera și a recomanda ca pe parcursul studiului să nu se treacă mai departe dacă nu s-au înțeles cunoștințele în înlănțuirea lor logică firească.

Cu exemplul dat am abordat și problema izomeriei, care reprezintă cheia înțelegerii diversității compușilor organici și a relațiilor dintre structură și proprietăți.

Dacă am lua în considerație din exemplul dat anterior doar compușii A_1 și A_2 care sînt izomeri de poziție și compușii B_1 și B_2 care sînt izomeri de funcțiune și am solicita candidatului să aducă pe baza proprietăților chimice argumente pentru formulele de structură ale izomerilor menționați, să indice metode de sinteză, modul în care ar putea reacționa aceștia cu anumiți compuși indicați, tipul de reacții pe care le pot da, mecanismul acestora ș.a. — de asemenea ar fi o problemă simplă pentru cel care a parcurs toată chimia organică; unele probleme sînt tratate în manual, unele răspunsuri ar trebui deduse. Răspunsul nu ar fi nimic altceva decît evidențierea modului de gîndire, de utilizare corectă a cunoștințelor însușite.

Manualul tratează hidrocarburile, apoi principalele clase de compuși organici cu funcțiuni simple — compuși halogenați, hidroxilici, amine, compuși carbonilici, compuși carboxilici, precum și derivații funcționali ai acizilor carboxilici. Toate subcapitolele prezintă importante probleme privind reprezentanții de bază ai acestor clase, posibilități de sinteză, proprietăți fizico-chimice, precum și exerciții și probleme; unele probleme, în mod firesc necesită și utilizarea cunoștințelor dobîndite în clasa a IX-a.

Însușirea temeinică a cunoștințelor de chimie organică necesită încă de la început, și aceasta este valabil pentru fiecare capitol, în special, în etapa de descifrare a cunoștințelor, scrierea corectă și cît mai detaliată a formulelor chimice, pentru a înțelege bine care sînt legăturile chimice implicate în transformarea unui compus (a unui substrat) cum se formează noile legături care condiționează structura produsului de reacție.

În capitolele 5 și 6 sînt prezentate succint unele clase de compuși naturali — amino-acizi, proteine, zaharide — precum și compuși macromoleculari.

Studiul acestor clase de substanțe evidențiază aplicarea cunoștințelor generale privind reactivitatea specifică a diverselor grupe funcționale, în cazurile tratate, reactivitatea grupelor — amino, carboxil, amidă, carbonil (aldehidic sau cetonic), alcool, eter — și, în mod deosebit, evidențiază interacțiile reciproce intramoleculare (caracterul de amfion al amino-acizilor, formele ciclice ale monozaharidelor ș.a.), care prezintă o importanță deosebită în înțelegerea particularităților acestor compuși precum și unele interacții intermoleculare (la celuloză, proteine etc.).

Scanned with OKEN Scanner

Complexitatea mai mare a formulelor de structură corespunzătoare compușilor naturali, a celor macromoleculari (naturali sau de sinteză) poate fi depășită și formulele pot fi reținute corect, cu ușurință, dacă așa cum am mai subliniat, se ține seama permanent de principiile de bază.

O vedere de ansamblu asupra noțiunilor cuprinse în manualul de clasa a X-a face posibilă înțelegerea relațiilor dintre diferite clase de compuși organici, rolul proprietăților chimice în sinteza organică, pe care se bazează de fapt industrializarea unor produse chimice, pentru care baza de materii prime este accesibilă.

c) *Chimia pentru clasa a XI-a.*

În manual sînt prezentate procesele redox cu implicații în diverse domenii ale chimiei, noțiuni de electrochimie, noțiuni privind energia chimică și energia termică, reacțiile chimice ca procese ce se petrec în timp, echilibrul chimic.

Recomandăm efectuarea sau revederea tuturor experiențelor indicate în manual pentru înțelegerea acestor aspecte, dintre care unele au fost doar enunțate sau prezentate succint în clasa a IX-a.

O serie de reacții chimice ale compușilor anorganici sau organici sînt reluate și abordate din alte puncte de vedere, care vin să completeze noțiunile de bază asimilate pînă în clasa a XI-a, referitoare la procesele chimice și să evidențieze complexitatea acestora.

În toate capitolele, tratarea pornește de la un anumit fenomen chimic ales astfel încît, prin desfășurarea lui, să se pună în evidență în mod direct diversele aspecte care caracterizează și condiționează fenomenul, ca de exemplu: *potențialul de oxido-reducere*, care determină sensul unor reacții chimice; *entalpia de reacție*, pe baza căreia se pot determina căldurile absorbite sau degajate în cursul reacțiilor; *entalpia liberă de reacție*, care determină sensul de evoluție spontană a sistemelor chimice; *energia de activare*, pe baza căreia se pot stabili condițiile de lucru în care procesul să se desfășoare în condiții optime etc.

În manual sînt abordate o serie de probleme care vizează procese ca, de exemplu, electroliza, legile și aplicațiile ei, unele procese chimice practicate la nivel industrial, care sînt condiționate în desfășurarea lor de unii parametri ce influențează viteza de reacție, starea de echilibru și deplasarea acestuia în sensul dorit. De asemenea, sînt prezentate noțiunile de bază referitoare la mecanismele de reacție, importanța cunoașterii acestora în diferite condiții de lucru pentru dirijarea procesului în condiții de maximă eficiență, rolul și importanța catalizatorilor precum și mecanismul de acțiune al acestora.

După parcurgerea întregului material prezentat în clasa a XI-a elevul se confruntă cu necesitatea de a face o legătură între noțiunile însușite, care reprezintă un tot unitar în caracterizarea unui proces chimic oarecare. În egală măsură trebuie să învețe astfel, încît să capete deprinderea de a calcula pe baza relațiilor matematice însușite (și al căror sens fizic a fost înțeles) valori numerice ale unor mărimi caracteristice sistemelor studiate.

Din rezultatele obținute de candidați la concursurile de admitere, desfășurate pe parcursul anilor, se desprinde un aspect general și anume, lipsa capacității multora de a aprecia orientativ ordinul de mărime al rezultatului numeric obținut — raportat la valorile inițiale utilizate, fapt care denotă un mod de aplicare mecanică a relațiilor și formulelor învățate.

a) *Chimia pentru clasa a XII-a.*

În capitolul 1 — *Structura compușilor organici* —, este abordată noțiunea de structură, punîndu-se accent pe aspectele electronice și sterice. Efectele inductiv și electromer dau posibilitatea înțelegerii reactivității compușilor organici și a meca-

Scanned with OKEN Scanner

nismelor de reacţie într-o mai mare măsură. Izomeria geometrică şi izomeria optică, ca tipuri de izomerie sterică, evidenţiază alte aspecte, de mai mare fineţe pe care le ridică structura unor compuşi organici. Este recomandabil ca pentru înţelegerea noţiunilor date să se utilizeze cu atenţie modelele moleculare, pentru a sesiza corect diferenţele structurale dintre izomerii *cis* şi *trans*, dintre enantiomeri, diastereoizomeri şi mezoforme. Studiul capitolului menţionat necesită multă atenţie şi revederea unor noţiuni ca, de exemplu, diferenţa de electronegativitate, caracteristicile legăturilor multiple, corelarea tipului de hibridizare a atomilor de carbon (în special) cu structura spaţială a compuşilor respectivi, ş.a.

În capitolul 2 — *Reactivitatea compuşilor organici* — pornind de la posibilităţile de scindare a legăturilor chimice întîlnite în compuşii organici, problemă care necesită corelarea cu sensul deplasării norului electronilor de valenţă sub influenţa efectelor inductiv, electromer şi sub influenţa factorilor externi, se exemplifică reactivitatea compuşilor organici prin tipurile de reacţii: *substituţie*, *adiţie*, *eliminare* şi *reacţii care decurg cu transpoziţie*. Pentru fiecare se evidenţiază posibilitatea ca din punct de vedere al mecanismului electronic, condiţionat de modul de scindare a legăturilor chimice, să se deosebească reacţii heterolitice — nucleofile sau electrofile — şi homolitice (radicalice). O serie de reacţii chimice studiate în clasa a X-a pot fi revăzute prin prisma noilor noţiuni, fapt care, dealtfel, este amplu evidenţiat în capitolul 5, în care sînt tratate unele reacţii chimice ale compuşilor organici, cu aplicaţii tehnologice.

În manualul pentru clasa a XII-a se completează şi se aprofundează noţiunile de chimie organică din clasa a X-a şi, totodată, se dă şi o imagine succintă asupra problemelor complexe pe care le ridică transpunerea unor procese chimice la nivel industrial. Acestea pot fi înţelese într-un alt mod după însuşirea cunoştinţelor din clasa a XI-a, care dau o imagine mai clară asupra complexităţii proceselor chimice.

Calculul conversiei utile, a conversiei totale, a randamentului, ş.a. se bazează pe folosirea unor noţiuni anterioare; este bine să se deducă relaţiile indicate pentru calcul şi să se gîndească asupra semnificaţiei lor.

Tratarea capitolului scheme de chimizare a unor materii prime naturale sugerează multiple posibilităţi de transformare chimică, importante din punct de vedere industrial, şi recomandăm ca pentru toate căile de chimizare indicate, acolo unde este posibil (ţinînd seama de cunoştinţele existente în manual), să se folosească (sub formă de exerciţii individuale) formule chimice, ecuaţii chimice.

În afara celor menţionate, recomandăm rezolvarea cu atenţie a tuturor întrebărilor, exerciţiilor şi problemelor existente în manuale, indiferent dacă acestea sînt incluse în textul general al lecţiilor sau la sfîrşitul capitolelor.

Confruntarea programei pentru admitere cu manualul, nu trebuie să se facă mecanic, deoarece cunoştinţele se condiţionează reciproc, iar acolo unde este cazul, trebuie să se revadă unele chestiuni din capitolele existente în manuale dar care nu sînt prevăzute în programă, *dacă acele noţiuni pot fi utile înţelegerii* sau *aprofundării* unor cunoştinţe inserate în alte capitole (desigur, aprecierea rămîne la latitudinea candidatului, care trebuie să fie conştient de nivelul pregătirii sale).

3. *Necesitatea corelării cunoştinţelor, a fenomenelor.*

Acest aspect a fost abordat anterior în mod tangenţial dar în cele ce urmează ne vom referi, în special, la unele tipuri de subiecte, dintre acestea marea lor majoritate necesitînd pentru o tratare corectă şi completă, corelarea cunoştinţelor şi înţelegerea fenomenelor chimice sub multiplele lor aspecte.

Scanned with OKEN Scanner

Programa de admitere permite formularea unui mare număr de subiecte pentru diversele profile cărora se adresează, acestea putînd fi structurate astfel încît să se verifice cunoştinţele dobîndite şi gradul în care au fost înţelese şi reţinute.

De obicei fiecare probă reprezintă de fapt un set de subiecte (conţine mai multe puncte), iar pentru acestea menţionăm următoarele posibilităţi.

a) Subiectul poate fi formulat astfel încît, să corespundă unui titlu care are o anumită pondere în manual. În acest caz tratarea subiectului necesită uneori redarea în scris a noţiunilor tratate la titlul sau subtitlul din manualul respectiv, sau necesită unele completări, noţiuni care fac parte din acelaşi subiect fiind tratate într-un alt manual care a fost studiat în timpul liceului.

b) Subiectul poate avea o formulare care ea însăşi evidenţiază faptul că este un subiect de sinteză (bineînţeles formularea nu corespunde vreunui titlu din manuale), ca de exemplu: „Reacţii de adiţie ale compuşilor organici", „Reacţii de reducere ale compuşilor organici", „Tipuri de legături chimice şi posibilităţi de scindare a acestora în procesele chimice", „Reacţii mai importante ale unor compuşi anorganici care stau la baza proceselor industriale cunoscute" etc.; se poate formula un număr foarte mare de subiecte de sinteză.

Subiectele de sinteză pot fi de o complexitate mai mare sau mai mică, tratarea lor necesitînd o bună sistematizare, ordine de prezentare şi, bineînţeles, să cuprindă toate problemele care au fost studiate şi fac parte din subiect, indiferent dacă acestea au fost prezentate într-un anumit an de studiu sau în ani diferiţi. Cele menţionate subliniază clar necesitatea corelării cunoştinţelor.

c) Subiectul poate fi un exerciţiu care are ca scop, de exemplu, testarea cunoştinţelor în domeniul sintezei şi a proprietăţilor unor compuşi chimici, solicitînd candidatul să treacă de la o clasă de compuşi la alta, trebuind totodată să precizeze unele materii prime de la care se poate porni pentru a se obţine anumiţi compuşi care sînt indicaţi, sau invers, să precizeze care sînt produşii de reacţie dacă se porneşte de la anumiţi reactanţi. Desigur, exemplele care se cer au fost studiate, fac parte din programă dar o astfel de formulare testează capacitatea candidatului de a utiliza cunoştinţele.

d) Subiectul poate fi formulat tip schemă de reacţii, mai simplă sau mai complexă în care se indică produsul iniţial care în anumite condiţii de lucru (acestea fiind precizate) conduce în urma transformărilor chimice suferite, la un număr mai mare sau mai mic de compuşi chimici a căror structură trebuie să fie dedusă de la etapă la etapă. Schema poate indica structura unor compuşi, care se obţin în diferite etape, şi solicită stabilirea structurii compusului iniţial, a unor compuşi intermediari ş.a. Uneori se pot indica pentru unii compuşi formulele moleculare, în alte cazuri indicîndu-se formula de structură a compuşilor care se obţin, se cere să se precizeze reactivii necesari etc. Astfel de scheme de reacţii pot fi de o mare diversitate.

e) Subiectul poate fi formulat tip problemă, care necesită calcule numerice. Problemele, ca şi celelalte tipuri de subiecte menţionate pot fi diferite, cu grad de complexitate variabil, de obicei gradul de complexitate al subiectelor de celălalt tip (denumite teoretice) şi al problemelor se echilibrează în proba dată la examen astfel încît prin setul de subiecte să se poată trece prin programa tuturor anilor de studiu. Rezolvarea problemelor cu calcule numerice, în funcţie de conţinutul enunţului, poate solicita candidatul în mod diferenţiat. În marea majoritate a cazurilor (cu excepţia, în special, a problemelor de la subcapitolul — *Soluţii*) pentru a fi corect rezolvate, trebuie să fie cunoscută reacţia, sau reacţiile chimice, la care se referă enunţul.

Problemele cu un grad relativ sau mai mare de dificultate necesită o foarte bună corelare a cunoştinţelor teoretice, o cunoaştere a relaţiilor matematice nece-

Scanned with OKEN Scanner

sare calculării valorii unor mărimi solicitate de problemă, o prezentare logică a etapelor rezolvării.

Desigur, de la profil la profil subiectele din setul probei de examen se asamblează în concordanţă cu programa şi cu cerinţele concursului de admitere.

Din cele menţionate apare clar faptul că elevul, viitorul candidat la exəmenul de admitere în învăţămîntul superior trebuie să ştie să înveţe, să cunoască toată materia prevăzută de programă, să fie capabil să utilizeze cunoştinţele, şi nu doar să le reproducă compartimentat, să poată reda clar prin scris ceea ce ştie pentru a se putea aprecia corect ceea ce ştie.

Frumuseţea acestei ştiinţe, „Chimia", la care ne-əm referit, care poate fi înţeleasă cu mintea şi dorinţa proprie de a cunoaşte, uimeşte prin ceea ce oferă. Face posibilă cunoaşterea unei lumi fascinante — a atomilor, moleculelor, ionilor — cu o dinamică extraordinară şi specifică.

Generaţii de pasionaţi s-au străduit de-a lungul deceniilor să o cunoască din ce în ce mai profund, să-i enunţe legile, să pătrundă cît mai adînc în complexitatea fenomenelor chimice pe care să le stăpînească, să le modeleze şi să le pună cinstit în slujba omului.

Mai subliniem în acest context doar faptul că datoria fiecăruia este să înţeleagă că ştie încă foarte puţin şi că trebuie să lupte pentru a şti cît mai mult.

Scanned with OKEN Scanner

B. PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

ENUNȚURI
1980

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE-FIZICĂ

I.1°. Constantă de aciditate.

2°. O substanță cu formula A_2B_4 disociază termic conform reacției de echilibru:

$$A_2B_{4(g)} \rightleftarrows 2\ AB_{2(g)}$$

Considerînd că temperatura rămîne neschimbată și inițial s-a luat în reacție 1 mol de substanță A_2B_4 iar la echilibru sistemul se află la presiunea totală P, se cere: a) să se scrie expresiile presiunilor parțiale și cele ale constantei de echilibru, în funcție de presiunea totală P și gradul de disociere α; b) să se calculeze în care sens se va deplasa echilibrul dacă sistemul aflat inițial la presiunea P este trecut la presiunea 0,5 P; c) să se demonstreze în ce sens se va deplasa echilibrul dacă sistemul, ocupînd inițial un volum V, este comprimat la jumătate; d) pentru sistemul ocupînd volumul V și presiunea P, să se stabilească relația dintre K_p și K_c.

3°. Metode de preparare a alcoolilor și fenolilor.

4°. O substanță organică A conține 69,8% C și 11,6% H și are masa moleculară egală cu 86. Prin tratarea substanței A cu iodură de metilmagneziu se formează un compus B, care supus hidrolizei, conduce la un alcool C. Acesta prin deshidratare, dă naștere compusului D, din care prin oxidare se obțin două substanțe, dintre care una este acetona. Se cere: a) formula moleculară și de structură a compusului A; b) ecuațiile reacțiilor prin care se obțin compușii B, C, D; c) ce cantitate de substanță A este necesară pentru obținerea unui kg de alcool C, considerînd că reacțiile decurg cu randament de 100%.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Stabiliți tipurile de legături care se realizează în următoarele substanțe: H_2O; NH_4Cl; $CaCO_3$; $(CH_3)_4NI$; CH_3COONa; C_6H_5OH.

II.1°. Legătura ionică.

2°. Două volume de hidrogen sulfurat gazos, măsurate la 1 atm și 0°C se dizolvă într-un volum de apă, de densitate 1 g/cm³.

Se cere: a) concentrația procentuală a soluției obținute; b) cantitatea de soluție 10% hidroxid de sodiu care neutralizează pînă la sare acidă un litru din soluția de hidrogen sulfurat ($H_2S + NaOH = NaHS + H_2O$).

Notă: Se consideră că volumul de lichid rămîne constant.

Mase atomice: S—32; H—1; Na—23; O—16.

3°. Metode de preparare a compușilor hidroxilici organici.

4°. Prin deshidratarea a 25 cm³ de etanol (densitate 0,8 g/cm³) rezultă un compus gazos A, care se trece prin apă de brom, conducînd la o substanță B. Se

Scanned with OKEN Scanner

cere: a) ecuaţiile reacţiilor chimice; b) volumul de gaz A, rezultat prin deshidratarea etanolului (la 0°C şi 1 atm); c) cantitatea de substanţă B, rezultată.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16; Br—80.

III.1°. Electroliza. Electroliza soluţiilor apoase de săruri.

2°. Să se indice ecuaţiile reacţiilor chimice şi denumirile compuşilor care se obţin în urma reacţiilor dintre: a) sulfură feroasă şi acid clorhidric; b) zinc şi sulf; c) azot şi oxigen; d) aluminiu şi oxigen; e) azotat de argint şi acid clorhidric; f) clorură de amoniu şi hidroxid de sodiu.

3°. Metode de preparare şi proprietăţile chimice ale aminelor.

4°. Cîte grame de tetraclorură de carbon se obţin din 100 g metan şi ce volum de acid clorhidric se formează în condiţii normale, ştiind că reacţia decurge cu un randament de 70%.

β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

IV.1°. Electroliza. Electroliza soluţiilor apoase.

2°. Dacă se încălzesc 10 kg piatră de var ($CaCO_3$) de 80% puritate, aceasta se transformă în oxid de calciu şi dioxid de carbon.

Se cere: a) ecuaţia reacţiei chimice care are loc; b) cantitatea de oxid de calciu (kg) formată; c) volumul de dioxid de carbon care se degajă (în condiţii normale).

Mase atomice: Ca—40; C—12; O—16.

3°. Metode de preparare a acizilor carboxilici.

4°. Utilizînd acetaldehida ca materie primă, se obtine în urma unor transformări chimice butanol-1. Se cere: a) ecuaţiile reacţiilor chimice necesare transformării acetaldehidei în butanol-1; b) volumul de hidrogen (la 0°C şi 1 atm) ce reacţionează cu unul din compuşii intermediari dacă s-au obţinut 370 kg butanol-1 considerînd că reacţiile decurg cantitativ; c) izomerii butanolului-1 şi denumirile lor.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

5°. Calculaţi solubilitatea bromurii de argint în moli/l, ştiind că produsul de solubilitate al bromurii de argint este $7{,}7 \cdot 10^{-13}$.

γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

V.1°. Metode de preparare a aminelor.

2°. Proprietăţi chimice ale acizilor carboxilici.

3°. Să se calculeze cantitatea de carbon conţinută în 7,5 g naftalină.

Mase atomice: C—12; H—1.

4°. Ştiind că prin oxidarea unei alchene se obţine acid acetic şi acid propionic, să se indice formula de structură a alchenei şi ecuaţia reacţiei.

2. ÎNVĂŢĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ŞI UNIVERSITAR (biologie)

VI.1°. Clasificarea reacţiilor compuşilor organici în funcţie de mecanismul de reacţie. Să se dea exemple de reacţii care decurg prin substituţie radicalică.

2°. Tipuri de amine şi metodele lor de preparare.

3°. Utilizînd propanul, naftalina şi acidul malonic, ca materii prime, precum şi alţi reactanţi necesari, să se indice metodele de obţinere a următorilor compuşi: nitropropan, 1-naftilamină şi acid acetic.

Scanned with OKEN Scanner

4°. O cantitate de 117 g substanţă *A*, se tratează cu amestec sulfonitric obţinîndu-se substanţa *B*, care supusă reducerii cu fier şi acid clorhidric conduce la substanţa *C* (C_6H_7N). Se cere: a) să se scrie ecuaţiile reacţiilor chimice care au loc şi să se indice denumirile produşilor: *A*, *B*, *C*; b) să se calculeze cantităţile de substanţe *B* şi *C*, rezultate din reacţie în moli, considerînd că reacţiile menţionate decurg cu un randament de 80%.

Mase atomice: C—12; H—1; N—14; O—16.

VII.1°. Prepararea şi proprietăţile nitroderivaţilor; exemplificarea mecanismului de reacţie în cazul nitrării toluenului.

2°. Oxidarea alcanilor, alchenelor şi alchilbenzenilor.

3°. Indicaţi metodele de preparare cunoscute pentru obţinerea butadienei, acidului acetic, metanolului şi acrilonitrilului.

4°. Utilizînd ca materie primă 100 kg de benzen de puritate 90%, se poate ajunge în final la benzoat de etil. Se cere: a) să se scrie ecuaţiile reacţiilor chimice care au loc; b) să se calculeze compoziţia, în procente de masă, pentru acidul benzoic, care se obţine în cursul transformărilor chimice; c) cantitatea de benzoat de etil obţinută, ştiind că randamentul global al reacţiilor este de 80%.

Mase atomice: C—12; H—1; O—16.

VIII.1°. Procesul de dizolvare. Solvatarea.

2°. Căldură de reacţie. Reacţii exoterme şi reacţii endoterme.

3°. Luînd în consideraţie reacţiile care pot avea loc între fluor şi următoarele elemente: Li; Be; B; C; N; O; se cere: a) ecuaţiile reacţiilor chimice; b) formulele de structură şi denumirile compuşilor care se formează; c) care dintre substanţele obţinute sînt ionice şi care sînt covalente.

4°. Care este concentraţia maximă de dioxid de sulf, exprimată în procente de volum, rezultată la arderea sulfului (în exces) într-o cameră închisă cu volumul de 10 m^3?

Notă. Se consideră că aerul conţine 20% vol. oxigen.

Mase atomice: S—32; O—16.

Numere atomice: Li-3; Be-4; B-5; C-6; N-7; O-8; F-9.

ENUNŢURI
1981

1. ÎNVĂŢĂMÎNTUL TEHNIC ŞI UNIVERSITAR

a. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE-FIZICĂ

IX.1°. Influenţa temperaturii asupra vitezei de reacţie. Influenţa temperaturii asupra echilibrului chimic.

2°. Gradul de ionizare al acidului cianhidric într-o soluţie apoasă de concentraţie 0,2 *M*, la 25°C, este de $1,4 \cdot 10^{-2}$%.

Să se calculeze: a) constanta de ionizare a acidului cianhidric la această temperatură; b) concentraţia ionilor H_3O^+ din această soluţie; c) ce volum de apă trebuie să se adauge unui litru de soluţie de acid cianhidric 0,2 *M* pentru ca gradul de ionizare să se dubleze.

3°. Mecanismul halogenării metanului şi toluenului.

4°. Un compus organic conţine 38,4% carbon, 56,8% clor şi restul hidrogen. Ştiind că masa moleculară a acestui compus este 125, se cere: a) să se stabilească formula moleculară; b) să se scrie formulele de structură ale izomerilor care cores-

Scanned with OKEN Scanner

pund formulei moleculare găsite; c) să se arate care dintre acești izomeri conțin atomi de carbon asimetrici; d) indicați produșii reacției de hidroliză pentru toți izomerii de mai sus.

Mase atomice: H — 1; C — 12; Cl — 35,5.

5°. Într-o soluție de azotat de argint de concentrație 1 M, se cufundă o sîrmă de aluminiu de masă 27 g. După ce tot argintul a fost depus, sîrma cîntărește 29,97 g. Se cere: a) masa aluminiului dizolvat; b) masa argintului depus; c) volumul soluției de azotat de argint de concentrație 1 *M* utilizat; d) concentrația molară a soluției finale.

Mase atomice: Al — 27; Ag — 108.

X.1°. Acizi. Hidracizi și oxiacizi. Constantă de aciditate.

2°. Proprietățile chimice ale compușilor carbonilici.

3°. Prin deshidratarea a 40 cm^3 alcool izopropilic de densitate 0,85 g/cm^3 rezultă un compus gazos *A*, care tratat cu acid clorhidric conduce la o substanță *B*. Se cere: a) ecuațiile reacțiilor chimice; b) volumul de gaz *A* (la 0°C și la 1 atm) rezultat la deshidratarea alcoolului izopropilic; c) formula de structură și cantitatea (în g) a compusului *B*. Se consideră că reacțiile chimice decurg cantitativ; d) știind că atît compusul *A* cît și compusul *B* pot reacționa cu benzenul, să se scrie ecuațiile chimice ale reacțiilor care au loc.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Cl — 35,5.

4°. Să se stabilească coeficienții următoarelor reacții:

a) $K_2Cr_2O_7 + FeSO_4 + H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + Cr_2(SO_4)_3 + Fe_2(SO_4)_3 + H_2O$

b) $Cl_2 + NaOH \rightarrow NaClO_3 + NaCl + H_2O$.

În cazul reacției b) să se calculeze volumul de clor (măsurat în condiții normale) necesar pentru a obține un kg de clorat de sodiu.

Mase atomice: H — 1; O — 16; Na — 23; Cl — 35,5.

XI.1°. Variația caracterului electropozitiv și electronegativ al elementelor în sistemul periodic.

2°. 15 g amalgam de sodiu reacționează cu apă și soluția alcalină obținută se neutralizează cu 15 g soluție de acid sulfuric de concentrație 9,8%, în condițiile formării sulfatului neutru de sodiu. Se cere: a) conținutul procentual de sodiu din amalgam; b) cantitatea de sulfat neutru de sodiu (în g) ce se formează.

Mase atomice: H — 1; O — 16; Na — 23; S — 32.

3°. Hidrocarburi aromatice. Obținere și proprietăți chimice.

4°. Se decarboxilează acidul benzoic, rezultînd 39 g benzen și dioxid de carbon. Se cere: a) cantitatea de acid benzoic (în g) supusă decarboxilării dacă randamentul acestei reacții este de 90%; b) ce volum de dioxid de carbon (măsurat în condiții normale) se obține.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

XII.1°. Electroliza. Aplicații ale electrolizei în tehnologia chimică.

2°. O cantitate de 1 g carbonat de calciu pur este supus descompunerii termice. După o oră de încălzire rămîne un reziduu de 0,7 g. Se cere: a) volumul de dioxid de carbon degajat (măsurat în condiții normale); b) randamentul descompunerii termice; c) compoziția procentuală a elementelor existente în reziduu.

Mase atomice: C — 12; O — 16; Ca — 40.

3°. Aminoacizi. Preparări și proprietăți.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Să se indice esterii izomeri posibili corespunzînd formulei moleculare $C_4H_8O_2$. Să se calculeze: a) volumul gazelor rezultate în urma arderii totale a unui mol de ester cu formula moleculară $C_4H_8O_2$ cu un volum de aer dublu decît cel teoretic necesar arderii, după condensarea totală a apei formate; b) masa apei formate la arderea a 1 mol ester $C_4H_8O_2$. Toate volumele de gaze se consideră în condiţii normale, iar aerul conţine 20% în volume oxigen.

Mase atomice: H — 1; O — 16.

5°. A. Să se calculeze *p*H-ul soluţiilor rezultate în urma amestecării următoarelor soluţii: a) 10 ml soluţie acid clorhidric 0,1 *M* cu 5 ml soluţie de hidroxid de potasiu 0,2 *M*; b) 20 ml soluţie acid clorhidric 0,3 *M* cu 20 ml soluţie de hidroxid de potasiu 0,1 *M*.

B. Să se calculeze concentraţia ionilor de hidrogen dintr-o soluţie 0,02 *M* de amoniac, cunoscînd constanta de bazicitate a amoniacului $K_b = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$.

γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ.

XIII.1°. Proprietăţi chimice comune aldehidelor şi cetonelor.

2°. Hidrocarburi aromatice cu inele condensate.

3°. Indicaţi reacţiile care au loc între izopropilamină şi bromură de etil în exces.

4°. Prin tratarea cu apă a 20 kg de carbură de calciu tehnică (carbid) s-au obţinut 4 480 l acetilenă (măsuraţi în condiţii normale). Să se indice: a) puritatea carburii de calciu; b) ce volum de metan (măsurat în condiţii normale) poate conduce prin piroliză la acelaşi volum de acetilenă, dacă randamentul pirolizei este de 60%.

Mase atomice: H — 1; C — 12; Ca — 40.

2. ÎNVĂŢĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ŞI UNIVERSITAR (biologie)

XIV.1°. Reacţii de adiţie ale compuşilor organici ce conţin legături duble şi triple carbon-carbon.

2°. Monozaharide. Structură şi proprietăţi.

3°. Indicaţi reacţiile necesare pentru a obţine acidul p-acetil-aminobenzoic şi, în final, acidul 4-amino-3,5-dinitrobenzoic, utilizînd ca materie primă toluenul. Arătaţi mecanismul reacţiei de nitrare.

4°. O substanţă organică are compoziţia procentuală 85,7% carbon şi 14,3% hidrogen, masa moleculară fiind 56. Se cere: a) să se determine formula moleculară; b) să se indice formulele de structură ale izomerilor posibili; c) să se precizeze tipul acestor izomeri.

Mase atomice: H — 1; C — 12.

XV.1°. Metode de obţinere şi proprietăţile chimice ale fenolilor.

2°. Reacţii de hidrogenare şi reducere catalitică ale compuşilor organici.

3°. Utilizînd ca materii prime benzenul şi alţi reactivi necesari, să se indice: a) ecuaţiile reacţiilor chimice prin care se pot sintetiza următoarele substanţe: 1. acetofenona (metil-fenil-cetona); 2. orto- şi para-nitrotoluen; 3. acetanilida (acetilanilina); b) mecanismul reacţiei de obţinere a orto- şi para-nitrotoluenului.

4°. Supunînd oxidării 1 kg naftalină, rezultă un compus cu formula moleculară $C_8H_4O_3$. Se cere: a) să se indice ecuaţiile reacţiilor ce au loc, formula de structură şi denumirea substanţei obţinute; b) cantitatea (în g şi moli) de compus

Scanned with OKEN Scanner

$C_8H_4O_3$ ce se obține; c) volumul de aer teoretic necesar pentru oxidarea a 1 kg naftalină știind că aerul conține 20% în volume oxigen.

Volumul măsurat la 0°C și 1 atm.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

XVI.1°. Mecanismul procesului de dizolvare a substanțelor solide într-un solvent lichid. Solvatare.

2°. Influența temperaturii asupra vitezei de reacție.

3°. La arderea completă a unui amestec de carbon și sulf rezultă 88 g dioxid de carbon și 56 l dioxid de sulf. Se cere: a) compoziția în procente de masă a amestecului inițial de carbon și sulf; b) volumul de aer (cu 20% în volume oxigen) teoretic necesar arderii complete a amestecului de carbon și sulf; c) compoziția în procente de volum a amestecului de gaze rezultat la ardere.

Toate volumele de gaze se consideră măsurate la 0°C și 1 atm.

Mase atomice: O — 16; C — 12; S — 32.

4°. Clasificați următoarele săruri:

K_2SO_4; $NaNO_3$; Na_2CO_3; K_2S; NH_4Cl; $Al_2(SO_4)_3$; $FeSO_4$;

în funcție de caracterul acido-bazic pe care îl conferă soluțiilor lor apoase. Explicați comportarea acestor săruri în soluții apoase.

ENUNȚURI
1982

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE-FIZICĂ

XVII.1°. Teoria protolitică a acizilor și bazelor.

2°. O cantitate de 5 g $KClO_3$ de 90% puritate (impuritățile nu se descompun termic) este descompusă termic, parțial, la KCl și O_2. Reziduul rămas la calcinare cîntărește 3,5 g. Să se calculeze: a) volumul de oxigen măsurat în condiții normale, care s-a degajat la calcinare; b) randamentul reacției de calcinare; c) compoziția, în procente de masă, a reziduului format din KCl, $KClO_3$ nedescompus și impurități.

Mase atomice: O — 16; Cl — 35,5; K — 39.

3°. Raportul între conținutul în carbon (exprimat în procente de masă) al unui alcool monohidroxilic saturat și al alchenei corespunzătoare este 0,700. Se cere: a) să se stabilească formulele moleculare ale alcoolului și alchenei; b) să se scrie structurile tuturor izomerilor posibili corespunzînd formulelor moleculare ale alcoolului și, respectiv alchenei; c) să se calculeze cantitatea de apă de brom (exprimată în g) de concentrație 1% (procente masă) ce poate reacționa cu 0,1 moli alchenă.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Br — 80.

4°. Mecanismul hidrolizei acide a esterilor.

5°. Scrieți ecuațiile a cîte două reacții care să ilustreze: a) caracterul oxidant al acidului azotic; b) caracterul reducător al aldehidelor.

XVIII.1°. Acidul fosforic și sărurile lui.

2°. Se dă un amestec de CO și H_2 cu masa 66 g. Amestecul este ars cu aer pînă la CO_2 și H_2O. Gazele rezultate la ardere sînt trecute printr-o soluție de $Ca(OH)_2$

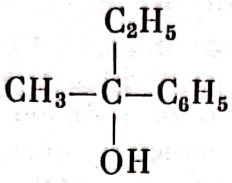
Scanned with OKEN Scanner

obținîndu-se 150 g $CaCO_3$. Se cere: a) compoziția amestecului inițial (procente de masă); b) consumul de aer (cu 20% în volume O_2) exprimat în l, teoretic necesar arderii complete a amestecului; c) cantitatea (în g) de apă formată la ardere.

Toate volumele sînt măsurate în condiții normale.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Ca — 40.

3°. Indicați toate posibilitățile pentru sinteza alcoolului:



pornind de la o cetonă și un compus organomagnezian.

4°. Mecanismul reacției de sulfonare a hidrocarburilor aromatice.

5°. Indicați care dintre speciile menționate mai jos au caracter acid și care au caracter bazic în soluție apoasă:

$$NH_4^+;\ NH_3;\ CH_3COO^-;\ HCOOH;\ H_2O.$$

XIX.1°. Zincul. Obținere și proprietăți chimice.

2°. O soluție 0,02 molară de bază slabă în apă are $pH = 10$. Să se calculeze: a) concentrația ionilor HO^- din soluția bazei slabe; b) constanta de bazicitate a bazei slabe.

3°. Se oxidează acidul 2-hidroxipropionic (acid lactic) levogir la cetoacidul corespunzător și apoi se reduce cetoacidul din nou la acid 2-hidroxipropionic. Să se arate dacă se obține acid lactic dextrogir, levogir sau racemic. Justificați răspunsul dat.

4°. Se oxidează 1 000 kg ortoxilen rezultînd 1 000 kg anhidridă ftalică. Se cere: a) randamentul reacției; b) volumul de aer, măsurat în condiții normale (cu 20% în volume O_2) teoretic necesar oxidării; c) masa de apă (exprimată în kg) rezultată în urma oxidării.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

XX.1°. Teoria protolitică a acizilor. Acizi slabi. Constantă de aciditate.

2°. La descompunerea termică a unui amestec format din $CaCO_3$ și $KClO_3$ au rezultat 92 g amestec de $CO_{2(g)}$ și $O_{2(g)}$ care ocupă un volum de 56 l măsurați în condiții normale de presiune și temperatură. Se cere: a) compoziția (în procente de masă) a amestecului de gaze; b) compoziția (în procente de volum) a amestecului de gaze; c) raportul între numărul de moli de $CaCO_3$ și $KClO_3$ în amestecul inițial, știind că la descompunere rezultă un reziduu conținînd numai KCl și CaO.

Mase atomice: C — 12; O — 16; Cl — 35,5; K — 39; Ca — 40.

3°. Reacții de halogenare cu mecanism radicalic.

4°. Trecînd 1 000 l amestec de propenă și hidrogen peste un catalizator de hidrogenare, rezultă 700 l gaz care conține două componente. Se cere: a) să se arate care sînt cele două compoziții inițiale (în procente de volum) care pot duce la acest rezultat; b) să se arate care sînt compozițiile finale (în procente de volum) în cele două cazuri.

Scanned with OKEN Scanner

Volumele sînt măsurate în condiţii normale.

5°. Care este concentraţia în ioni H_3O^+ a unei soluţii apoase care conţine într-un litru 0,2 moli acid organic monobazic cu constantă de aciditate $K_a = 5 \cdot 10^{-6}$.

γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

XXI.1°. Metode hidrolitice de preparare a acizilor carboxilici.

2°. Hidrogenarea şi clorurarea benzenului (fără mecanisme de reacţie).

3°. Mecanismul reacţiei de hidroliză a esterilor în mediu acid.

4°. Să se calculeze cantitatea (în moli) de grăsime necesară obţinerii unei cantităţi de 920 g de glicerină, cunoscînd că randamentul reacţiei este de 80%.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

2. ÎNVĂŢĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ŞI UNIVERSITAR (biologie)

XXII.1°. Alchilarea şi acilarea aminelor (fără mecanismul de reacţie).

2°. Săpunuri şi detergenţi (fără schema formării micelelor de săpun).

3°. Mecanismul reacţiei de sulfonare a hidrocarburilor aromatice.

4°. Să se indice succesiunea reacţiilor pentru obţinerea metanolului şi etanolului pornind de la propanonă şi reactivii anorganici necesari.

5°. Să se calculeze cantitatea de anhidridă ftalică (în g) care se obţine prin oxidarea a 256 g naftalină, ştiind că randamentul global al reacţiilor este de 75%.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

XXIII.1°. Reacţia aminelor primare cu acidul azotos. Reacţiile sărurilor de diazoniu (fără mecanismele de reacţie).

2°. Prepararea esterilor (fără mecanismele de reacţie).

3°. Mecanismul reacţiei de alchilare a benzenului cu propenă în prezenţa acizilor tari.

4°. Să se indice succesiunea reacţiilor de obţinere a 1-butanolului pornind de la: a) acetilenă şi reactivii anorganici necesari; b) propenă şi reactivii anorganici necesari, fără utilizarea unor compuşi organomagnezieni.

5°. Să se scrie ecuaţiile reacţiilor şi să se calculeze cantitatea de toluen (în g) necesară obţinerii a 5 moli de acid p-aminobenzoic, ştiind că randamentul global al reacţiilor este de 80%.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

XXIV.1°. Proprietăţi chimice ale $Cu(OH)_2$.

2°. Aranjaţi elementele:

Mg, K, Al, Na, Cs

în ordinea creşterii caracterului metalic. Indicaţi proprietatea unor compuşi ai acestor elemente, care variază în acelaşi sens ca şi caracterul metalic.

3°. Ionizarea apei. Produsul ionic al apei. *p*H-ul.

4°. Ştiind că produsul de solubilitate al $CaSO_4$ este $P_s = 6{,}1 \cdot 10^{-5}$, se cere să se precizeze dacă se separă sau nu $CaSO_4$ în următoarele cazuri: a) se amestecă volume egale dintr-o soluţie de $CaCl_2$ de concentraţie 0,002 molară şi o soluţie de Na_2SO_4 de concentraţie 0,002 molară; b) se amestecă volume egale dintr-o soluţie de $CaCl_2$ de concentraţie 0,04 molară şi o soluţie de Na_2SO_4 de concentraţie 0,04 molară.

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI
1983

1. ÎNVĂȚĂMÎNTUL TEHNIC ȘI UNIVERSITAR

α. PROFILURILE CHIMIE, BIOCHIMIE, CHIMIE-FIZICĂ

XXV.1°. Hidroliza sărurilor. Care dintre următoarele săruri hidrolizează și ce caracter acidobazic prezintă soluția:

$$FeSO_4;\ CH_3COONH_4;\ Na_2CO_3;\ FeCl_3;\ AgCl;\ K_2S.$$

2°. O soluție 0,02 *M* de bază slabă *B*OH are *p*H-ul 10. Se cere: a) concentrația ionilor HO^-, B^+ precum și concentrația bazei nedisociate, din soluția ce a atins echilibrul; b) constanta de bazicitate a bazei slabe *B*OH; c) cum variază gradul de ionizare al bazei *B*OH dacă soluția sa se diluează la dublu cu apă?

3°. Obținerea clorbenzenului, reacție și mecanism. Nitrarea clorbenzenului; explicați orientarea pe baza efectului electromer.

4°. Prin încălzirea cu acid sulfuric a 23 g alcool monohidroxilic saturat se formează 18,5 g eter *A*. Considerînd că reacția decurge cantitativ, se cere: a) formula alcoolului și formula eterului; b) scrieți toți compușii organici izomeri cu eterul *A*; precizați tipul de izomerie; c) arătați rolul acidului sulfuric în reacția de eterificare.

Mase atomice: C — 12; H — 1; O — 16.

5°. Indicați reacțiile și condițiile de obținere ale: a) acidului sulfuric pornind de la pirită; b) carbonatului de sodiu prin procedeul amoniacal; c) alaninei din acetilenă; d) acidului fenilacetic ($C_6H_5—CH_2—COOH$) din benzen, CH_3Cl și reactivi anorganici.

XXVI. 1°. Teoria protolitică a acizilor și bazelor.

2°. 5 g dintr-o sulfură de fer (FeS) tehnică ce conține 5% fer metalic, se tratează cu HCl. Presupunînd că reacțiile sînt totale, se cere: a) cîți l de produși de reacție gazoși se degajă în condiții normale? b) compoziția procentuală în volume a acestui amestec de gaze; c) cantitatea teoretică de $FeCl_2$ formată.

Mase atomice: Fe — 56; S — 32; Cl — 35,5; H — 1.

3°. Preparările butadienei. Utilizarea butadienei la obținerea de cauciucuri sintetice.

4°. Hidrocarbura *A* cu un conținut de 10% hidrogen se obține prin monoalchilarea benzenului cu o alchenă. Se cere: a) formula moleculară și formula de structură a hidrocarburii *A*; b) scrieți mecanismul formării hidrocarburii *A*; c) scrieți hidrocarburile aromatice izomere cu hidrocarbura *A*; d) calculați cantitatea de benzen și alchenă necesare pentru obținerea a 4,8 t hidrocarbură *A* considerînd un randament global de transformare de 80%.

Mase atomice: C — 12; H — 1.

5°. a) Indicați condițiile de reacție și produșii care se obțin în cazul reacțiilor:

$$Zn + HCl \rightarrow$$

$$Cu + H_2SO_4 \rightarrow$$

$$Cl_2 + H_2O \rightarrow$$

b) scrieți reacțiile propinei cu: 1) Na metalic; 2) H_2O, catalizator. Ce produși rezultă dacă în reacțiile de mai sus se folosește 2-butina în loc de propină?

Scanned with OKEN Scanner

XXVII.1°. Variația caracterului metalic în grupe și perioade.

2°. O cantitate de 12 g cărbune incandescent reacționează cu vapori de apă și rezultă 35,84 l gaz de apă considerat amestec echimolecular. Să se determine: a) masa moleculară medie și densitatea medie a gazului de apă; b) conținutul procentual de carbon al probei.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

3°. Reacțiile de adiție ale acetilenei.

4°. Hidrocarbura *A* cu formula brută C_4H_5 se poate obține prin monoalchilarea benzenului cu o alchenă. Se cere: a) formula moleculară și de structură a hidrocarburii *A*; b) care este alchena folosită; c) care este mecanismul formării hidrocarburii *A*; d) calculați cantitățile de benzen (kmoli, kg) și alchenă (kmoli, m^3) necesare pentru a obține 5,3 t hidrocarbură *A*, reacțiile decurgînd cantitativ.

Mase atomice: C — 12; H — 1.

β. PROFILUL MECANO-CHIMIC

XXVIII.1°. Variația caracterului nemetalic în grupe și perioade.

2°. O plăcuță metalică constituită dintr-ur metal divalent *Me*, avînd o masă de 5 g, este suspendată cu un fir din material plastic într-un litru de soluție 1 *M* sulfat de cupru. După un timp de reacție se constată că masa plăcuței crește la 6,5 g, iar concentrația soluției de $CuSO_4$ scade la 0,8 *M*. Se cere: a) să se scrie reacția chimică și explicarea ei; b) să se calculeze masa atomică a metalului *Me*, din care este făcută plăcuța.

Mase atomice: Cu — 63,5; S — 32; O — 16.

3°. Obținerea benzenului și toluenului din produși naturali și prin sinteză.

4°. Alchena aciclică *A* reacționează cu bromul formînd un produs de adiție cu un conținut de 4,35% hidrogen. Se cere: a) formula moleculară a hidrocarburii *A*; b) scrieți alchenele izomere cu formula de mai sus, precizînd tipul de izomerie; c) alegeți dintre izomerii de mai sus, alchena care prin oxidare cu $K_2Cr_2O_7$ și H_2SO_4 formează doi acizi carboxilici diferiți.

Mase atomice: C — 12; H — 1; Br — 80.

5°. Indicați reacțiile chimice prin care se pot obține substanțele: a) $Ca(OH)_2$ din $CaCO_3$; b) HNO_3 din NH_3; c) meta-nitrofenol din benzen; d) 2-clorpropan din 1-clorpropan.

γ. PROFILUL CHIMIE ALIMENTARĂ

XXIX.1°. Produșii de condensare ai compușilor carbonilici cu substanțe conținînd azot.

2°. Metode de preparare a alcoolilor.

3°. Reprezentați în formă generală mecanismul reacțiilor de substituție nucleofilă. Exemplificați prin reacția de hidroliză a esterilor în mediu bazic.

4°. Să se calculeze volumul de gaz (măsurat în condiții normale) care se degajă la tratarea a 178 g alanină cu acid azotos, considerînd randamentul reacției 78,1%.

Mase atomice: C — 12; H — 1; N — 14; O — 16.

Scanned with OKEN Scanner

2. ÎNVĂŢĂMÎNTUL MEDICO-FARMACEUTIC ŞI UNIVERSITAR (biologie)

XXX.1°. Reacţii de oxidare a hidrocarburilor aromatice.

2°. Reacţii de condensare a compuşilor carbonilici.

3°. Să se indice succesiunea reacţiilor de obţinere a propanonei din propanal, cu folosirea reactivilor anorganici respectivi.

4°. Ştiind că o gliceridă dă la hidroliză numai acid palmitic (şi glicerină), să se calculeze cantitatea (în g) de gliceridă necesară obţinerii a 920 g de glicerină cunoscînd că randamentul reacţiei de hidroliză este de 80%.

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16.

XXXI.1°. Reacţii de adiţie electrofilă.

2°. Butadiena.

3°. Să se indice formulele de structură şi denumirile aminelor care corespund formulei moleculare $C_4H_{11}N$ şi să se precizeze care dintre acestea pot reacţiona cu clorura de benzoil şi care prezintă enantiomeri.

4°. Ce cantitate de glucoză este necesară pentru a obţine 10 moli de alcool etilic şi ce volum de dioxid de carbon rezultă (în condiţii normale)?

Mase atomice: C — 12; H — 1; O — 16.

XXXII.1°. Proprietăţile substanţelor ionice.

2°. Se dau sistemele chimice:

1. $CuSO_4 + H_2S \rightarrow$
2. $BaCl_2 + K_2CrO_4 \rightarrow$
3. $AgNO_3 + NaOH \rightarrow$
4. $AgNO_3 + HCl \rightarrow$
5. $H_2SO_4 + NaOH \rightarrow$
6. $CaCl_2 + H_2C_2O_4 \rightarrow$
7. $Pb(NO_3)_2 + H_2SO_4 \rightarrow$
8. $H_2 + I_2 \rightarrow$
9. $AlCl_3 + NaOH \rightarrow$

Se cere: a) ecuaţiile reacţiilor chimice; b) denumirea produşilor de reacţie; c) indicarea produşilor greu solubili.

3°. Să se deducă expresia constantelor de echilibru K_c şi K_p şi relaţia dintre acestea.

4°. O cantitate de 24 g cărbune incandescent reacţionează cu vapori de apă rezultînd un volum de 71,68 l gaz de apă (considerat amestec echimolecular). Să se determine: a) masa moleculară medie, densitatea medie şi densitatea în raport cu aerul a gazului de apă; b) conţinutul în carbon al probei.

Mase atomice: C — 12; O — 16; H — 1.

Scanned with OKEN Scanner

I.1°. Subiectul se va trata după manualul de clasa a XI-a urmărindu-se următoarele probleme:

Definiţia unui acid după *Brönsted*. Reacţia de ionizare a unui acid oarecare HA în soluţie apoasă. Echilibrul de ionizare şi constanta de echilibru. Gradul de ionizare; acizi tari şi acizi slabi. Expresia constantei de aciditate (constantei de ionizare) în cazul acizilor slabi. Exemplu. Deducerea legii diluţiei a lui *Ostwald*, adică a relaţiei dintre constanta de aciditate, gradul de ionizare şi concentraţia soluţiei unui acid slab. Ionizarea acizilor dibazici şi poliprotici. Pentru exemplificare se vor scrie expresiile constantelor de ionizare ale acidului fosforic (sau ale altui acid poliprotic). Constanta globală de aciditate şi relaţia dintre aceasta şi constantele diferitelor trepte de ionizare. Dependenţa constantei de aciditate de temperatură şi de structura acidului respectiv. Variaţia tăriei acizilor organici în seria de omologi a acizilor monocarboxilici saturaţi. Explicaţia acestei variaţii prin efectele electronice din moleculele respective.

2°. a) Se alcătuieşte un tabel în care se trece numărul de moli din fiecare specie chimică existentă în sistem în momentul iniţial şi la stabilirea echilibrului. Se notează cu α gradul de disociere. De asemenea, se trec în acest tabel concentraţiile speciilor respective (raportul dintre numărul de moli respectiv şi volumul V al sistemului) precum şi numărul total de moli existenţi în sistem la momentul iniţial şi la echilibru:

Specia chimică / Timpul	A_2B_4		AB_2		Număr total de moli
	Număr de moli	Conc.	Număr de moli	Conc.	
Iniţial	1	$1/V$	0	0	1
La echilibru	$1-\alpha$	$\frac{1-\alpha}{V}$	2α	$\frac{2\alpha}{V}$	$1+\alpha$

Fracţiile molare ale componentelor sistemului la echilibru vor fi:

$$X_{A_2B_4} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \text{ şi } X_{AB_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci presiunile parțiale ale acestor componente vor fi:

$$P_{A_2B_4} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot P \text{ și } P_{AB_2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \cdot P.$$

Constanta de echilibru K_p, exprimată prin presiunile parțiale, va avea expresia:

$$K_p = \frac{P^2_{AB_2}}{P_{A_2B_4}} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2} \cdot P.$$

Constanta de echilibru K_c, exprimată prin concentrațiile molare ale componentelor sistemului la echilibru, va avea expresia:

$$K_c = \frac{\left[\frac{2\alpha}{V}\right]^2}{\frac{1-\alpha}{V}} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{V}.$$

b) Din expresia constantei de echilibru K_p se scoate expresia gradului de disociere α:

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_p}{4P + K_p}}.$$

Dacă temperatura rămîne neschimbată atunci și constanta de echilibru K_p rămîne neschimbată și deci dacă sistemul este trecut de la presiunea P la presiunea 0,5 P, atunci gradul de disociere va deveni:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{K_p}{4(0{,}5\,P) + K_p}} = \sqrt{\frac{K_p}{2P + K_p}}$$

și se vede imediat că $\alpha_1 > \alpha$. Deci la micșorarea presiunii gradul de disociere crește și ca atare crește numărul de molecule disociate, adică echilibrul se deplasează spre dreapta, în sensul formării compusului AB_2. Acest rezultat este în concordanță cu principiul lui *Le Châtelier* conform căruia la micșorarea presiunii sistemul se va deplasa în sensul în care rezultă un număr mai mare de moli de gaz.

c) La temperatură constantă micșorarea volumului unui sistem gazos la jumătate din volumul inițial este echivalentă cu dublarea presiunii (presupunînd o comportare ideală a gazelor). În acest caz se va obține o nouă valoare a gradului de disociere α_2:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{K_p}{4(2P) + K_p}} = \sqrt{\frac{K_p}{8P + K_p}}.$$

Este evident că $\alpha_2 < \alpha$, deci echilibrul se va deplasa spre creșterea numărului de molecule nedisociate, adică spre stînga.

Același rezultat se obține și din expresia constantei de echilibru K_c:

$$K_c = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{V}.$$

La temperatură constantă valoarea acestei constante de echilibru rămîne neschimbată. Pentru a se respecta această condiție la micșorarea volumului se va micșora și gradul de disociere α adică echilibrul se va deplasa spre stînga.

d) Pentru un sistem gazos ideal $P \cdot V = nRT$ unde n este numărul total de moli de gaz din sistem. Presiunea parțială a unui component „i" va fi $P_i = \frac{n_i}{V} RT = C_i RT$ deoarece raportul n_i/V reprezintă chiar concentrația compo-

Scanned with OKEN Scanner

nentului „i". Înlocuind presiunile parțiale din expresia constantei de echilibru K_p cu valorile respective exprimate prin concentrații se obține:

$$K_p = \frac{P^2_{AB_2}}{P_{A_2B_4}} = \frac{[C_{AB_2}]^2 (RT)^2}{C_{A_2B_4}(RT)} = K_c \cdot RT = \frac{P \cdot V}{1 + \alpha} \cdot K_c.$$

3°. Se va respecta programa școlară și manualele urmărind următorul plan:

A. Definiția alcoolilor și fenolilor.

B. Metode generale de obținere a alcoolilor: Oxidarea alcanilor; Oxidarea alchenelor cu $KMnO_4$, în mediu bazic (se obțin dioli); Oxidarea alchenelor la oxizii corespunzători urmată de hidroliza acestora obținîndu-se dioli vicinali; Hidrogenarea aldehidelor și cetonelor (inclusiv a aldozelor și cetozelor); * Din compuși organomagnezieni cu aldehide și cetone; Hidroliza derivaților monohalogenați; Hidroliza esterilor acizilor organici și anorganici; Adiția apei la alchene; Reacția de transesterificare.

C. Metode speciale de obținere a unor alcooli: Obținerea metanolului din gazul de sinteză; Obținerea etanolului prin fermentația glucozei; Obținerea glicerinei din propenă; Obținerea glicerinei prin hidroliza grăsimilor; Obținerea ciclohexanolului prin hidrogenarea fenolului; Obținerea aldolilor și cetolilor prin condensarea compușilor carbonilici; Obținerea alcoolilor *c*- și *p*-hidroxibenzilici din fenol și aldehidă formică; Obținerea cianhidrinelor.

D. Metode de obținere a fenolilor; Din gudroanele de la distilarea uscată a cărbunilor de pămînt; Din topirea alcalină a sărurilor de sodiu ale acizilor arilsulfonici; * Prin hidroliza sărurilor de diazoniu; Obținerea fenolului din cumen.

4°. a) Se stabilește mai întîi formula moleculară a substanței A. Suma procentelor de C și H este egală cu 81,4. Diferența pînă la o sută (18,6) va fi reprezentată de procentele de oxigen (substanța A este un compus carbonilic după cum reiese din enunțul problemei: reacționează cu iodură de metil magneziu dînd compusul B care supus hidrolizei conduce la un alcool C).

Deci:

Numărul de atomi gram de C dintr-o sută de grame de substanță: $\frac{69,8}{12} = 5,8.$

Numărul de atomi gram de H dintr-o sută de grame de substanță: $\frac{11,6}{1} = 11,6.$

Numărul de atomi gram de O dintr-o sută de grame de substanță: $\frac{18,6}{16} = 1,16.$

Cum în moleculă nu pot exista fracții de atomi, rezultatele de mai sus se împart la cel mai mic dintre ele:

$C : \frac{5,8}{1,16} = 5$

$H : \frac{11,6}{1,16} = 10$

$O : \frac{1,16}{1,16} = 1.$

Formula brută:
$C_5H_{10}O$

Formulă moleculară:

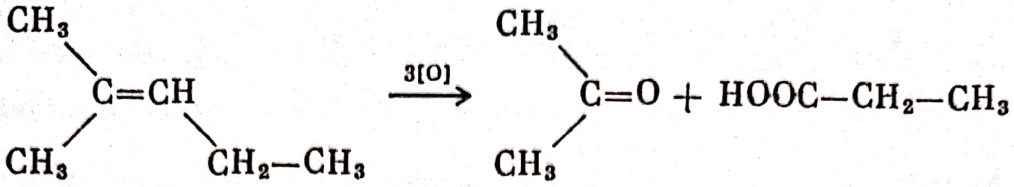
$$M(C_5H_{10}O)_n = M \text{ moleculară a lui } A$$
$$86\ n = 86$$
$$n = 1$$

Deci formula moleculară a lui A este $C_5H_{10}O$.

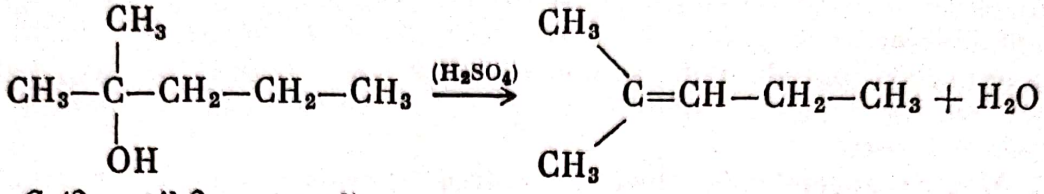
* Aceste puncte nu mai figurează în programa clasei a X-a începînd cu anul școlar 1981—1982.

Scanned with OKEN Scanner

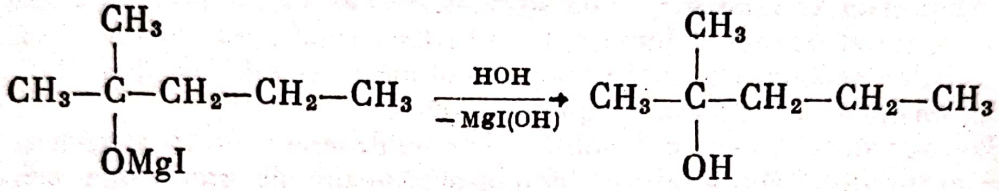
b) Pentru a stabili ecuațiile reacțiilor prin care se obțin compușii *B*, *C*, *D*, se pleacă de la structura alchenei *D* (obținută prin deshidratarea alcoolului *C*).



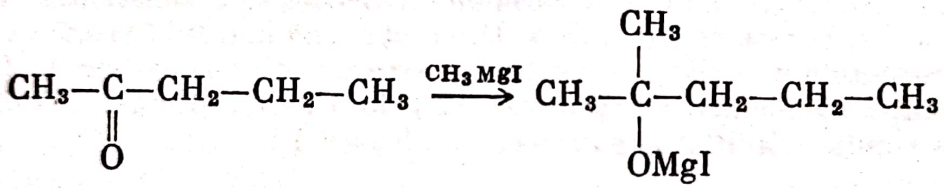
D (2-metil-2-pentenă)



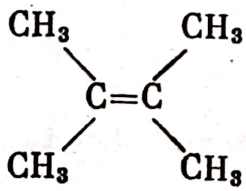
C (2-metil-2-pentanol) *D*



B *C*



A *B*

Structura alchenei *D* nu poate fi  pentru că prin oxidare s-ar obține numai acetonă.

c) 1 mol *A* → 1 mol *C*

1 mol *A* = 86 g

1 mol *C* = 102 g

86 g *A* ..... 102 g *C*

x g *A* ..... 1000 g *C*

$$x = \frac{1000 \cdot 86}{102} \text{ g } A$$

$x = 843{,}1$ g *A* (metilpropilcetonă).

5°. Molecula de apă conține două legături O—H covalente polare care fac între ele un unghi de aproximativ 105°. Între moleculele apei se stabilesc legături (sau punți) de hidrogen. Clorura de amoniu este o substanță ionică formată din ionii NH_4^+ și Cl^-. Acești ioni sînt aranjați într-o rețea cristalină (în stare solidă) între ei exercitîndu-se forțe de atracție electrostatice, deci există legătură ionică

sau electrovalentă. În ionul complex amoniu, hidrogenul este legat de azot prin covalenţe, una dintre legături fiind coordinativă, adică ea se realizează prin punerea în comun a doi electroni, ambii provenind de la atomul de azot (atomul donor). Toate cele patru legături N—H din acest ion sînt însă echivalente. Carbonatul de calciu este, de asemenea, o substanţă ionică formată din ioni Ca^{2+} şi ioni CO_3^{2-}. Între aceşti ioni în reţeaua cristalină se exercită tot forţe de atracţie electrostatice. În ionii CO_3^{2-} atomii de oxigen sînt legaţi de carbon prin covalenţe. Iodura de tetrametilamoniu este formată din ioni de $(CH_3)_4N^+$ şi ioni I^- între aceştia existînd deci legătură ionică. În ionii amoniu, azotul este legat de atomii de carbon prin covalenţe, o legătură fiind coordinativă. În cadrul grupelor metil, hidrogenii sînt legaţi de atomii de carbon tot prin covalenţe. Acetatul de sodiu, ca toate sărurile, este tot substanţă ionică formată din ioni Na^+ şi ioni acetat CH_3COO^-, care formează reţeaua cristalină a acestei sări. În ionii acetat atît legăturile dintre cei doi atomi de carbon cît şi cele dintre aceştia şi atomii de hidrogen şi cei de oxigen sînt covalente. Fenolul conţine numai legături covalente în molecula sa iar legăturile intermoleculare sînt de tipul dipol-dipol şi în mai mică măsură punţi de hidrogen.

II.1°. Subiectul va fi tratat conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a. Se vor avea în vedere următoarele probleme: Reţele ionice. Natura electrostatică a forţelor ce se exercită între ioni. Tipuri de elemente care prin combinare formează compuşi ionici. Teoria lui *Kossel* a legăturii ionice. Cauza transferului de electroni, configuraţia de gaz rar a ionilor formaţi. Exemple de substanţe cu legătură ionică. Tipuri de reţele ionice, exemple. Proprietăţile tipice substanţelor ionice. Starea de agregare, temperatura de topire şi de fierbere, comportarea la lovire, solubilitatea şi conductibilitatea electrică în topitură sau în soluţie.

2°. a) Se consideră cazul general cînd V l de apă dizolvă $2V$ l de hidrogen sulfurat (măsuraţi în condiţii normale).

Masa apei va fi: $1\,000\ V\ cm^3 \cdot 1\ g/cm^3 = 1\,000\ V$ g.

Se calculează masa gazului dizolvat:

Masa molară a hidrogenului sulfurat este 34.

1 mol $H_2S = 22{,}4$ l ..... 34 g

$2V$ l ..... m g

$$m = \frac{2 \cdot V \cdot 34}{22{,}4} = \frac{68\,V}{22{,}4}\ g\ H_2S.$$

Masa soluţiei obţinute va fi:

$$m_1 = 1000\ V + \frac{68\,V}{22{,}4}\ g\ \text{soluţie}.$$

Concentraţia procentuală a soluţiei va fi:

$1000\ V + \frac{68\,V}{22{,}4}$ g soluţie ..... $\frac{68\,V}{22{,}4}$ g H_2S dizolvat

100 g soluţie ..... X g H_2S dizolvat

$$X = \frac{\frac{68\,V}{22{,}4} \cdot 100}{V\left[1000 + \frac{68}{22{,}4}\right]} = 0{,}303\%.$$

b) Volumul de lichid rămînînd constant, densitatea acestuia va deveni:

$$\rho = \frac{m_{\text{soluţie}}}{V_{\text{soluţie}}} = \frac{V\left[1000 + \frac{68}{22{,}4}\right]}{V} = 1003{,}04\ g/l.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa de hidrogen sulfurat dizolvată într-un litru de soluţie va fi:

100 g soluţie ..... 0,303 g H_2S
1 003,04 g (1 litru) solutie ..... X g H_2S

$X = 3{,}039$ g H_2S dizolvat într-un litru de soluţie.

Conform ecuaţiei reacţiei de neutralizare:

La 1 mol H_2S = 34 g ..... 1 mol NaOH = 40 g
La 3,039 g H_2S ..... Y g NaOH

$Y = 3{,}576$ g NaOH necesar neutralizării.

Cantitatea de soluţie 10% NaOH necesară va fi:

În 100 g soluţie NaOH ..... 10 g NaOH
Z g soluţie ..... 3,576 g NaOH

$Z = 35{,}76$ g de soluţie 10% NaOH necesare pentru neutralizarea unui litru de soluţie de hidrogen sulfurat la sare acidă.

3°. Conform programei şi manualelor şcolare.

4°. a) Prin deshidratarea alcoolilor se obţin alchene:

$$\underset{\text{etanol}}{CH_3-CH_2OH} \xrightarrow{(H_2SO_4)} \underset{\text{etenă } (A)}{CH_2=CH_2} + H_2O$$

Etena reacţionează cu bromul din apa de brom (reacţie de adiţie) conducînd la 1,2-dibrometan (B)

$$\underset{\text{etenă}}{CH_2=CH_2} + Br_2 \rightarrow \underset{\text{1,2-dibrometan } (B)}{\underset{Br}{\underset{|}{CH_2}}-\underset{Br}{\underset{|}{CH_2}}}$$

b) Se calculează mai întîi masa etanolului:

$$m = v \cdot d$$

$$m = 25\ cm^3 \cdot 0{,}80\ g/cm^3 = 20\ g \text{ etanol}$$

$$\underset{20}{CH_3-\overset{46\ g}{CH_2}-OH} \xrightarrow{(H_2SO_4)} \underset{X}{\overset{22{,}4\ l}{CH_2=CH_2}} \xrightarrow{Br_2} \underset{Y}{\underset{Br}{\underset{|}{CH_2}}-\underset{Br}{\underset{|}{CH_2}}}^{188}$$

$$X = \frac{20 \cdot 22{,}4}{46}\ l\ C_2H_4$$

$$X = 9{,}73\ l\ C_2H_4 \text{ (la } 0^0 \text{ şi 1 atm).}$$

c) Cantitatea de substanţă B se poate calcula fie în funcţie de cantitatea de etanol:

46 g etanol ..... 188 g (B)
20 g „ ..... Y

$$Y = \frac{20 \cdot 188}{46}\ g(B)$$

$$Y = 81{,}7\ g\ (B)$$

Scanned with OKEN Scanner

fie în funcţie de volumul de etenă (lucru posibil deoarece ambele reacţii decurg cu randamente de 100%).

22,4 l etenă ..... 188 g (B)

$\frac{20 \cdot 22,4}{46}$ l etenă ..... Z

$$Z = \frac{188 \cdot 20}{46} \text{ g}(B)$$

$Z = 81,7$ g 1, 2-dibrometan.

III.1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a. (Vezi problema IV.1.)

2°. a) $FeS + 2\ HCl = FeCl_2 + H_2S$.

Se obţine clorură feroasă şi hidrogen sulfurat (acid sulfhidric).

b) $Zn + S = ZnS$.

Rezultă sulfură de zinc.

c) $N_2 + O_2 \rightleftarrows 2NO$.

Se obţine oxidul de azot dar reacţia este reversibilă şi se obţin cantităţi mici de oxid de azot numai la temperaturi foarte ridicate (de exemplu, în arc electric).

d) $2\ Al + 3/2\ O_2 = Al_2O_3$.

Compusul obţinut este oxidul de aluminiu.

e) $AgNO_3 + HCl = AgCl + HNO_3$.

Rezultă clorură de argint şi acidul azotic, reacţia fiind practic total deplasată spre dreapta, deoarece clorura de argint este practic insolubilă.

f) $NH_4Cl + NaOH = NaCl + NH_4OH$

$$\swarrow \quad \searrow$$
$$NH_3 \qquad H_2O$$

Se obţine clorura de sodiu, amoniac şi apă. Formal rezultă iniţial clorura de sodiu şi hidroxidul de amoniu, acesta din urmă însă este instabil şi se descompune imediat în amoniac şi apă.

3°. Subiectul se va trata conform programei şi manualelor urmărind următoarele puncte:

A. Definiţia aminelor.

B. Metode de obţinere: Alchilarea amoniacului cu derivaţi halogenaţi; Alchilarea amoniacului cu oxid de etilenă; Alchilarea aminelor primare şi secundare cu derivaţi halogenaţi; Alchilarea aminelor primare şi secundare cu oxid de etilenă; * Tratarea cianhidrinelor cu amoniac, rezultînd aminocianhidrine; * Alchilarea aminelor primare şi secundare cu alcooli în prezenţă de acid sulfuric (cu sulfat acid de alchil, de fapt); Reducerea nitroderivaţilor; Reducerea nitrililor; Reducerea amidelor.

C. Proprietăţile chimice ale aminelor: Structura grupei funcţionale amină; Bazicitatea aminelor. Influenţa efectelor electronice asupra bazicităţii. Reacţia aminelor cu acizii anorganici; Alchilarea aminelor; Acilarea aminelor. Acilarea ca mijloc de protejare a grupei amino; Reacţia aminelor cu acidul azotos.

* Aceste puncte nu mai figurează în programa clasei a X-a, începînd cu anul şcolar 1981—1982.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Se scrie ecuația reacției dintre CH_4 și Cl_2:

$$CH_4 + 4\ Cl_2 \rightarrow CCl_4 + 4\ HCl$$

16 g CH_4 ..... 154 g CCl_4
100 g CH_4 X

$$X = \frac{154 \cdot 100}{16}\ g$$

$$X = 962{,}5\ g\ CCl_4\ (cu\ \eta = 100\%).$$

— Cu randament de 70%, vom avea:

$$X' = 962{,}5\ \frac{70}{100} = 673{,}75\ g\ CCl_4.$$

Volumul de HCl:

16 g CH_4 ..... $4 \cdot 22{,}4$ l HCl
100 g CH_4 ..... X l HCl

$$X = \frac{100 \cdot 4 \cdot 22{,}4}{16} = 560\ l\ HCl\ (cu\ \eta = 100\%)$$

$$X' = 560 \cdot \frac{70}{100} = 392\ l\ HCl\ (cu\ \eta = 70\%).$$

IV.1°. Subiectul se va trata conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a urmărindu-se următoarele probleme:

Definiția electrolizei. Fenomenele redox ce au loc la electrozi. Reacții primare și reacții secundare la electrozi. Exemple. Legile electrolizei (*Faraday*). Echivalent electrochimic. Constanta lui *Faraday*, semnificația acesteia. Utilizarea ei pentru determinarea numărului lui *Avogadro*. Justificarea ordinei în care se descarcă ionii la electrozi în cazul electrolizei soluțiilor apoase. Supratensiunea. Electroliza soluției de iodură de potasiu. Electroliza soluției de clorură de sodiu, obținerea hidroxidului de sodiu prin procedeul cu diafragmă și prin procedeul cu catod de mercur. Electroliza soluției de sulfat de cupru cu electrozi inerți (din platină sau cărbune) și cu electrozi din cupru. Rafinarea electrolitică a cuprului. Alte aplicații practice ale procesului de electroliză a soluțiilor.

2°. a) $CaCO_3 \xrightarrow{\text{încălzire}} CaO + CO_2$.

b) Se calculează cantitatea de carbonat de calciu pur din cele 10 kg de piatră de var de puritate 80%:

La 100 kg piatră de var ..... 80 kg $CaCO_3$ pur
La 10 kg „ „ ..... m kg „ „

$$m = 10 \cdot \frac{80}{100} = 8\ kg\ CaCO_3\ pur.$$

Se calculează cantitatea de oxid de calciu care rezultă:

La 1 kmol $CaCO_3 = 100$ kg ..... 1 kmol $CaO = 56$ kg
La 8 kg $CaCO_3$ ..... X kg CaO

$$X = \frac{8 \cdot 56}{100} = 4{,}48\ kg\ CaO\ rezultat.$$

c) La 1 kmol = 100 kg $CaCO_3$ ..... 1 kmol $CO_2 = 22{,}4\ m^3$
La 8 kg $CaCO_3$ ..... $V\ m^3\ CO_2$

$$V = \frac{22{,}4 \cdot 8}{100} = 1{,}792\ m^3$$ de CO_2 măsurați în condiții normale.

Scanned with OKEN Scanner

3°. Subiectul se va trata conform programei și manualelor, avînd în vedere următoarele puncte:

A. Definiția acizilor carboxilici. Structură.

B. Metode oxidative de obținere a acizilor carboxilici: Oxidarea alcanilor și cicloalcanilor; Oxidarea alchenelor; Oxidarea acetilenei la acid oxalic; Oxidarea benzenului; Oxidarea toluenului; Oxidarea xilenilor; Oxidarea *p*-N-acetilamino-toluidinei; Oxidarea naftalinei; Oxidarea alcoolilor; Oxidarea aldehidelor; Oxidarea cetonelor.

C. Metode hidrolitice de obținere a acizilor carboxilici: Hidroliza esterilor acizilor carboxilici; Hidroliza derivaților trihalogenați geminali; Hidroliza cloru-rilor acide și anhidridelor acide; Hidroliza amidelor; Hidroliza nitrililor.

D*. Alte metode: Din compușii organomagnezieni și dioxid de carbon; Prin dislocuirea acizilor carboxilici din sărurile lor, cu acizi mai tari.

4°. Prin condensarea crotonică a aldehidei acetice se obține aldehida crotonică care prin hidrogenare conduce la 1-butanol:

a) $CH_3-CHO + CH_3-CHO \xrightarrow[-H_2O]{} \underset{\text{aldehida crotonică}}{CH_3-CH=CH-CHO} \rightarrow$

$\xrightarrow[\text{catalitic}]{2H_2} \underset{\text{1-butanol}}{CH_3-CH_2-CH_2-CH_2OH}$

b) 1 kmol butanol = 74 kg

74 kg l-butanol ..... $2 \cdot 22{,}4$ m^3H_2

370 kg „ X

$$X = \frac{370 \cdot 2 \cdot 22{,}4}{74} = 224 \text{ m}^3 \text{ H}_2 \text{ (la 0°C și 1 atm).}$$

c) Izomerii l-butanolului sînt:

$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_2-CH_3$ — 2-butanol (2-enantiomeri)

$\underset{\text{2-metil-1-propanol}}{CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-OH}$

$\underset{\text{terț-butanol (2-metil-2-propanol)}}{CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-CH_3}$

$\underset{\text{metilpropileter}}{CH_3-O-CH_2-CH_2-CH_3}$

$\underset{\text{metilizopropileter}}{CH_3-O-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3}$

$\underset{\text{dietileter}}{CH_3-CH_2-O-CH_2-CH_3}$

5°. Într-o soluție saturată de bromură de argint există echilibrul:

$$AgBr_{(solid)} \rightleftarrows Ag^+_{(soluție)} + Br^-_{(soluție)}$$

Produsul de solubilitate al acestei sări va fi:

$$P_s = [Ag^+] \cdot [Br^-].$$

* Acest punct nu mai figurează în programa clasei a X-a, începînd cu anul școlar 1981—1982.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu S solubilitatea bromurii de argint (în moli/l) la aceeaşi temperatură la care se dă produsul de solubilitate, rezultă imediat că din fiecare mol de AgBr dizolvat se obţine tot un mol de Ag^+ şi un mol de Br^-. Deci concentraţiile acestor ioni în soluţia saturată ce se găseşte în echilibru cu sarea solidă vor fi egale cu S moli/l. Rezultă că:

$$P_s = S^2 \text{ mol}^2/\text{l}^2.$$

De aici se obţine că solubilitatea $S = \sqrt{P_s} = \sqrt{7{,}7 \cdot 10^{-13}} = 8{,}77 \cdot 10^{-7}$ mol/l.

V.1°. Conform programei şi manualelor şcolare.

2°. Conform programei şi manualelor şcolare.

3°. Formula naftalinei este:

$$C_{10}H_8 \quad (M = 128)$$

128 g naftalină ..... 120 g C
7,5 g „ ..... X g C

$$X = \frac{120 \times 7{,}5}{128} \text{ g C}$$

$$X = 7{,}3 \text{ g C}.$$

4°. $R{-}CH{=}CH{-}R' + 4[O] \rightarrow R{-}COOH + R'{-}COOH$

$$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3 + 4[O] \rightarrow CH_3{-}COOH + CH_3{-}CH_2{-}COOH$$

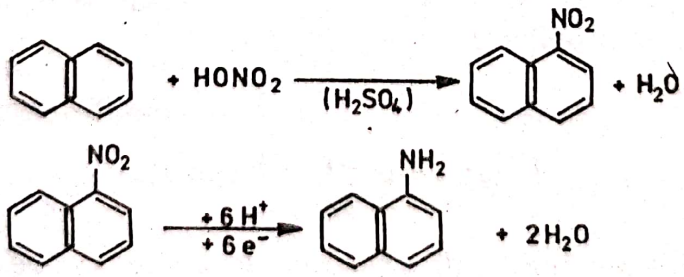
VI. 1°. Conform programei şi manualelor şcolare.

2°. Conform programei şi manualelor şcolare.

3°. a) Nitropropanul se obţine direct în urma reacţiei de nitrare a propanului cu acid azotic (15—20%) la temperatură ridicată (reacţie de substituţie radicalică).

$$C_3H_8 + HONO_2 \xrightarrow{t^\circ} \underset{\text{nitropropan}}{C_3H_7{-}NO_2} + H_2O.$$

b) 1-Naftilamina se obţine prin reducerea 1-nitronaftalinei obţinută la rîndul său prin nitrarea directă a naftalinei (cu amestec sulfonitric — reacţie de substituţie electrofilă).

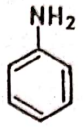


c) Acidul acetic se poate obţine prin decarboxilarea (parţială) a acidului malonic:

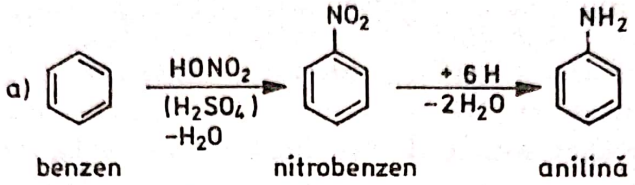
$$\begin{matrix} COOH \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{matrix} \xrightarrow{2NaOH} CH_3{-}COOH + Na_2CO_3 + H_2O$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. Substanța $C(C_6H_7N)$ nu poate fi decît o amină pentru că se obține prin reducerea substanței B (nitroderivat) cu fier și acid clorhidric. Formula moleculară C_6H_7N — indică o amină aromatică primară (prin reducerea nitroderivaților se obțin numai amine primare) și aceasta poate fi anilina:



Substanța B este nitrobenzenul obținut prin nitrarea (cu amestec sulfonitric a benzenului) substanței A (benzen):



b) 78 g C_6H_6 ..... 1 mol nitrobenzen
117 g C_6H_6 X

$X = 1{,}5$ moli nitrobenzen (B) (cu $\eta = 100\%$).

— Cu $\eta = 80\%$ — se obține $1{,}5 \frac{80}{100} = 1{,}2$ moli nitrobenzen

1 mol nitrobenzen ..... 1 mol anilină
1,2 moli „ ..... Y

$Y = 1{,}2$ moli anilină (cu $\eta = 100\%$).

— Cu $\eta = 80\%$ — se obține $1{,}2 \frac{80}{100} = 0{,}96$ moli anilină.

VII. 1°. Conform programei și manualelor școlare.
2°. Conform programei și manualelor școlare.
3°. Conform programei și manualelor școlare.
4°. Se calculează cantitatea de benzen pur:

100 kg C_6H_6 impur ..... 90 kg C_6H_6 pur
100 kg „ „ ..... X kg „ „

$X = 90$ kg C_6H_6 pur.

a) Benzoatul de etil se obține în urma reacției de esterificare dintre acidul benzoic și alcool etilic (sau dintre clorura de benzoil și alcool etilic).

Pentru a obține acid benzoic din benzen se poate utiliza următoarea succesiune de reacții:

$$C_6H_6 + Br_2 \xrightarrow{AlBr_3} C_6H_5{-}Br + HBr$$
$$C_6H_5{-}Br + Mg \rightarrow C_6H_5{-}MgBr$$
$$C_6H_5{-}MgBr + CO_2 \rightarrow C_6H_5{-}COOMgBr$$
$$C_6H_5{-}COOMgBr + HBr \rightarrow C_6H_5{-}COOH + MgBr_2.$$

În final: $C_6H_5{-}COOH + C_2H_5OH \rightleftarrows C_6H_5{-}COOC_2H_5 + H_2O$ sau:

$$C_6H_5{-}COOH + PCl_5 \rightarrow C_6H_5{-}COCl + POCl_3 + HCl$$
$$C_6H_5{-}COCl + C_2H_5OH \rightarrow C_6H_5{-}COOC_2H_5 + HCl$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține acid benzoic pornind de la benzen se poate utiliza și următoarea cale:

$$C_6H_6 + HONO_2 \xrightarrow{(H_2SO_4)} C_6H_5-NO_2 + H_2O$$
$$C_6H_5-NO_2 + 6[H] \rightarrow C_6H_5-NH_2 + 2\ H_2O$$
$$C_6H_5-NH_2 + HONO + HCl \xrightarrow[-2H_2O]{} [C_6H_5-N\equiv N]^+Cl^-$$
$$[C_6H_5-N\equiv N]^+Cl^- + CuCN \rightarrow C_6H_5-CN + N_2 + CuCl$$
$$C_6H_5-CN + 2\ H_2O \xrightarrow{(OH^-)} C_6H_5-COOH + NH_3 \text{ sau:}$$
$$C_6H_5-Br + KCN \rightarrow C_6H_5-CN + KBr$$
$$C_6H_5-CN + 2\ H_2O \xrightarrow{(OH^-)} C_6H_5-COOH + NH_3$$

b) Masa moleculară a acidului benzoic: $M = 122$
1 mol acid benzoic = 122 g

122 g C_6H_5-COOH ..... (12×7) g C
100 g „ ..... X g

$$X = \frac{8\,400}{122}\ \%\ C;\ X = 68{,}85\%\ C.$$

122 g C_6H_5-COOH ..... (6×1) g H
100 g „ ..... Y

$$Y = \frac{600}{122}\ \%\ H;\ Y = 4{,}91\%\ H.$$

122 g C_6H_5-COOH ..... 32 g O
100 g „ ..... Z

$$Z = \frac{3\,200}{122}\ \%O;\ Z = 26{,}23\%\ O.$$

c)
$$\underset{90\ kg}{C_6H_5-COOH} + C_2H_5OH \rightleftarrows \underset{X}{C_6H_5-COOC_2H_5} + H_2O$$
(122 kg; 150 kg)

$$X = \frac{150 \times 90}{122}\ kg \text{ benzoat de etil}$$

$X = 110{,}6$ kg benzoat de etil (cu $\eta = 100\%$).

Dacă $\eta = 100\%$ ..... 110,6 kg
cînd $\eta = 80\%$ X

$$X = \frac{110{,}6 \times 80}{100} = 88{,}48\ kg \text{ benzoat de etil.}$$

VIII.1°. Subiectul se va trata în conformitate cu manualele de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a avîndu-se în vedere următoarele probleme: Sisteme disperse, mediu dispers și mediu dispersant. Soluții și locul lor în cadrul sistemelor disperse. Solvat și solvent. Apa ca solvent. Solubilitatea substanțelor în apă, soluții apoase. Fenomenul de dizolvare ca o consecință a difuziunii, a mișcării particulelor. Creșterea entropiei sistemului la dizolvare. Solvenți neapoși, solvenți organici. Efecte termice la dizolvare. Dizolvarea cu degajare și cu absorbție de căldură. Solvatarea, hidratarea. Mecanismul dizolvării substanțelor ionice în apă. Exemplu. Ioni hidratați prin legături ion-dipol. Desprinderea ionilor din rețea ca proces endoenergetic și solvatarea ca proces exoenergetic. Numărul de molecule de apă de hidratare, factori de care depinde. Dizolvarea în apă a substanțelor cu moleculă polară. Exemplu,

Scanned with OKEN Scanner

acidul clorhidric. Ionul hidroniu. Hidraţi cristalini, apă de cristalizare. Factori care influenţează solubilitatea substanţelor: natura solventului şi solvatului, temperatura şi presiunea (în cazul substanţelor gazoase). Definiţia solubilităţii. Substanţe solubile, puţin solubile şi practic insolubile. Soluţii saturate şi nesaturate.

2°. Subiectul va fi tratat conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Efecte termice care însoţesc fenomenele fizice şi chimice. Reacţii endoterme şi reacţii exoterme. Exemple. Energia internă. Lucrul mecanic de volum şi expresia sa. Relaţia dintre variaţia energiei interne, lucrul mecanic şi cantitatea de căldură schimbată. Căldura de reacţie la volum constant şi la presiune constantă. Entalpia şi relaţia ei cu energia internă. Căldura de formare a substanţelor simple şi compuse. Stabilitatea substanţelor chimice în funcţie de căldura lor de formare. Variaţia de entalpie în reacţiile chimice exoterme şi endoterme. Legea lui *Hess*, formulare, exemple. Consecinţele legii lui *Hess*. Calculul variaţiei de entalpie într-o reacţie chimică în funcţie de entalpiile de formare ale reactanţilor şi produşilor de reacţie, precum şi în funcţie de energiile de legătură ale acestora. Căldura de dizolvare şi de neutralizare.

3°. a) $2\ Li + F_2 = 2\ LiF$

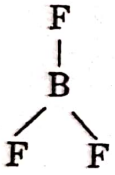
$Be + F_2 = BeF_2$

$2\ B + 3\ F_2 = 2\ BF_3$

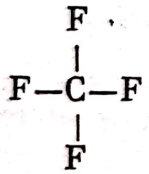
$C + 2\ F_2 = CF_4$

Azotul şi oxigenul nu reacţionează cu fluorul direct cu toate că există compuşii respectivi, trifluorura de azot NF_3 şi oxidul de difluor F_2O, dar aceştia pot fi obţinuţi numai indirect din alţi compuşi ai acestor elemente.

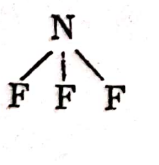
b) Li^+F^-, fluorură de litiu, compus ionic, formează reţea cristalină; $Be^{2+}2F^-$, fluorură de beriliu, compus de asemenea ionic formînd reţea cristalină.



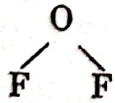
trifluorură de bor, moleculă plană cu unghiuri între valenţe de 120°, deoarece atomul de bor este hibridizat sp^2 (trigonal);



tetrafluorură de carbon, moleculă cu structură tetraedrică avînd atomul de carbon în centrul tetraedrului iar atomii de fluor în vîrfurile acestuia. Atomul de carbon este hibridizat sp^3, unghiurile dintre valenţe fiind de 109°28′;



trifluorura de azot, moleculă piramidală (analogă cu cea a amoniacului) avînd atomul de azot în vîrful piramidei şi atomii de fluor în vîrfurile triunghiului ce formează baza piramidei. Atomul de azot este parţial hibridizat sp^3 avînd în unul din orbitali perechea de electroni neparticipanţi;



oxidul de difluor, moleculă neliniară, analogă cu cea a apei.

c) Fluorura de litiu şi cea de beriliu sînt ionice deoarece litiul şi beriliul au un pronunţat caracter metalic fiind puternic electropozitive iar fluorul este cel mai electronegativ element. Trifluorura de bor, tetrafluorura de carbon, trifluorura de azot şi oxidul de difluor sînt substanţe covalente deoarece borul, carbonul, azotul şi oxigenul sînt nemetale şi formează compuşi cu fluorul numai prin punere în comun de electroni. Molecula de tetrafluorură de carbon fiind simetrică este nepolară, celelalte fiind molecule polare, avînd un anumit moment de dipol.

Scanned with OKEN Scanner

4°. Se calculează volumul de oxigen conținut în aerul din cameră:

100 m³ aer ..... 20 m³ oxigen
10 m³ aer ..... X m³ oxigen

$X = 2$ m³ de oxigen existent în cameră.

Reacția de ardere a sulfului este:

$$S + O_2 = SO_2.$$

Deci la un mol de oxigen consumat în reacția de ardere se formează tot un mol de dioxid de sulf și ca atare volumul maxim de dioxid de sulf care se poate forma va fi tot 2 m³ (măsurați în aceleași condiții de presiune și temperatură).

Concentrația dioxidului de sulf în procente de volum va fi:

În 10 m³ de aer din cameră ..... 2 m³ SO_3
100 m³ ..... Y m³ SO_2

$Y = 20\%$ procente volumetrice.

IX.1°. Subiectul va fi tratat conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Constatarea experimentală a dependenței vitezei de reacție de temperatură. Explicația calitativă a creșterii vitezei de reacție cu creșterea temperaturii pentru majoritatea reacțiilor chimice. Ciocniri eficace, energie de activare. Relația lui *Arrhenius*. Semnificația mărimilor care intră în această relație. Determinarea energiei de activare a unei reacții prin măsurarea constantei de viteză la cel puțin două temperaturi diferite. Influența temperaturii asupra echilibrului chimic. Deplasarea echilibrului în sensul reacției endoterme la creșterea temperaturii și în sensul reacției exoterme la scăderea acesteia. Exemple. Aplicarea principiului *Le Châtelier* în acest caz.

2°. a) Reacția de ionizare a HCN în soluție apoasă este:

$$HCN + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + CN^-.$$

Expresia constantei de ionizare (constantei de aciditate) va fi:

$$K_a = \frac{[H_3O^+][CN^-]}{[HCN]}.$$

Făcînd aproximația că HCN este un acid mult mai tare decît apa ca acid, se poate neglija concentrația ionilor hidroniu proveniți din apă și ca atare $[H_3O^+]=[CN^-]$.

În această aproximație, dacă α este gradul de ionizare a acidului cianhidric în condițiile date, la echilibru avem:

$$[H_3O^+] = [CN^-] = \alpha \cdot C \text{ și } [HCN] = C(1 - \alpha)$$

Deci:

$$K_a = \frac{\alpha^2 \cdot C^2}{C(1-\alpha)} = \frac{\alpha^2 \cdot C}{1-\alpha}.$$

Avînd în vedere că $\alpha \ll 1$ se poate scrie relația aproximativă:

$$K_a = \alpha^2 \cdot C \text{ și înlocuind } \alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\% = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$$

și $C = 2 \cdot 10^{-1}$ se obține: $K_a = 3{,}92 \cdot 10^{-9}$ mol · dm^{-3}.

b) $[H_3O^+] = [CN^-] = \alpha \cdot C = 1{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}2 = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ mol · dm^{-3}.

c) Fie V volumul de apă ce trebuie adăugat. Soluția astfel obținută va avea concentrația $C_1 = \frac{1}{1+V} \cdot C$ deoarece cei C moli de HCN existenți în 1 l soluție inițială se vor regăsi în $1 + V$ l de soluție diluată.

Scanned with OKEN Scanner

Constanta de aciditate are aceeași valoare și în soluția diluată ca și în cea inițială, deci dacă α_1 este gradul de disociere în soluția diluată, avem:

$$\alpha_1^2 \cdot C_1 = \alpha^2 \cdot C \text{ și } \frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}.$$

Cum $\alpha_1 = 2\alpha$ (gradul de disociere trebuie să se dubleze) rezultă $\frac{C_1}{C} = \frac{\alpha^2}{(2\alpha)^2} = \frac{1}{4}$. Dar $\frac{C_1}{C} = \frac{1}{1+V} = \frac{1}{4}$, de unde rezultă $V = 3$ l.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. a) Se calculează formula brută a compusului organic dat:

$$C : \frac{38,4}{12} = 3,2 \rightarrow C : \frac{3,2}{1,6} = 2$$

$$Cl : \frac{56,8}{35,5} = 1,6 \rightarrow Cl : \frac{1,6}{1,6} = 1$$

$$H : \frac{4,8}{1} = 4,8 \rightarrow H : \frac{4,8}{1,6} = 3.$$

Formula brută: C_2H_3Cl.

Se determină apoi formula moleculară: $(C_2H_3Cl)_n = 125; 62,5\ n = 125; n = 2$.

Deci formula moleculară este $C_4H_6Cl_2$.

b) Izomerii posibili cu formula moleculară $C_4H_6Cl_2$ sînt:

— Cu doi atomi de clor la același atom de C:

$CH_3-CH_2-HC=CCl_2$;

$CH_3-CH=CH-CHCl_2$ (*cis* + *trans*);

$CH_2=CH-CH_2-CHCl_2$;

$CH_2=CH-CCl_2-CH_3$;

$H_2C=C(CH_3)-CHCl_2$;

$CH_3-C(CH_3)=CCl_2$;

— Cu cei doi atomi de clor la doi atomi de C:

$CH_3-CH_2-C(Cl)=CH(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_3-CH(Cl)-HC=CH(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_3-CH=C(Cl)-CH_2(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_3-C(Cl)=CH-CH_2(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_2=CH-CH(Cl)-CH_2(Cl)$;

$CH_2=C(Cl)-CH_2-CH_2(Cl)$;

$CH_2=C(CH_2Cl)-CH_2(Cl)$;

$CH_2=C(CH_3)-CHCl(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_2-CH_2-CH=CH$ (Cl și Cl) (*cis* + *trans*);

$CH_3-CH(Cl)-C=CH_2(Cl)$;

$H_2C-HC(Cl)=CH-CH_2(Cl)$ (*cis* + *trans*);

$CH_3-C(Cl)=C(Cl)-CH_3$ (*cis* + *trans*).

c) Atomii de Ċ sînt asimetrici și compușii respectivi prezintă activitate optică (cîte doi enantiomeri).

d) Ținînd cont că reacția de hidroliză are loc numai la nivelul atomilor de halogen legați de atomii de carbon cu hibridizare sp^3 (derivați halogenați cu reactivitate normală), se pot scrie următoarele ecuații ale reacțiilor de hidroliză pentru toți compușii halogenați de mai sus:

$$CH_3-CH=CH-CHCl_2 + H_2O \rightarrow CH_3-CH=CH-CHO + 2\ HCl$$

$$CH_2=CH-CH_2-CHCl_2 + H_2O \rightarrow CH_2=CH-CH_2-CHO + 2\ HCl$$

$$CH_2=CH-CCl_2-CH_3 + H_2O \rightarrow CH_2=CH-CO-CH_3 + 2\ HCl$$

$$CH_2=\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}-CHCl_2 + H_2O \rightarrow CH_2=\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}-CHO + 2HCl$$

$$CH_3-CH=\underset{\displaystyle Cl\ \ Cl}{\underset{|\ \ |}{C}}-CH_2 + HOH \rightarrow CH_3-CH=\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}-CH_2OH + HCl$$

$$CH_2=CH-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH_2}} + 2\ H_2O \rightarrow CH_2=CH-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH_2}} + 2\ HCl$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}}-CH=CH + HOH \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH=CH$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}=CH-CH_2 + HOH \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}=CH-CH_2 + HCl$$

$$CH_2=\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}-CH_2-CH_2 + HOH \rightarrow CH_2=\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}-CH_2-CH_2OH + HCl$$

$$CH_2-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}=CHCl + HOH \rightarrow HOCH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}=CHCl + HCl$$

$$CH_2-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{C}}-CH_2Cl + 2\ HOH \rightarrow CH_2-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{C}}-CH_2 + 2\ HCl$$

$$CH_2-CH_2-CH=\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}} + HOH \rightarrow CH_2-CH_2-CH=\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}} + HCl$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}}-C=CH_2 + HOH \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-C=CH_2 + HCl$$

$$CH_2-CH=CH-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH_2}} + 2\ HOH \rightarrow CH_2-CH=CH-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH_2}} + 2\ HCl$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație: Nu s-au luat în considerare izomerii ciclici.

5°. a) Potențialul standard de reducere al aluminiului fiind mai negativ decît al argintului are loc următoarea reacție redox:

$$Al + 3Ag^+ \rightarrow 3Ag + Al^{3+}$$

Fie X numărul de moli de argint depus și atunci $X/3$ reprezintă numărul de moli de aluminiu dizolvat.

Notînd cu Δm creșterea masei sîrmei de aluminiu, aceasta reprezintă diferența dintre masa argintului depus și cea a aluminiului dizolvat. Deci:

$$\Delta m = 108X - \frac{27X}{3} = 2{,}97$$

de unde rezultă $X = 0{,}03$ moli.

Deci masa aluminiului dizolvat va fi: $m_{Al} = \frac{X}{3} \cdot 27 = 0{,}27$ g.

b) Masa argintului depus va fi: $m_{Ag} = 108\ X = 3{,}24$ g.

c) Dacă soluția de azotat de argint are concentrația 1 M înseamnă că:

1 l soluție ..... 1 mol $AgNO_3$
Y l soluție ..... 0,03 moli $AgNO_3$

$Y = 0{,}03$ l $= 30$ cm^3 soluție de $AgNO_3$ 1 M.

d) Soluția finală conține numai azotat de aluminiu căci tot argintul a fost depus. Numărul de moli de azotat de aluminiu format este $X/3 = 0{,}01$, în același volum de soluție de 30 cm^3.

Deci:

0,03 l soluție ..... 0,01 moli $Al(NO_3)_3$
1 l soluție ..... Z moli $Al(NO_3)_3$

$Z = 1/3$ moli.

Concentrația molară a soluției finale este deci 1/3 M.

X.1°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a. (Vezi problema I.1°.)

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. a) $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{} CH_3-CH=CH_2 \xrightarrow{+HCl} CH_3-\underset{\underset{Cl}{|}}{CH}-CH_3$

A (propenă) — B (2-clorpropan)

b) Se calculează masa alcoolului izopropilic:

$$m = 40 \cdot 0{,}85 = 34 \text{ g}.$$

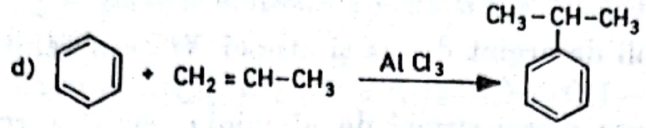
60 g alcool ..... 22,4 l A (propenă)
34 g X

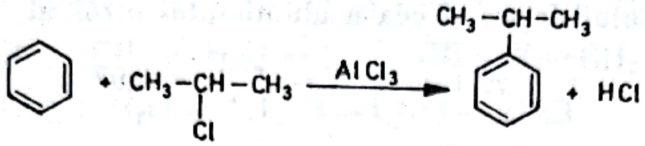
$X = \frac{22{,}4 \cdot 34}{60}$ l $= 12{,}7$ l A.

Scanned with OKEN Scanner

c) 60 g alcool ..... 78,5 g B (2-clorpropan)
34 g X

$$X = \frac{34 \cdot 78,5}{60}\ g = 44,48\ g\ B.$$

d) 



4°. a) Se stabilesc numerele de oxidare ale cromului și ferului în substanțele inițiale și în cele finale (celelalte elemente nu își schimbă starea de oxidare).

Cr: în $K_2Cr_2O_7$: $2 \times (+1) + 2X + 4 \times (-2) = 0$ de unde rezultă: $X = +6$;

în $Cr_2(SO_4)_3$: $2Y + 3 \times (-2) = 0$ de unde $Y = +3$;

Fe: în $FeSO_4$: $Z = +2$:

în $Fe_2(SO_4)_3$: $W = +3$.

Deci au loc următoarele procese:

— Cromul trece de la starea de oxidare +6 la starea de oxidare +3 și se reduce acceptînd 3 electroni:

$$Cr^{+6} + 3\ e^- \rightarrow Cr^{+3}$$

$$Fe^{+2} - 1\ e^- \rightarrow Fe^{+3}.$$

— Ferul se oxidează cedînd un electron și trece de la starea de oxidare +2 la starea de oxidare +3.

Pentru ca numărul de electroni cedați și acceptați să fie același, pentru fiecare atom de crom trebuie luați 3 atomi de fer. Cum în $K_2Cr_2O_7$ există doi atomi de crom care se reduc, sulfatul feros va trebui luat de 6 ori. Pe baza conservării numărului de atomi se obțin și coeficienții celorlalte substanțe participante la reacție:

$$K_2Cr_2O_7 + 6\ FeSO_4 + 7\ H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + Cr_2(SO_4)_3 + 3\ Fe_2(SO_4)_3 + 7\ H_2O.$$

b) În această reacție clorul este și oxidant și reducător (reacție de disproporționare). Un atom de clor se oxidează cedînd 5 electroni (formal numai) și trece de la starea de oxidare zero la starea de oxidare + 5 (în $NaClO_3$):

$$Cl^0 - 5e^- \rightarrow Cl^{+5}.$$

Un alt atom de clor se reduce acceptînd un electron și trece de la starea de oxidare zero la starea de oxidare —1:

$$Cl^0 + 1e^- \rightarrow Cl^-.$$

Pentru ca numărul de electroni cedați și acceptați să fie același, ultima reacție trebuie înmulțită cu 5. Deci:

$$3\ Cl_2 + 6\ NaOH \rightarrow NaClO_3 + 5\ NaCl + 3\ H_2O.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe baza acestei ecuații se poate calcula volumul de clor necesar obținerii unui kg de clorat de sodiu: $M_{NaClO_3} = 106,5$;

106,5 kg $NaClO_3$ ..... $3 \times 22,4$ m^3 Cl_2
1 kg $NaClO_3$ ..... X m^3 Cl_2

Rezultă $X = 0,631$ m^3 Cl_2 în condiții normale. Evident acest calcul presupune un randament al reacției de 100%.

XI.1°. Subiectul va fi tratat în conformitate cu manualul de liceu pentru cl. a IX-a.

2°. a) Se calculează mai întîi cantitatea de acid sulfuric pur existent în soluția utilizată:

100 g soluție ..... 9,8 g H_2SO_4
15 g soluție ..... X g H_2SO_4

$X = 1,47$ g acid sulfuric pur.

Acest acid neutralizează soluția alcalină ce a rezultat la descompunerea amalgamului:

$$Na(Hg) + H_2O \rightarrow NaOH + Hg + 1/2\ H_2$$

și

$$2\ NaOH + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O.$$

Rezultă că un mol de acid sulfuric se consumă în reacția cu hidroxidul provenit din doi atomi-gram de sodiu:

2×23 g Na ..... 98 g H_2SO_4
Y g Na ..... 1,47 g H_2SO_4

$Y = 0,69$ g Na.

Deci cele 15 g de amalgam conțin 0,69 g de sodiu, de unde conținutul procentual de sodiu în amalgam este:

15 g amalgam ..... 0,69 g Na
100 g amalgam ..... Z g Na

$Z = 4,6\%$ Na.

b) Masa molară a sulfatului de sodiu este 142. Deci:

98 g H_2SO_4 ..... 142 g Na_2SO_4
1,47 g H_2SO_4 ..... m g Na_2SO_4

$m = 2,13$ g Na_2SO_4 care se formează.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. a) $C_6H_5-COOH \xrightarrow{t^\circ} C_6H_6 + CO_2$

122 g C_6H_5-COOH ..... 78 g C_6H_6
X ..... 39 g C_6H_6

$$X = \frac{39 \cdot 122}{78} = 61 \text{ g } C_6H_5-COOH \text{ (la } \eta = 100\%).$$

Scanned with OKEN Scanner

Avînd în vedere randamentul de 90%:

Din 100 g C_6H_5—COOH inițial .....90 g (se transformă în benzen)
X .....61 g

$$X = 61 \cdot \frac{100}{90} \text{ g} = 67{,}77 \text{ g } C_6H_5\text{—COOH}.$$

b) 78 g C_6H_6.....22,4 l CO_2
39 g C_6H_6 X

$$X = \frac{39 \cdot 22{,}4}{78} = 11{,}2 \text{ l } CO_2.$$

XII.1°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a. Pentru partea de generalități (Vezi problema IV.1°.)

Aplicații în tehnologia chimică: Obținerea metalelor alcaline prin electroliza clorurilor în topitură. Obținerea beriliului. Obținerea aluminiului din bauxită. Fabricarea hidroxidului de sodiu și de potasiu prin electroliza soluțiilor de clorură de sodiu, respectiv de potasiu. Procedeul cu diafragmă și procedeul cu catod de mercur. Electroliza sărurilor acizilor carboxilici. Purificarea metalelor prin electroliză, electrorafinarea cuprului și argintului.

Alte aplicații ale electrolizei: galvanotehnica, obținerea apei grele etc.

2°. a) Ecuația reacției de descompunere termică a carbonatului de calciu este:

$$CaCO_{3(s)} \xrightarrow{t^\circ} CaO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Deci reziduul solid conține oxid de calciu și carbonat de calciu nedescompus. Fie X numărul gramelor de $CaCO_3$ descompus. Atunci oxidul de calciu rezultat va fi:

100 g $CaCO_3$ .....56 g CaO
X g $CaCO_3$ .....m_1 g CaO

$m_1 = 0{,}56\ X$ g CaO rezultat.

Masa carbonatului nedescompus va fi: $m_2 = 1 - X$ g.
Masa reziduului solid: $m = m_1 + m_2 = 1 - X + 0{,}56\ X = 0{,}7$.
Rezolvînd ecuația rezultă: $X = 0{,}6818$ g $CaCO_3$ descompus.
Deci $m_2 = 1 - X = 0{,}3182$ g $CaCO_3$ nedescompus
$m_1 = 0{,}56\ X = 0{,}3818$ g CaO rezultat.
Volumul de CO_2 se calculează din carbonatul de calciu descompus:

100 g $CaCO_3$ .....22,4 l CO_2 (c.n.)
0,6818 g $CaCO_3$ .....Y l CO_2 (c.n.)

$Y = 0{,}1527$ l CO_2 măsurat în condiții normale.

Observație: Există și alte variante de rezolvare. Așa de exemplu, se poate nota cu X numărul de moli de $CaCO_3$ descompus, ceea ce va reprezenta evident și numărul de moli de CaO format și numărul de moli de CO_2 degajat.

Masa molară a $CaCO_3$ fiind 100, numărul inițial de moli supus descompunerii va fi 1/100 și făcînd masa totală a reziduului se obține:

$$(0{,}01 - X) \cdot 100 + 56\ X = 0{,}7.$$

Rezolvînd ecuația se găsește $X = 0{,}3/44$ moli de $CaCO_3$ descompus.

Scanned with OKEN Scanner

Calculînd mai departe masele oxidului de calciu rezultat şi carbonatului de calciu nedescompus şi volumul dioxidului de carbon degajat se regăsesc aceleaşi rezultate ca în prima variantă de calcul.

b) Randamentul descompunerii termice a CaO_3 este raportul dintre masa carbonatului descompus şi masa carbonatului introdus în reacţie. Deci:

$$\eta = \frac{0{,}6818\ g}{1\ g} = 0{,}6818 = 68{,}18\%.$$

c) Cele 0,7 g reziduu conţin 0,3818 g CaO şi 0,3182 g $CaCO_3$.
Masa calciului din acest reziduu va fi:

$$m_{Ca} = \frac{0{,}3818}{56} \cdot 40 + \frac{0{,}3182}{100} \cdot 40 = 0{,}4000\ g\ Ca.$$

Masa oxigenului este:

$$m_C = \frac{0{,}3818}{56} \cdot 16 + \frac{0{,}3182}{100} \cdot 48 = 0{,}2618\ g\ oxigen.$$

Masa carbonului: $m_O = \frac{0{,}3182}{100} \cdot 12 = 0{,}0382$ g carbon.

Raportînd masa fiecărui element la 100 se obţine:

57,14% calciu; 5,46% carbon şi 37,40% oxigen.

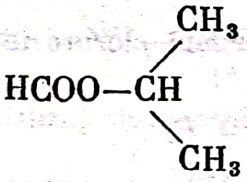
3°. Conform programei şi manualelor şcolare.

4°. Esterii izomeri posibili cu formula moleculară $C_4H_8O_2$ sînt:

$CH_3—CH_2—COOCH_3$ propionat de metil

$CH_3—COOCH_2—CH_3$ acetat de etil

$HCOOCH_2—CH_2—CH_3$ formiat de propil



formiat de izopropil

a) $C_4H_8O_2 + 5\ O_2 = 4\ CO_2 + 4\ H_2O$.

Pentru a arde 1 mol ester sînt necesari $5 \cdot 22{,}4$ l oxigen = 112 l O_2

100 l aer ..... 20 l oxigen

X l ..... 112 l

$$X = \frac{112 \cdot 100}{20} = 560\ l\ aer\ (teoretic\ necesar).$$

Folosind un volum dublu:

$$2 \times 560 = 1120\ l\ aer.$$

Din acest volum se scade volumul oxigenului necesar arderii:

$$1120\ l - 112\ l = 1008\ l.$$

Se calculează volumul de dioxid de carbon rezultat.
Dintr-un mol de ester rezultă $4 \cdot 22{,}40$ l CO_2 = 89,6 l CO_2.
Volumul total de gaze = 1008 + 89,6 = 1097,6 l.

Scanned with OKEN Scanner

5°. A. a) Ecuația reacției de neutralizare a acidului clorhidric cu hidroxid de potasiu este:

$$HCl + KOH = KCl + H_2O$$

atît acidul cît și baza fiind electroliți tari.

Se calculează numărul de moli de HCl și, respectiv, KOH din soluțiile utilizate:

1000 ml soluție HCl ..... 0,1 moli HCl
10 ml soluție HCl ..... X moli HCl

$X = 1 \cdot 10^{-3}$ moli HCl.

1000 ml soluție KOH ..... 0,2 moli KOH
5 ml soluție KOH ..... Y moli KOH

$Y = 1 \cdot 10^{-3}$ moli KOH.

Rezultă că cele două soluții conțin același număr de moli, deci soluția rezultată prin amestecarea lor va conține numai NaCl și apă. Cum această sare provine de la un acid tare și o bază tare, ea nu hidrolizează în soluție apoasă și ca atare *p*H-ul ei corespunde mediului neutru, fiind egal cu șapte.

b) Se calculează ca și la punctul precedent numărul de moli de HCl și, respectiv, de KOH și se găsește $6 \cdot 10^{-3}$ moli de HCl și, respectiv, $2 \cdot 10^{-3}$ moli de KOH. Rezultă că în acest caz acidul clorhidric este în exces și la amestecare se vor neutraliza numai $2 \cdot 10^{-3}$ moli de HCl rămînînd deci $4 \cdot 10^{-3}$ moli de HCl.

Volumul soluției obținute prin amestecarea celor două soluții inițiale devine 40 ml și el conține:

40 ml soluție finală ..... $4 \cdot 10^{-3}$ moli HCl
1000 ml soluție finală ..... X moli HCl

$X = 0{,}1$ moli HCl la un litru de soluție.

Din considerentele arătate la punctul precedent clorura de potasiu nu hidrolizează iar acidul clorhidric este complet ionizat:

$$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-.$$

Neglijînd evident concentrația ionilor de hidroniu proveniți din ionizarea apei, rezultă că ionii de hidroniu din soluție vor avea aceeași concentrație molară ca și acidul clorhidric deci $[H_3O^+] = 0{,}1$ moli pe litru. *p*H-ul soluției va fi:

$$pH = - \lg [H_3O^+] = 1.$$

B. Reacția amoniacului cu apa se poate scrie:

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + HO^-.$$

Expresia constantei de bazicitate va fi:

$$K_b = \frac{[NH_4^+] \cdot [HO^-]}{[NH_3]}$$

Se fac următoarele aproximații:

1. Amoniacul este o bază destul de slabă pentru a putea neglija concentrația moleculelor sale care au reacționat cu apa în comparație cu cea a moleculelor care nu au reacționat și ca atare, la echilibru, concentrația amoniacului poate fi considerată egală cu concentrația sa inițială pe care o notăm cu C moli/l. Deci $[NH_3] = C$ mol/l.

Scanned with OKEN Scanner

2. Amoniacul este totuşi o bază mult mai tare ca apa aşa că se poate neglija concentraţia ionilor HO^- proveniţi din ionizarea apei în comparaţie cu concentraţia aceloraşi ioni obţinuţi din reacţia amoniacului cu apa. Aceasta înseamnă că $[NH_4^+] = [HO^-]$.

În aceste aproximaţii se poate scrie:

$$K_b = \frac{[OH^-]^2}{C}.$$

Dar $[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]}$ unde K_{H_2O} este produsul ionic al apei şi înlocuind avem:

$$K_b = \frac{K^2_{H_2O}}{C \cdot [H_3O^+]^2}$$

de unde rezultă: $[H_3O^+] = \frac{K_{H_2O}}{\sqrt{K_b \cdot C}}$.

Înlocuind valorile numerice se obţine:

$$[H_3O^+] = \frac{10^{-14}}{\sqrt{1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} = 1/6 \cdot 10^{-10} \text{ moli/l.}$$

XIII.1°. Conform programei şi manualelor şcolare.

2°. Conform programei şi manualelor şcolare.

3°. $(CH_3)_2CH - NH_2 + C_2H_5 - Br \rightarrow [(CH_3)_2CH - \overset{+}{N}H_2 - CH_2 - CH_3]\,Br^-$

izopropilamină — bromură de etil — bromură de etilizopropilamoniu

$$(CH_3)_2CH - NH - CH_2CH_3 \xrightarrow[-NH_4Br]{+NH_3} \xrightarrow{C_2H_5-Br} [(CH_3)_2CH - \overset{+}{N}H(CH_2 - CH_3)_2]\,Br^-$$

etilizopropilamină — bromură de dietilizopropilamoniu

$$(CH_3)_2CH - N(CH_2 - CH_3)_2 \xrightarrow[-NH_4Br]{+NH_3} \xrightarrow{C_2H_5-Br} [(CH_3)_2CH - \overset{+}{N}(CH_2 - CH_3)_3]\,Br^-$$

dietilizopropilamină — bromură de izopropiltrietilamoniu (sare cuaternară de amoniu)

4°. a) Ecuaţia reacţiei dintre carbura de calciu (acetilură de calciu) şi apă:

$$CaC_2 + H_2O \rightarrow \underset{\text{acetilenă}}{C_2H_2} + Ca(OH)_2$$

64 kg CaC_2 (1 kmol) ..... 22 400 l (1 kmol)
X 4480

$$X = \frac{64 \cdot 4480}{22\,400} = 12{,}8 \text{ kg}$$

20 kg carbid ..... 12,8 kg CaC_2 (pură)
100 kg carbid X

$$X = \frac{1280}{20} = 64\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Ecuația reacției de piroliză a metanului în vederea obținerii acetilenei:

$$2\ CH_4 \xrightarrow{1500^\circ C} C_2H_2 + 3H_2$$

22,4 l C_2H_2 (1 mol) ..... $2 \cdot 22{,}4$ l (2 mol) CH_4
4480 l X

$X = 2 \cdot 44480$ l $= 8960$ l CH_4 (dacă $\eta = 100\%$).

Randamentul reacției de piroliză este de 60% deci:

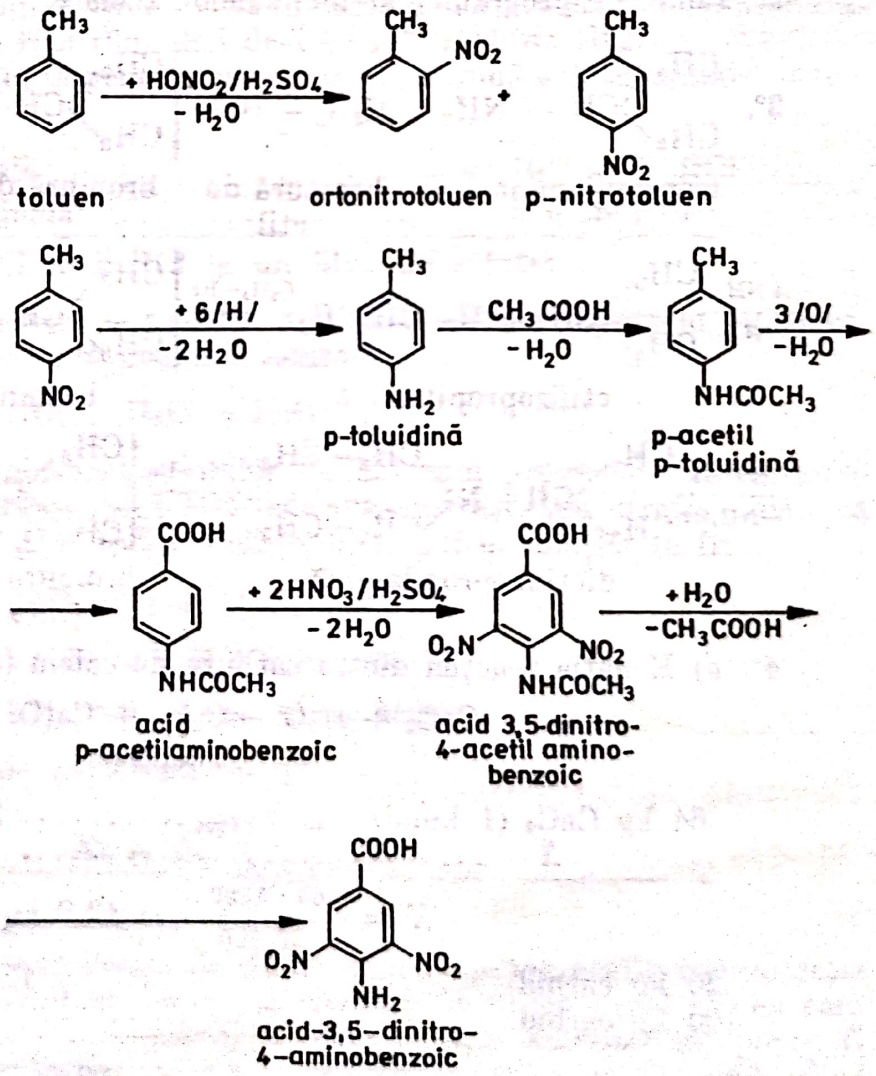
100 l CH_4 se transformă în acetilenă numai 60 l CH_4
X ..... 8960 l CH_4

$$X = \frac{100 \cdot 8960}{60} \doteq 14933{,}3 \text{ l.}$$

XIV.1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Schema de transformări cerută de problemă este următoarea:



Mecanismul reacției de nitrare — conform manualului.

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Se determină formula moleculară:

$$C: \frac{85,7}{12} = 7,14$$

$$H: \frac{14,30}{1} = 14,30$$

$$\text{nr. de atomi de C: } \frac{7,14}{7,14} = 1$$

$$\text{nr. de atomi de H: } \frac{14,30}{7,14} = 2.$$

Deci substanța are formula brută CH_2.
Formula moleculară se determină astfel:

$$(CH_2)_n = M$$

$$14\,n = 56$$

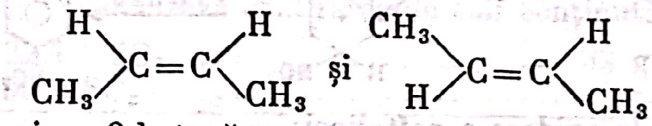
$$n = \frac{56}{14} = 4.$$

Deci formula moleculară este C_4H_8.

b) Formula moleculară corespunde unei alchene (C_nH_{2n}) și deci formulele izomerilor posibili sînt:

1. $CH_2 = CH-CH_2-CH_3$ 1-butenă
2. $CH_3-CH = CH-CH_3$ 2-butenă (*cis* + *trans*)
3. $CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle |}{C}} = CH_2$ izobutenă (2-metilpropenă)

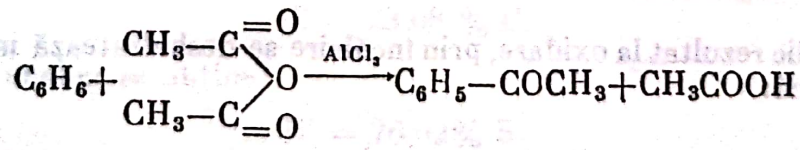
c) 1 cu 2 sînt izomeri de poziție.
1 cu 3 și, respectiv, 2 cu 3 sînt izomeri de catenă.
În cazul 2-butenei avem doi izomeri geometrici:



cis — 2-butenă *trans* — 2-butenă

XV.1°. Conform programei și manualelor școlare.
2°. Conform programei și manualelor școlare.
3°. a) Acetofenona se poate sintetiza pe următoarele căi:

$$C_6H_6 + CH_3COCl \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-COCH_3 + HCl$$

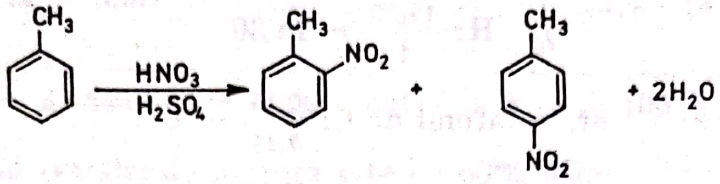


$$C_6H_6 + C_2H_5Cl \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CH_2-CH_3 + HCl$$

$$C_6H_5-CH_2-CH_3 \xrightarrow{2[O]} C_6H_5-\overset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{C}}-CH_3 + H_2O$$

orto- şi *para*-Nitrotoluenul se poate obţine prin următoarele reacţii:

$$C_6H_6+CH_3Cl \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CH_3+HCl$$



Pentru a obţine acetanilida (acetilanilina) se pot folosi ca materii prime organice benzenul şi acidul acetic:

$$C_6H_6+HNO_3 \xrightarrow{H_2SO_4} C_6H_5-NO_2+H_2O$$

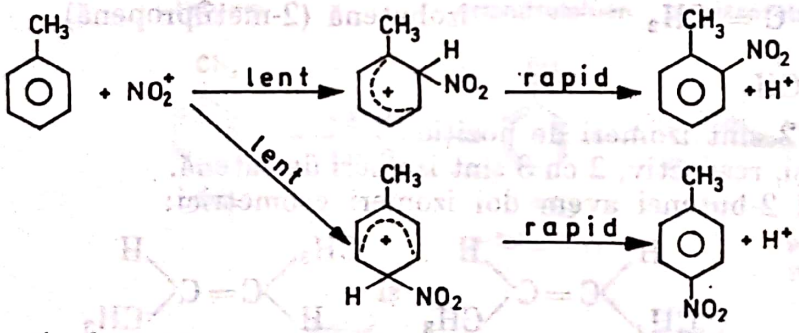
$$C_6H_5-NO_2+6[H] \rightarrow C_6H_5-NH_2+2\,H_2O$$

$$C_6H_5-NH_2+CH_3COOH \rightarrow C_6H_5-NHCOCH_3+H_2O.$$

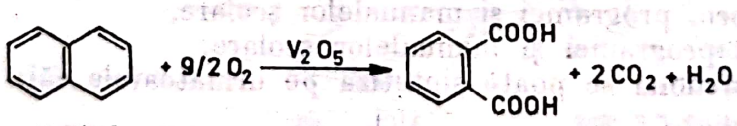
b) Mecanismul reacţiei de nitrare a toluenului poate fi schiţat în modul următor:

$$HNO_3+2\,H_2SO_4 \rightarrow NO_2^+ + 2\,HSO_4^- + H_3O^+.$$

Ţinînd seama de faptul că radicalul metil este substituent de ordinul I, atacul reactantului electrofil (NO_2^+) va avea loc în poziţiile *orto* şi *para*:

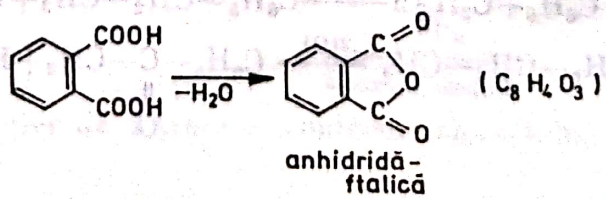


4°. a) Ecuaţia de oxidare a naftalinei:



naftalină — acid ortoftalic

Acidul ftalic rezultat la oxidare, prin încălzire se deshidratează intern rezultînd anhidrida ftalică:



anhidridă-ftalică

b) Se observă că dintr-un mol de naftalină se obține un mol de anhidridă ftalică. Deci:

$$\begin{array}{l} 128 \text{ g (1 mol) } C_{10}H_8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 148 \text{ g (1 mol) } C_8H_4O_3 \\ 1000 \text{ g } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X \end{array}$$

$$X = \frac{148 \cdot 1000}{128} \text{ g } C_8H_4O_3$$

$$X = 1156{,}2 \text{ g } C_8H_4O_3$$

$$\text{nr. de moli} = \frac{1156{,}2}{148} = 7{,}8 \text{ moli.}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } 128 \text{ g (1 mol) } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{9}{2} \cdot 22{,}4 \text{ l } O_2 \left(\frac{9}{2} \text{ moli}\right) \\ 1000 \text{ g } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X \end{array}$$

$$X = 787{,}4 \text{ l } O_2$$

$$\begin{array}{l} 100 \text{ l aer } \ldots\ldots\ldots\ldots\ 20 \text{ l } O_2 \\ X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 787{,}4 \end{array}$$

$$X = \frac{78740}{20} = 3937 \text{ l aer.}$$

XVI.1°. Subiectul va fi tratat în conformitate cu manualul de liceu pentru clasa a IX-a (Vezi și problema VIII.1°.).

2°. Subiectul va fi tratat în conformitate cu manualul de liceu pentru clasele IX-a și a XI-a. (Vezi problema IX.1°.).

3°. a) Se calculează cantitatea de carbon conținută în cele 88 g de CO_2:

$$\begin{array}{l} 44 \text{ g } CO_2 \ \ldots\ldots\ldots\ 12 \text{ g C} \\ 88 \text{ g } CO_2 \ \ldots\ldots\ldots\ X \text{ g C} \end{array}$$

$$X = 24 \text{ g C.}$$

În mod analog se calculează cantitatea de sulf conținută în cei 56 l de SO_2:

$$\begin{array}{l} 22{,}4 \text{ l } SO_2 \ \ldots\ldots\ldots\ 32 \text{ g S} \\ 56 \text{ l } SO_2 \ \ldots\ldots\ldots\ Y \text{ g S} \end{array}$$

$$Y = 80 \text{ g S.}$$

Rezultă că amestecul inițial are masa: $m = 80 + 24 = 104$ g și compoziția procentuală:

$$\begin{array}{l} 104 \text{ g amestec } \ldots\ldots\ldots\ 24 \text{ g C} \\ 100 \text{ g amestec } \ldots\ldots\ldots\ Z \text{ g C} \end{array}$$

$$Z = 23{,}08 \text{ \% C.}$$

În mod analog se obține:

$$W = 76{,}92\% \text{ S.}$$

b) Ecuațiile reacțiilor de ardere sînt:

$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$

$$S + O_2 \rightarrow SO_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează oxigenul necesar. Avînd în vedere că avem doi moli de carbon și 2,5 moli de sulf și că la fiecare mol de carbon și sulf se consumă cîte un mol de oxigen în total vor fi necesari 4,5 moli de oxigen adică $4,5 \times 22,4 = 100,8$ l oxigen (în condiții normale). Volumul de aer necesar va fi:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ l aer} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 20 \text{ l } O_2 \\ X \text{ l aer} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 100,8 \text{ l } O_2 \end{array}$$

$X = 504$ l aer teoretic necesar arderii amestecului dat de carbon și sulf.

c) Gazele rezultate la ardere vor conține:
56 l SO_2;
88 g CO_2 = 2 moli = 44,8 l CO_2;
504 l aer — 100,8 l O_2 = 403,2 l N_2.
Volumul total al gazelor de ardere va fi deci 504 l.
Compoziția în procente de volum a acestui amestec gazos este:

$$\frac{56}{504} \times 100 = 11,11\% \ SO_2$$

$$\frac{44,8}{504} \times 100 = 8,89\% \ CO_2$$

$$\frac{403,2}{504} \times 100 = 80,00\% \ N_2$$

4°. Caracterul acid, bazic sau neutru al soluțiilor apoase de săruri depinde de natura sării și posibilitatea acesteia de a hidroliza.

Sărurile provenite din acizi tari și baze tari nu hidrolizează în soluție apoasă și ca atare aceste soluții au caracter neutru ($pH = 7$).

Acestea sînt:

a) K_2SO_4 — sare provenită din acid sulfuric și hidroxid de potasiu;

b) $NaNO_3$ — sare provenită din acid azotic și hidroxid de sodiu.

Sărurile provenite din acizi slabi și baze tari vor hidroliza în soluție apoasă și soluția va avea un caracter bazic ($pH > 7$). Din această categorie fac parte:

a) Na_2CO_3 — sare provenită din hidroxid de sodiu și acid carbonic (acid slab). Reacția de hidroliză este:

$$Na_2CO_3 + H_2O \rightleftarrows NaOH + NaHCO_3$$

sau ionic:

$$CO_3^{-2} + H_2O \rightleftarrows HCO_3^- + HO^-.$$

Cea de a doua treaptă de hidroliză cu formare de H_2CO_3 este posibilă dar ponderea ei, la temperatura obișnuită, este extrem de redusă.

b) K_2S — sare provenită de la hidroxidul de potasiu și acidul sulfhidric (acid slab). Reacția de hidroliză este:

$$K_2S + H_2O \rightleftarrows KOH + KHS$$

sau ionic:

$$S^{2-} + H_2O \rightleftarrows HS^- + HO^-.$$

Aceasta este reacția principală, cea de a doua treaptă de hidroliză cu formare de H_2S avînd, de asemenea, o pondere mică la temperatura obișnuită.

Scanned with OKEN Scanner

Sărurile provenite de la acizi tari și baze slabe hidrolizează în soluție apoasă, soluția avînd un caracter acid ($pH < 7$). Din această categorie fac parte:

a) NH_4Cl – sare provenită din acid clorhidric și amoniac (bază slabă). Reacția de hidroliză este:

$$NH_4Cl + H_2O \rightleftarrows HCl + NH_4OH$$

sau ionic:

$$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+.$$

b) $Al_2(SO_4)_3$ — sare provenită din acid sulfuric și hidroxid de aluminiu (bază slabă). Reacția de hidroliză totală este:

$$Al_2(SO_4)_3 + 6\ H_2O \rightleftarrows 2\ Al(OH)_3 + 3\ H_2SO_4.$$

La temperatura obișnuită însă și în acest caz are loc o hidroliză parțială, în trepte:

$$Al^{3+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)^{2+} + H_3O^+$$

și

$$Al(OH)^{2+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)_2^+ + H_3O^+.$$

c) $FeSO_4$ — sare provenită din acid sulfuric și hidroxid feros (bază slabă). Reacția de hidroliză totală este:

$$FeSO_4 + 2\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_2 + H_2SO_4$$

sau ionic:

$$Fe^{2+} + 4\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_2 + 2\ H_3O^+$$

din care predominantă la temperatura obișnuită este numai prima treaptă:

$$Fe^{2+} + 2\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)^+ + H_3O^+.$$

XVII.1°. Subiectul se tratează în conformitate cu manualele de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Proprietăți generale ale substanțelor din categoria acizilor și bazelor. Definirea acizilor după *Brönsted*. Tipuri de acizi: monobazici, polibazici. Exemple. Ionizarea în trepte. Definirea bazelor după *Brönsted*. Tipuri de baze: baze monoacide și baze poliacide, exemple. Acizi tari și acizi slabi. Baze tari și baze slabe. Exemple. Gradul de ionizare. Constanta de aciditate și constanta de bazicitate. Legea diluției a lui *Ostwald*. Acizi organici și baze organice. Exemple. Influența diferiților substituenți asupra tăriei acizilor și bazelor organice.

2°. a) Cantitatea de $KClO_3$ pur din proba inițială este:

$$m_1 = 5 \cdot \frac{90}{100} = 4{,}5\ \text{g}.$$

Deci proba inițială conține 0,5 g impurități care se regăsesc în reziduu.

Fie X cantitatea în g de $KClO_3$ care s-a descompus conform ecuației chimice:

$$2\ KClO_3 \xrightarrow{t^\circ} 2\ KCl + 3\ O_2.$$

A rămas nedescompus $m_2 = 4{,}5 - X$ g $KClO_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează cantitatea m_3 de KCl rezultată la descompunerea celor X g $KClO_3$. Masa molară a cloratului de potasiu este 122,5 iar a clorurii de potasiu 74,5.

$$\begin{array}{l} 2 \times 122{,}4 \text{ g } KClO_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2 \times 74{,}5 \text{ g KCl} \\ X \text{ g } KClO_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m_3 \end{array}$$

$$m_3 = \frac{74{,}5}{122{,}5} X \text{ g KCl.}$$

Exprimînd masa reziduului rămas la calcinare avem:

$$3{,}5 = 0{,}5 + (4{,}5 - X) + \frac{74{,}5}{122{,}5} X.$$

Rezolvînd ecuaţia se găseşte: $X = 3{,}828$ g $KClO_3$ care s-a descompus. Se calculează volumul de oxigen degajat:

$$\begin{array}{l} 2 \times 122{,}5 \text{ g } KClO_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3 \times 22{,}4 \text{ l } O_2 \\ 3{,}828 \text{ g } KClO_3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ Y \text{ l } O_2 \end{array}$$

$Y = 1{,}05$ l oxigen degajat (condiţii normale)

b) Randamentul reacţiei de calcinare este raportul dintre cantitatea de clorat de potasiu descompus şi cantitatea de clorat de potasiu pur existent în proba iniţială, adică:

$$\eta = \frac{X}{m_1} = \frac{3{,}828}{4{,}5} = 0{,}85 = 85\%.$$

c) Reziduul rămas la calcinare este format din 0,5 g impurităţi, 2,328 g KCl rezultat la descompunere şi 0,672 g $KClO_3$ nedescompus. Compoziţia procentuală va fi:

$$\frac{2{,}328}{3{,}50} \times 100 = 66{,}5\% \text{ KCl}$$

$$\frac{0{,}672}{3{,}50} \times 100 = 19{,}2\% \ KClO_3$$

$$\frac{0{,}50}{3{,}50} \times 100 = 14{,}3\% \text{ impurităţi.}$$

Observaţie: Există şi alte variante de rezolvare dintre care mai menţionăm: Masa oxigenului rezultat se poate găsi din diferenţa dintre masa probei iniţiale şi cea a reziduului deoarece oxigenul este singura substanţă care părăseşte sistemul la calcinare. Rezultă astfel 1,5 g oxigen al cărui volum va fi:

$$\begin{array}{l} 32 \text{ g } O_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 22{,}4 \text{ l } O_2 \\ 1{,}5 \text{ g } O_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ V \text{ l } O_2 \end{array}$$

$V = 1{,}05$ l oxigen degajat.

În continuare pe baza ecuaţiei reacţiei de descompunere se poate calcula masa clorurii de potasiu rezultate şi a cloratului de potasiu care s-a descompus iar prin diferenţă, masa cloratului ce a rămas nedescompus. De aici se poate trece apoi la rezolvarea celorlalte puncte ale problemei.

3°. a) Formula moleculară a unui alcool monohidroxilic saturat este $C_nH_{2n+1}OH$, iar a alchenei corespunzătoare C_nH_{2n}.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează procentele de carbon din cele două substanțe:

— din alcool:

$$\begin{array}{l}(12n+2n+2+16)\text{g} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 12n\ \text{g C}\\ 100 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X\end{array}$$

$$X=\frac{12n\cdot 100}{14n+18}\ \%\ \text{C}$$

— din alchenă:

$$\begin{array}{l}(12n+2n)\text{g} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 124\ \text{g C}\\ 100 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X\end{array}$$

$$X=\frac{12n\cdot 100}{14n}\ \%\ \text{C}.$$

Făcînd raportul procentelor de C al celor două substanțe:

$$\frac{124\cdot 100}{14n+18}:\frac{124\cdot 100}{14n}=0{,}700$$

$$\frac{124\cdot 100}{14n+18}\cdot\frac{14n}{124\cdot 100}=0{,}700$$

$$\frac{14n}{14n+18}=\frac{7}{10}$$

$$140n=98n+126 \qquad 42n=126$$

$$140n-98n=126 \qquad n=3.$$

Formula moleculară a alcoolului: C_3H_8O.
Formula moleculară a alchenei: C_3H_6.

b) $CH_3-CH_2-CH_2-OH$ $\qquad$ $CH_2=CH-CH_3$

$CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3$ $\qquad$ $\begin{array}{l}CH_2-CH_2\\ \quad\diagdown\ \diagup\\ \quad\ CH_2\end{array}$

$CH_3-CH_2-O-CH_3$

c) $CH_2=CH-CH_3+Br_2\rightarrow \underset{\displaystyle Br}{\underset{|}{CH_2}}-\underset{\displaystyle Br}{\underset{|}{CH}}-CH_3$

$$\begin{array}{l}1\ \text{mol alchenă} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 160\ \text{g } Br_2\\ 0{,}1\ \text{moli} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ X\end{array}$$

$$X=16\ \text{g } Br_2$$

$$\begin{array}{l}100\ \text{g sol. (1\%)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1\ \text{g } Br_2\\ X \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 16\ \text{g}\end{array}$$

$$X=1600\ \text{g apă de brom 1\%}.$$

4°. Conform programei și manualelor școlare.

5°. a) Caracterul oxidant al acidului azotic se manifestă în multe reacții chimice dintre care menționăm:

Scanned with OKEN Scanner

1. Dizolvarea cuprului metalic în acid azotic:

$$3\,Cu + 8\,HNO_3 \rightarrow 3\,Cu(NO_3)_2 + 2\,NO + 4\,H_2O$$

$$\begin{array}{l|l} Cu^0 - 2\,e^- \rightarrow Cu^{2+} & \times\,3 \\ N^{5+} + 3\,e^- \rightarrow N^{2+} & \times\,2 \end{array}$$

2. Oxidarea hidrogenului sulfurat la sulf:

$$3\,H_2S + 2\,HNO_3 \rightarrow 3\,S + 2\,NO + 4\,H_2O$$

$$\begin{array}{l|l} S^{2-} - 2\,e^- \rightarrow S^\circ & \times\,3 \\ N^{5+} + 3\,e^- \rightarrow N^{2+} & \times\,2 \end{array}$$

3. Oxidarea sulfului la acid sulfuric:

$$S + 2\,HNO_3 \rightarrow H_2SO_4 + 2\,NO$$

$$\begin{array}{l|l} S^\circ - 6\,e^- \rightarrow S^{6+} & \\ N^{5+} + 3\,e^- \rightarrow N^{2+} & \times\,2 \end{array}$$

4. Oxidarea carbonului la dioxid de carbon:

$$3\,C + 4\,HNO_3 \rightarrow 3\,CO_2 + 4\,NO + 2\,H_2O$$

$$\begin{array}{l|l} C^0 - 4\,e^- \rightarrow C^{4+} & \times\,3 \\ N^{5+} + 3\,e^- \rightarrow N^{2+} & \times\,4 \end{array}$$

b) Caracterul reducător al aldehidelor se manifestă în proprietățile lor specifice, diferite de ale cetonelor. Dintre acestea fac parte:

1. Reacția oglinzii de argint, adică reducerea argintului dintr-o soluție amoniacală de hidroxid de argint (reactivul *Tollens*) reacție folosită pentru identificarea aldehidelor și chiar în industrie la fabricarea oglinzilor (în care caz se folosește de obicei glucoza ca aldehidă):

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix} + 2\,[Ag(NH_3)_2]OH \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow OH\end{matrix} + 2\,Ag + 4\,NH_3 + H_2O.$$

2. Reducerea soluției *Fehling*, adică a unei soluții amoniacale de hidroxid de cupru divalent cînd se formează oxidul de cupru monovalent de culoare roșie cărămizie:

$$R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow H\end{matrix} + 2\,Cu(OH)_2 \rightarrow R-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow OH\end{matrix} + Cu_2O + 2\,H_2O.$$

Observație: Sarcinile azotului, sulfului și carbonului nu sînt sarcini reale ci ele reprezintă stările de oxidare respective.

XVIII.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu.

2°. a) La trecerea gazelor rezultate la ardere prin soluția de $Ca(OH)_2$ are loc absorbția dioxidului de carbon cu formare de carbonat de calciu:

$$CO_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$$

Masa moleculară a carbonatului de calciu fiind 100, rezultă că s-au format 1,5 moli de $CaCO_3$ și deci amestecul de gaze a conținut 1,5 moli de CO care prin ardere a format 1,5 moli de CO_2. Dar 1,5 moli $CO = 1{,}5 \cdot 28 = 42$ g CO și amestecul a mai conținut $66-42 = 24$ g $H_2 = 12$ moli H_2. Deci amestecul

inițial de gaze era format din: 24 g H_2 și 42 g CO. Compoziția în procente de masă: $\frac{24}{66} \cdot 100 = 36{,}36\%$ H_2 și $\frac{42}{66} \cdot 100 = 63{,}64\%$ CO.

b) Ecuațiile reacțiilor de ardere sînt:

$$CO + 1/2\ O_2 \rightarrow CO_2$$
$$H_2 + 1/2\ O_2 \rightarrow H_2O.$$

Rezultă că pentru arderea a 1,5 moli de CO sînt necesari 0,75 moli de oxigen iar pentru arderea celor 12 moli de H_2 sînt necesari 6 moli de oxigen adică în total pentru arderea amestecului inițial de gaze sînt necesari teoretic 6,75 moli = $= 6{,}75 \cdot 22{,}4$ l $O_2 = 151{,}2$ l O_2. Dar:

100 l aer ..... 20 l O_2
X l aer ..... 151,2 l O_2

$X = 756$ l aer.

c) Conform ecuației de ardere a hidrogenului, numărul de moli apă ce se formează este egal cu numărul de moli de hidrogen supuși arderii.

Deci cantitatea de apă formată va fi: 12 moli $= 12 \cdot 18 = 216$ g apă rezultată la arderea amestecului dat de gaze.

3°. a) $C_6H_5-CO-CH_3 + C_2H_5MgBr \rightarrow C_6H_5-\underset{\underset{OMgBr}{|}}{\overset{\overset{C_2H_5}{|}}{C}}-CH_3 \xrightarrow{HOH}$

$$\longrightarrow C_6H_5-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{C_2H_5}{|}}{C}}-CH_3 + MgBr(OH).$$

b) $C_6H_5-COC_2H_5 + CH_3MgBr \rightarrow C_6H_5-\underset{\underset{OMgBr}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-C_2H_5 \xrightarrow{HOH}$

$$\longrightarrow C_6H_5-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-C_2H_5 + MgBr(OH).$$

c) $C_2H_5-CO-CH_3 + C_6H_5MgBr \rightarrow C_2H_5-\underset{\underset{OMgBr}{|}}{\overset{\overset{C_6H_5}{|}}{C}}-CH_3 \xrightarrow{HOH}$

$$\longrightarrow C_2H_5-\underset{\underset{OH}{|}}{\overset{\overset{C_6H_5}{|}}{C}}-CH_3 + MgBr(OH).$$

4°. Conform programei și manualelor școlare.

5°. Conform definiției, în teoria protolitică a lui *Brönsted*, vor fi acizi acele specii care sînt capabile să pună în libertate protoni (să cedeze protoni) și vor fi baze acele specii care sînt capabile să accepte (să fixeze) protoni. Deci:

a) NH_4^+ este acid deoarece în soluție apoasă are loc echilibrul:

$$NH_4^+ + H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+.$$

Baza sa conjugată este amoniacul NH_3.

b) NH_3 este bază deoarece existența perechii de electroni neparticipanți pe atomul de azot face posibilă acceptarea de către această moleculă a unui proton:

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + HO^-.$$

Acidul său conjugat este ionul amoniu NH_4^+.

c) CH_3COO^- este de asemenea bază deoarece poate accepta proton:

$$CH_3COO^- + H_2O \rightleftarrows CH_3COOH + HO^-$$

Acidul său conjugat este acidul acetic, CH_3COOH.

d) HCOOH, acidul formic, este un acid el putînd ceda un proton moleculei de apă:

$$HCOOH + H_2O \rightleftarrows HCOO^- + H_3O^+.$$

Baza sa conjugată este ionul formiat, $HCOO^-$.

e) H_2O este un amfolit. Molecula de apă poate avea rolul de acid cînd cedează un proton altei molecule de apă (sau unei alte baze):

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + HO^-$$

și se transformă în baza sa conjugată, ionul HO^-. Dar cealaltă moleculă de apă are rolul de bază acceptînd protonul și trecînd astfel în acidul său conjugat, ionul hidroniu H_3O^+.

XIX.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu.

2°. a) Prin definiție $pH = -\lg[H_3O^+]$ și deci $[H_3O^+] = 1 \cdot 10^{-10}$ mol/l. Dar în soluții apoase, în condiții standard (la 25°C și 1 atm), $[H_3O^+] \cdot [HO^-] = K_{H_2O} = 1 \cdot 10^{-14}$ mol²/l². Rezultă:

$$[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}.$$

b) Fie BOH formula generală a bazei slabe. Expresia constantei de bazicitate este:

$$K_b = \frac{[B^+] \cdot [HO^-]}{[BOH]}.$$

Pentru soluții apoase de baze slabe, în anumite aproximații (Vezi problema XII.5°.) este valabilă relația:

$$K_b = \frac{[HO^-]^2}{C}$$

unde C este concentrația totală a bazei slabe în mol/l. Înlocuind se obține:

$$K_b = \frac{1 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3°. $CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-COOH + [O] \rightarrow CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-COOH + H_2O$

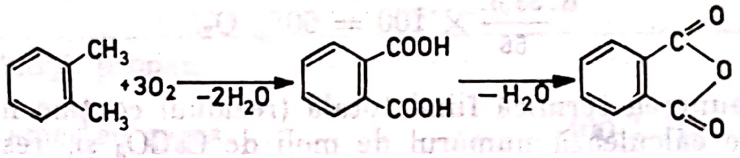
acid (—)lactic — acid piruvic (optic inactiv)

$$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-COOH + 2[H] \rightarrow H-\underset{\underset{COOH}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-OH + HO-\underset{\underset{HOOC}{|}}{\overset{\overset{CH_3}{|}}{C}}-H$$

amestec racemic

Prin oxidarea acidului lactic levogir se obține acidul piruvic (cetoacid) optic inactiv (nu mai are carbon asimetric în moleculă), iar prin reducerea acestuia rezultă cu egală probabilitate cei doi enantiomeri ai acidului lactic (deci un amestec racemic).

4°. a) Ecuațiile reacțiilor de oxidare a ortoxilenului la acid ftalic și de deshidratare a acestuia la anhidridă ftalică sînt:



106 kg ortoxilen ..... 148 kg anhidridă ftalică
1000 kg „ ..... X kg „

$$X = \frac{148\,000}{106} = 1396{,}2 \text{ kg}$$

$$\eta = \frac{1000}{1396{,}2} \cdot 100$$

$$\eta = 71{,}6\%.$$

b) 106 kg ortoxilen ..... $3 \cdot 22{,}4$ m³ O_2
1000 kg „ ..... X m³

$X = 633{,}9$ m³ O_2.

100 m³ aer ..... 20 m² O_2
X m³ ..... 633,9 m³

$X = 3169{,}5$ m³ aer.

c) 106 kg ortoxilen ..... $2 \cdot 18$ kg apă
1000 kg „ X

$X = 339{,}6$ kg apă.

XX.1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu. (Vezi de asemenea problemele X.1°. și XVII.1°).

2°. a) Fie X numărul de moli de CO_2 și Y numărul de moli de O_2 din amestecul gazos. Exprimînd masa și volumul acestui amestec rezultă:

$$44\ X + 32\ Y = 92$$
$$22{,}4\ X + 22{,}4\ Y = 56.$$

Rezolvînd sistemul se obţine: $X = 1$ mol $CO_2 = 44$ g

$Y = 1{,}5$ moli $O_2 = 48$ g.

Compoziţia în procente de masă este:

$$\frac{44}{92} \times 100 = 47{,}83\%\ CO_2$$

$$\frac{48}{92} \times 100 = 52{,}17\%\ CO_2.$$

b) Volumul gazelor din amestec este:

$$1 \text{ mol } CO_2 = 22{,}4 \text{ l } CO_2$$

$$1{,}5 \text{ moli } O_2 = 1{,}5 \times 22{,}4 = 33{,}6 \text{ l } O_2.$$

Compoziţia în procente de volum va fi:

$$\frac{22{,}4}{56} \times 100 = 40\%\ CO_2$$

$$\frac{33{,}6}{56} \times 100 = 60\%\ O_2.$$

c) Descompunerea termică fiind totală (reziduul conţine numai produşii de descompunere) se calculează numărul de moli de $CaCO_3$ şi, respectiv, de $KClO_3$ din amestecul iniţial:

$$CaCO_3 \xrightarrow{t^\circ} CaO + CO_2.$$

Un mol de CO_2 se obţine dintr-un mol de $CaCO_3$.

$$KClO_3 \xrightarrow{t^\circ} KCl + 3/2\ O_2.$$

Dintr-un mol de $KClO_3$ rezultă 1,5 moli de O_2. Aşadar amestecul iniţial de $CaCO_3$ şi $KClO_3$ este echimolecular (raport molar 1 : 1).

3°. Conform programei şi manualelor şcolare.

4°. Ecuaţia reacţiei este următoarea:

$$CH_2{=}CH{-}CH_3 + H_2 \rightarrow CH_3{-}CH_2{-}CH_3.$$

Notăm cu X şi Y volumele de propenă şi, respectiv, de hidrogen.

Deci: $X + Y = 1000$ l.

Presupunînd că hidrogenul este în exces, X l propenă reacţionează cu X l hidrogen rezultînd X l propan. În gazul rezultat se va găsi X l propan şi $(Y-X)$ l hidrogen. Deci:

$$X + Y - X = 700 \text{ l.}$$

$$Y = 700 \text{ l } H_2$$

$$X = 300 \text{ l propenă.}$$

În mod analog, considerînd că propena este în exces, se calculează că:

$$Y = 300 \text{ l } H_2 \text{ şi } X = 700 \text{ l propenă.}$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Cele două compoziţii iniţiale posibile, exprimate în procente de volum sînt:

— în primul caz:

1000 l amestec gazos iniţial .....300 l propenă
100 l .....*a*

$a = 30\%$ propenă şi $b = 70\%$ hidrogen.

— în al doilea caz:

1000 l amestec gazos .....700 l propenă
100 l .....*a*

$a = 70\%$ propenă şi $b = 30\%$ hidrogen.

b) În primul caz:

700 l amestec gazos .....300 l propan
100 .....*u*

$u = 42{,}8\%$ propan

700 l amestec gazos .....400 l H_2
100 l .....*v*

$v = 57{,}2\%$ H_2.

În mod similar în cel de al doilea caz se va găsi compoziţia următoare:

57,2% propan şi 42,8% H_2.

5°. Fie AH formula generală a acidului organic considerat care în soluţie apoasă ionizează conform reacţiei:

$$AH + H_2O \rightleftarrows A^- + H_3O^+.$$

Constanta de aciditate are expresia:

$$K_a = \frac{[H_3O^+] \cdot [A^-]}{[AH]}.$$

Făcînd aproximaţia că acidul este destul de slab pentru a putea neglija concentraţia moleculelor de acid care sînt ionizate în comparaţie cu cea a moleculelor neionizate, se poate scrie $[AH] \cong C$ unde C este concentraţia molară a soluţiei de acid. De asemenea, presupunînd că acidul este totuşi mult mai tare decît apa ca acid, şi deci neglijînd concentraţia ionilor hidroniu proveniţi din ionizarea moleculelor de apă, rezultă: $[H_3O^+] \cong [A^-]$.

În aceste aproximaţii se obţine:

$$K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C}$$

şi rezultă: $[H_3O^+] = \sqrt{K_a \cdot C}$.

Înlocuind valorile numerice avem:

$$[H_3O^+] = \sqrt{5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-1}} = 10^{-3}$$

Soluția va avea $pH = -\lg[H_3O^+] = 3$.

XXI.1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. Ecuația reacției de hidroliză a unei grăsimi este următoarea:

$$\begin{array}{l} CH_2-O-CO-R \\ | \\ CH-O-CO-R \\ | \\ CH_2-O-CO-R \end{array} + 3\,H_2O \rightarrow \begin{array}{l} CH_2\text{-}OH \\ | \\ CH-OH \\ | \\ CH_2-OH \end{array} + 3\,R-COOH$$

1 mol grăsime ..... 92 g glicerină
X moli .....920 g glicerină

$X = 10$ moli (cu randament de 100%).

Ținînd cont de randamentul de transformare a grăsimii în glicerină și acizi grași (de 80%), se calculează cantitatea practică de grăsime:

100 moli grăsime .....80 moli se transformă în glicerină
X moli .....10 moli

$$X = \frac{100\cancel{0}}{8\cancel{0}} = 12{,}5 \text{ moli.}$$

XXII.1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. Se poate obține simultan etanol și metanol pornind de la propanonă (acetonă) prin următoarea succesiune de reacții:

$$CH_3-CO-CH_3 + 2[H] \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{}$$

$$\rightarrow CH_3-CH=CH_2 \xrightarrow{+O_3} CH_3-\underset{\displaystyle O-O}{\underset{|}{CH}}\overset{\displaystyle O}{\diagup\!\!\!\diagdown}\underset{\displaystyle |}{CH_2} \xrightarrow[-H_2O_2]{+H_2O}$$

$$\rightarrow CH_3CHO + CH_2O \xrightarrow{4[H]} CH_3-CH_2-OH + CH_3OH.$$

O altă variantă:

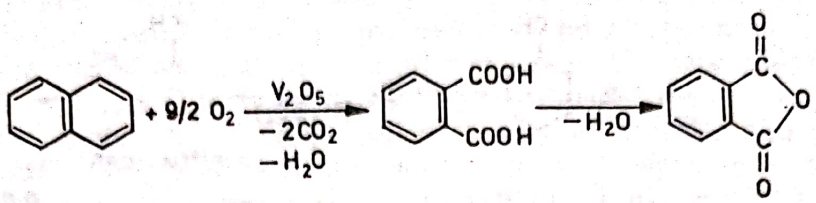
$$CH_3-CH=CH_2 + H_2 \xrightarrow{Ni} CH_3-CH_2-CH_3 \xrightarrow{\text{cracare}}$$

$$CH_2=CH_2 + CH_4$$

$$CH_2=CH_2 + HOH \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_3-CH_2-OH$$

$$CH_4 + 1/2O_2 \rightarrow CH_3OH.$$

5°. Ecuația reacției de oxidare a naftalinei este următoarea:



128 g naftalină ..... 148 g anhidridă ftalică
256 g X

$$X = \frac{256 \cdot 148}{128} = 296 \text{ g (cu } \eta = 100\%)$$

$$296 \cdot \frac{75}{100} = 222 \text{ g anhidridă ftalică (cu } \eta = 75\%).$$

XXIII.1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. a) Succesiunea de reacții prin care se poate obține l-butanol folosind ca materie primă acetilena se poate reprezenta prin următoarea schemă de reacții:

$$CH{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow[(H_2SO_4)]{HgSO_4} \left[CH_2{=}\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}\right] \rightarrow CH_3{-}CHO$$

alcool vinilic — aldehidă acetică

$$2\,CH_3{-}CHO \xrightarrow[\text{crotonică}]{\text{condensare}} CH_3{-}CH{=}CH{-}CHO \rightarrow$$

aldehidă crotonică

$$\xrightarrow[Ni]{2H_2} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2OH.$$

1-butanol

b) Din propenă și reactivi anorganici necesari, se poate obține l-butanolul, pe următoarea cale:

$$CH_2{=}CH{-}CH_3 \xrightarrow[500°]{+Cl_2} CH_2{=}CH{-}CH_2{-}Cl + HCl.$$

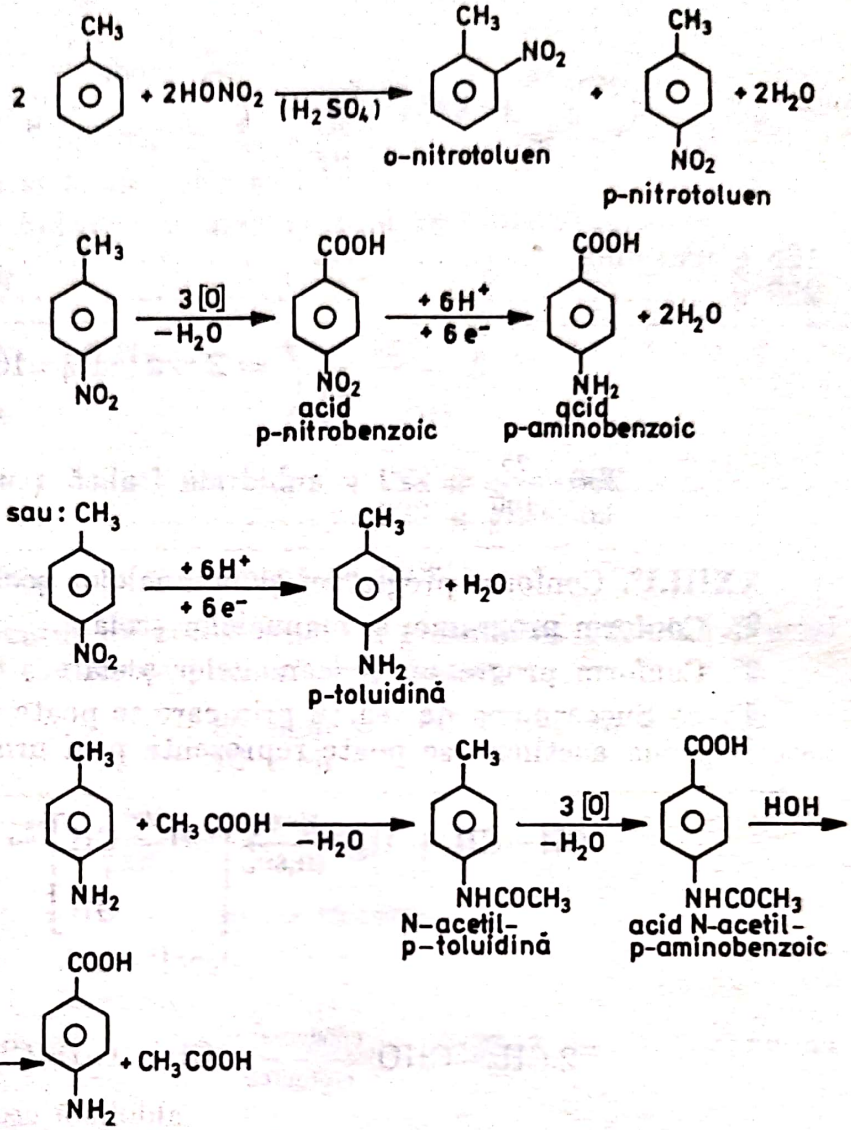
propenă — clorură de alil

$$CH_2{=}CH{-}CH_2Cl + KCN \xrightarrow[-KCl]{} CH_2{=}CH{-}CH_2CN \xrightarrow[\text{catalitic}]{3H_2}$$

$$CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}NH_2 \xrightarrow{HONO} CH_3{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_2{-}OH + N_2 + H_2O$$

1-butilamină — 1-butanol

5°. Ecuațiile reacțiilor de obținere a acidului *p*-aminobenzoic plecînd de la toluen sînt următoarele:



Din succesiunea de reacții, se presupune teoretic că, la 1 mol de toluen corespunde în final 1 mol de acid *p*-aminobenzoic:

Deci:

1 mol acid *p*-aminobenzoic .....92 g toluen
5 moli „ .....*X*

$X = 5 \cdot 92 = 460$ g toluen.

Cum randamentul este de 80% înseamnă că:
din 100 g toluen inițial .....80 g toluen se transformă în acid *p*-aminobenzoic
X .....460 g

$X = 575$ g toluen.

XXIV.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu.

2°. Caracterul metalic al elementelor chimice se manifestă în primul rînd prin tendința acestora de a ceda electroni și a forma ioni pozitivi (electropozitivitatea). Aceasta se măsoară prin energia de ionizare, adică energia ce trebuie furnizată atomului pentru a-i smulge un electron și a-l transforma în ion pozitiv. În

Scanned with OKEN Scanner

cazul elementelor menționate (toate fac parte din grupele principale ale tabelului periodic) trebuie avută în vedere poziția lor în tabel și variația caracterului metalic în grupe și perioade. Pentru elementele ce fac parte din grupele principale energia de ionizare scade în grupă de sus în jos deoarece cu cît elementul respectiv este situat mai jos în grupă, cu atît electronul său distinctiv este plasat într-un strat mai îndepărtat de nucleu (raza atomică crește în grupă de sus în jos) și ca atare poate fi mai ușor cedat, adică elementul are caracter metalic mai pronunțat.

În perioadă, energia de ionizare scade de la dreapta spre stînga deoarece cu cît elementul este situat mai la stînga cu atît el are mai puțini electroni pe ultimul strat și crește tendința de a-și stabiliza configurația electronică prin cedarea acestor electroni și formarea de ioni pozitivi. Deci în perioadă caracterul metalic crește de la dreapta spre stînga. Avînd în vedere aceste considerente, dintre elementele menționate cel mai pronunțat caracter metalic îl vor avea cele din grupa a I-a a tabelului periodic (metalele alcaline) iar dintre acestea cesiul (situat în perioada a VI-a) are caracterul metalic cel mai puternic (energia de ionizare cea mai mică). Aluminiul situat în grupa a III-a și perioada a III-a va avea caracterul metalic cel mai puțin pronunțat. Deci ordinea cerută este:

$$Al < Mg < Na < K < Cs.$$

Una din proprietățile care variază în același sens ca și caracterul metalic este tăria bazelor (hidroxizilor) acestor metale. Dacă hidroxizii metalelor alcaline sînt toți baze tari, cel de magneziu este mai slab iar cel de aluminiu, $Al(OH)_3$, nu numai că este o bază slabă, dar are și un pronunțat caracter amfoter putîndu-se comporta ca acid, în reacțiile cu bazele tari, și ca bază în reacțiile cu acizii:

$$Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4]$$

și

$$Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3\ H_2O.$$

3°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a și a XI-a urmărindu-se următoarele probleme: Apa ca amfolit. Reacția de ionizare a apei. Egalitatea concentrațiilor ionilor H_3O^+ și HO^- în apă pură. Expresia constantei de echilibru a reacției de ionizare a apei și a produsului ionic al apei. Valoarea produsului ionic al apei în condiții standard (25°C și 1 atm). Valoarea concentrațiilor ionilor H_3O^+ și HO^- în apă pură în condiții standard. Mediu neutru, mediu acid și mediu bazic. Perturbarea echilibrului de disociere a apei la adăugarea de acid sau de bază. Definirea noțiunii de *p*H. Valoarea *p*H-ului în mediu neutru, variația acestuia în mediu acid și în mediu bazic. Relația $pH + pOH = 14$. Metode de măsurare a *p*H-ului. Soluții indicatoare de *p*H, hîrtie indicatoare de *p*H, *p*H-metre.

4°. Produsul de solubilitate este produsul concentrațiilor ionilor din soluția saturată ce se găsesc în echilibru cu faza solidă. Precipitatul se separă dacă produsul concentrațiilor acestor ioni în soluția obținută după amestecare este mai mare decît produsul de solubilitate. În caz contrar nu se separă precipitatul, ionii rămînînd în soluție. Expresia produsului de solubilitate al sulfatului de calciu este:

$$P_s = [Ca^{2+}] \cdot [SO_4^{2-}].$$

a) Cele două soluții care se amestecă fiind electroliți tari (complet ionizați în soluție) concentrațiile ionilor Ca^{2+} și, respectiv, SO_4^{2-} în soluțiile inițiale vor fi identice cu cele ale sărurilor respective:

$$[Ca^{2+}] = 0{,}002\ mol/l$$

$$[SO_4^{2-}] = 0{,}002\ mol/l.$$

Cînd se amestecă volume egale din cele două soluții volumul soluției rezultate este dublu față de volumul fiecărei soluții în parte.

De aceea în soluția obținută după amestecare, concentrațiile ionilor respectivi se vor reduce la jumătate:

$$[Ca^{2+}] = 0{,}001 \text{ mol/l}$$

$$[SO_4^{2-}] = 0{,}001 \text{ mol/l}.$$

Deci:

$$[Ca^{2+}] \cdot [SO_4^{2-}] = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-6} < P_s$$

și în acest caz nu se separă precipitatul de $CaSO_4$.

b) Urmînd același raționament ca la punctul precedent, în soluția obținută după amestecare avem:

$$[Ca^{2+}] = 0{,}02 \text{ mol/l}$$

$$[SO_4^{2-}] = 0{,}02 \text{ mol/l}$$

și

$$[Ca^{2+}] \cdot [SO_4^{2-}] = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-4} > P_s$$

deci în acest caz se va separa precipitatul de $CaSO_4$.

XXV.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a XI-a avîndu-se în vedere următoarele probleme:

Definiția reacției de hidroliză a sărurilor. Tipuri de săruri care hidrolizează. Expresia generală a constantei de hidroliză. Expresii particulare cînd sarea provine de la un acid slab și o bază tare sau de la o bază slabă și un acid tare.

Cazul sărurilor date:

a) $FeSO_4$ — hidrolizează deoarece sarea provine de la acidul sulfuric, acid tare, și de la $Fe(OH)_2$, care este o bază slabă. Reacția de hidroliză:

$$Fe^{2+} + SO_4^{2-} + 4\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_2 + 2\ H_3O^+ + SO_4^{2-}$$

Soluția are un caracter acid.

b) CH_3COONH_4 — hidrolizează deoarece provine de la un acid slab (acidul acetic) și o bază slabă (amoniacul). Întrucît K_b a amoniacului este foarte apropiată de K_a a acidului acetic, soluția va avea un caracter practic neutru. Reacția de hidroliză este:

$$NH_4^+ + CH_3COO^- + 2\ H_2O \rightleftarrows NH_3 + H_3O^+ + CH_3COOH + OH^-.$$

c) Na_2CO_3 — hidrolizează deoarece provine de la un acid slab, H_2CO_3, și o bază tare, NaOH. Soluția va avea caracter bazic. Reacția de hidroliză are loc în trepte:

$$2\ Na^+ + CO_3^{2-} + H_2O \rightleftarrows 2Na^+ + HCO_3^- + HO^-.$$

La temperatura obișnuită cea de a doua treaptă:

$$HCO_3^- + H_2O \rightleftarrows H_2CO_3 + HO^-$$

are o pondere foarte mică.

d) $FeCl_3$ — hidrolizează fiind o sare care provine de la un acid tare, HCl, și o bază slabă, $Fe(OH)_3$. Soluția va avea caracter acid. Reacția globală de hidroliză se poate scrie:

$$Fe^{3+} + 3\ Cl^- + 6\ H_2O \rightleftarrows Fe(OH)_3 + 3\ Cl^- + 3\ H_3O^+$$

Scanned with OKEN Scanner

În realitate și această hidroliză are loc în trepte formîndu-se mai întîi $Fe(OH)^{2+}$ și $Fe(OH)_2^+$.

e) AgCl este o sare practic insolubilă în apă și ca atare nu hidrolizează.

f) K_2S provine de la un acid slab, H_2S, și o bază tare, KOH, deci în soluție apoasă hidrolizează și soluția va avea un caracter bazic. Hidroliza are loc în trepte:

$$2\ K^+ + S^{2-} + H_2O \rightleftarrows 2\ K^+ + HS^- + HO^-$$

și

$$HS^- + H_2O \rightleftarrows H_2S + HO^-.$$

A doua treaptă are, de asemenea, o pondere mică la temperatura obișnuită.

2°. a) Avînd în vedere considerentele expuse în rezolvarea problemei XXI.2° avem:

$$[HO^-] = \frac{K_{H_2O}}{[H_3O^+]} = 1 \cdot 10^{-4}\ \text{mol/l}.$$

Ecuația reacției de ionizare a bazei slabe va fi:

$$BOH \rightleftarrows B^+ + HO^-.$$

Dacă se face aproximația că baza slabă considerată este mult mai tare decît apa ca bază și deci neglijînd concentrația ionilor HO^- proveniți din apă, rezultă că $[B^+] = [HO^-] = 1 \cdot 10^{-4}$ mol/l.

Gradul de ionizare este raportul dintre numărul de molecule de bază care s-au ionizat și numărul total de molecule de bază existente inițial în sistem (sau raportul concentrațiilor respective). Deci:

$$\alpha = \frac{[B^+]}{C} = \frac{10^{-4}}{2 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Rezultă că la echilibru:

$$[BOH] = C - [B^+] = C(1 - \alpha) = 2 \cdot 10^{-2}(1 - 5 \cdot 10^{-3}) = 1{,}99 \cdot 10^{-2}\ \text{mol/l}.$$

b) Expresia constantei de bazicitate este:

$$K_b = \frac{[B^+] \cdot [HO^-]}{[BOH]}$$

și înlocuind valorile numerice se obține: $K_b = 5{,}025 \cdot 10^{-7}$.

Observație: Avînd în vedere că gradul de ionizare este mic, deci baza este suficient de slabă, se poate aproxima că $[BOH] \cong C$ și atunci rezultă

$$K_b = \frac{[HO^-]^2}{C} = 5 \cdot 10^{-7},$$

valoare foarte apropiată de cea obținută anterior fără a face această aproximație.

c) În aproximațiile menționate deja, putem scrie:

$$K_b = \frac{\alpha^2 \cdot C}{1 - \alpha} \cong \alpha^2 \cdot C$$

de unde rezultă:

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_b}{C}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă soluția se diluează la dublu cu apă, concentrația sa se reduce la jumătate. Notînd cu α_1 gradul de ionizare în soluția diluată de concentrație C_1, se poate scrie:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{K_b/C}}{\sqrt{K_b/C_1}} = \sqrt{\frac{C_1}{C}}$$

deoarece, la o temperatură dată, K_b nu depinde de concentrație.

Rezultă că $\alpha_1 = \alpha\sqrt{C/C_1}$ și înlocuind valorile numerice: $\alpha_1 = \alpha\sqrt{2}$; deci gradul de ionizare se multiplică cu $\sqrt{2}$.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. a) Ecuația generală de obținere a eterilor din alcooli este:

$$2\ ROH \xrightarrow[t^\circ]{(H_2SO_4)} \underset{A}{R-O-R} + H_2O$$

Din 23 g alcool se obțin 18,5 g eter A, diferența reprezentînd-o apa (4,5 g).

În funcție de cantitatea de apă rezultată se poate determina atît masa moleculară a eterului cît și a alcoolului:

$$\begin{array}{l} 2\ M \text{ g (alcool)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 18 \text{ g } H_2O \\ 23 \text{ g} \quad \text{„} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4{,}5 \text{ g} \end{array}$$

$$M = \frac{23 \cdot 18}{2 \cdot 4{,}5} = 46 \text{ g (1 mol alcool)}$$

Deci masa moleculară a alcoolului este 46.

Fiind vorba de un alcool monohidroxilic saturat, formula generală a acestuia poate fi scrisă astfel:

$$C_nH_{2n+1}OH.$$

De unde: $12n + 2n + 18 = 46$

$$14n = 28$$

$$n = 2.$$

Deci formula alcoolului este:

C_2H_5OH (etanol), iar cea a eterului $C_2H_5-O-C_2H_5$ (dietileter).

b) Compușii organici izomeri cu A au următoarele formule și denumiri:

B : $CH_3-O-CH_2-CH_2-CH_3$ — metilpropileter

C : $CH_3-O-CH(CH_3)-CH_3$ — metilizopropileter

D : $CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-OH$ — 1-butanol

E : $CH_3-CH(OH)-CH_2-CH_3$ — 2-butanol

F : $CH_3-CH(CH_3)-CH_2OH$ — 2-metil-1-propanol

G : $CH_3-C(CH_3)_2-OH$ — 2-metil-2-propanol (alcool *t*-butilic)

Scanned with OKEN Scanner

A cu *B* și *C* sînt izomeri de catenă.
Eterii *A*, *B* și *C* sînt izomeri de funcțiune cu alcoolii *D*, *E*, *F* și *G*.
D cu *E* și *F* cu *G* sînt izomeri de poziție.
D și *E* față de *F* și *G* sînt izomeri de catenă.

c) Acidul sulfuric poate fi considerat catalizator (se regăsește integral la sfîrșitul reacției)

$$ROH + HOSO_3H \xrightarrow[-H_2O]{} R{-}OSO_3H \xrightarrow{ROH} R{-}O{-}R + H_2SO_4.$$

5°. a) Pirita măcinată se arde în cuptoare speciale:

$$2\ FeS_2 + 11/2\ O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + 4\ SO_2.$$

După purificare dioxidul de sulf se oxidează la trioxid, în prezența catalizatorului de platină sau pentoxid de vanadiu la temperatură de aproximativ 450°C:

$$SO_2 + 1/2\ O_2 \rightleftarrows SO_3.$$

Trioxidul astfel obținut se absoarbe în apă (de fapt într-o soluție diluată de acid sulfuric):

$$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$$

proces puternic exoterm din care cauză instalația necesită un sistem eficient de răcire.

b) Materiile prime sînt: carbonatul de calciu (calcarul), clorura de sodiu și apa. Se folosește, de asemenea, o soluție de amoniac care însă se recuperează. Prin calcinare:

$$CaCO_{3(s)} \rightleftarrows CaO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Reacția este reversibilă dar prin îndepărtarea CO_2 din sistem ea poate fi deplasată complet spre dreapta. Dioxidul de carbon se barbotează în soluția de amoniac:

$$NH_3 + H_2O + CO_2 \rightarrow NH_4HCO_3$$

și soluția de carbonat acid de amoniu se tratează cu soluție de NaCl (saramură):

$$NaCl + NH_4HCO_3 \rightleftarrows NaHCO_3 + NH_4Cl.$$

Echilibrul este deplasat spre dreapta deoarece $NaHCO_3$ este mai puțin solubil în apă.

Precipitatul de $NaHCO_3$ se calcinează:

$$2\ NaHCO_3 \xrightarrow{t^\circ} Na_2CO_3 + H_2O + CO_2.$$

Dioxidul de carbon obținut în această etapă se reintroduce în procesul de fabricație.

Pentru recuperarea amoniacului, oxidul de calciu, obținut la calcinarea calcarului, se tratează cu apă:

$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2.$$

Clorura de amoniu se tratează cu hidroxidul de calciu:

$$2\ NH_4Cl + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCl_2 + 2\ NH_3 + 2\ H_2O$$

regenerîndu-se astfel soluția de amoniac.
$CaCl_2$ constituie un produs secundar al procesului de fabricație a sodei.

Scanned with OKEN Scanner

c) Se obţine acetaldehida prin adiţia apei la acetilenă (reacţia *Kucerov*):

$$HC{\equiv}CH + HOH \xrightarrow{Hg^{2+},\ H_2SO_4} \left[H_2C{=}CH(OH)\right] \rightarrow CH_3{-}C(=O){-}H.$$

Acetaldehida se tratează cu acid cianhidric obţinîndu-se cianhidrina respectivă:

$$CH_3{-}C(=O){-}H + HCN \rightarrow CH_3{-}CH(OH){-}CN$$

Aceasta se tratează cu amoniac şi apoi se hidrolizează obţinîndu-se astfel alfa-alanina:

$$CH_3{-}CH(OH){-}CN + NH_3 \xrightarrow[-H_2O]{} CH_3{-}CH(NH_2){-}CN \xrightarrow[-NH_3]{+2HOH} CH_3{-}CH(NH_2){-}COOH.$$

d) Se obţine toluenul prin reacţia *Friedel-Crafts* (substituţie electrofilă):

$$C_6H_6 + CH_3Cl \xrightarrow[-HCl]{AlCl_3} C_6H_5CH_3.$$

Toluenul se clorurează fotochimic la catena laterelă (substituţie radicalică):

$$C_6H_5CH_3 + Cl_2 \xrightarrow{h\nu} C_6H_5CH_2Cl + HCl.$$

În continuare pot fi urmate două căi:

1. Clorura de benzil se tratează cu KCN şi apoi se hidrolizează nitrilul obţinut:

$$C_6H_5CH_2Cl + KCN \xrightarrow[-KCl]{} C_6H_5CH_2CN \xrightarrow[-NH_3]{+2H_2O} C_6H_5{-}CH_2{-}COOH.$$

2. Clorura de benzil se poate trata cu magneziu obţinîndu-se compusul organomagnezian respectiv; acesta se adiţionează la CO_2 şi apoi se hidrolizează produsul de adiţie obţinut:

$$C_6H_5CH_2Cl + Mg \rightarrow C_6H_5{-}CH_2{-}MgCl \xrightarrow{+CO_2} C_6H_5{-}CH_2{-}C(=O){-}OMgCl$$

$$C_6H_5{-}CH_2{-}C(=O){-}OMgCl \xrightarrow{+H_2O} C_6H_5{-}CH_2{-}C(=O){-}OH + Mg(OH)Cl.$$

XXVI. 1°. Subiectul se tratează conform manualelor de liceu pentru clasele a IX-a şi a XI-a. (Vezi şi problema XVII.1°.).

2°. a) În ipoteza că sulfura nu conţine alte impurităţi decît ferul metalic, proba analizată este formată din:

$$m_1 = \frac{5 \times 5}{100} = 0{,}25 \text{ g Fe} \quad \text{şi} \quad m_2 = \frac{5 \times 95}{100} = 4{,}75 \text{ g FeS}.$$

Cele două reacţii care au loc sînt:

$$Fe + 2\ HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2$$
$$FeS + 2\ HCl \rightarrow FeCl_2 + H_2S.$$

Deci produșii gazoși sînt H_2 și H_2S. Volumul lor se calculează:

$$\begin{array}{l} 56\ g\ Fe \ldots\ldots 22{,}4\ l\ H_2 \\ 0{,}25\ g\ Fe \ldots\ldots X\ l\ H_2 \end{array}$$

$$X = 0{,}100\ l\ H_2$$

$$\begin{array}{l} 88\ g\ FeS \ldots\ldots 22{,}4\ l\ H_2S \\ 4{,}75\ g\ FeS \ldots\ldots Y\ l\ H_2S \end{array}$$

$$Y = 1{,}209\ l\ H_2S.$$

Deci volumul total al produșilor gazoși este $V = 1{,}309$ l (c.n.)

b) Compoziția procentuală a acestui amestec (în procente de volum):

$$\begin{array}{l} 1{,}309\ l\ amestec \ldots\ldots 0{,}100\ l\ H_2 \\ 100\ l\ amestec \ldots\ldots X\ l\ H_2 \end{array}$$

$$X = 7{,}64\%\ H_2$$

$$\begin{array}{l} 1{,}309\ l\ amestec \ldots\ldots 1{,}209\ l\ H_2S \\ 100\ l\ amestec \ldots\ldots Y\ l\ H_2S \end{array}$$

$$Y = 92{,}36\%\ H_2S.$$

c) $FeCl_2$ rezultă din ambele reacții ce au loc. Din reacția ferului metalic cu HCl avem:

$$\begin{array}{l} 56\ g\ Fe \ldots\ldots 127\ g\ FeCl_2 \\ 0{,}25\ g\ Fe \ldots\ldots X\ g\ FeCl_2 \end{array}$$

$$X = 0{,}567\ g\ FeCl_2.$$

Din reacția FeS cu HCl rezultă:

$$\begin{array}{l} 88\ g\ FeS \ldots\ldots 127\ g\ FeCl_2 \\ 4{,}75\ g\ FeS \ldots\ldots Y\ g\ FeCl_2 \end{array}$$

$$Y = 6{,}855\ g\ FeCl_2$$

Deci în total rezultă teoretic:

$$m = 0{,}567 + 6{,}855 = 7{,}422\ g\ FeCl_2.$$

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°.

a) $$C_6H_6 + C_nH_{2n} \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5{-}C_nH_{2n+1}.$$

Masa unui mol de hidrocarbură A va fi:

$(12n + 2n + 72 + 6)$g din care $(2n + 6)$g vor fi hidrogen.

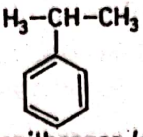
Deci:

$$\begin{array}{l} (14n + 78)\text{g A} \ldots\ldots (2n + 6)\text{g hidrogen} \\ 100\ g \ldots\ldots 10\ g \end{array}$$

$$n = 3.$$

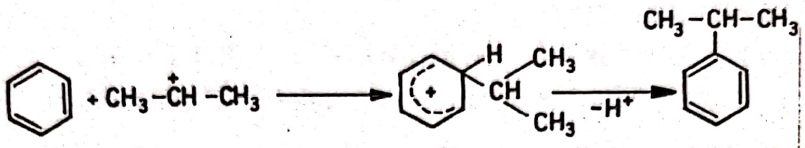
Scanned with OKEN Scanner

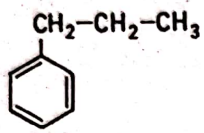
Formula moleculară și structurală a hidrocarburii A:

C_9H_{12} ; 

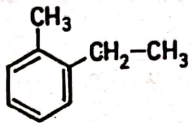
izopropilbenzen (cumen)

b) $CH_2=CH-CH_3 + H^+ \longrightarrow CH_3-\overset{+}{C}H-CH_3$

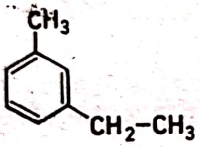


c) 

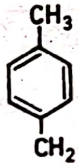
n-propilbenzen



orto-etilmetilbenzen



meta-etilmetilbenzen



para-etilmetilbenzen

d) $C_6H_6 + CH_2=CH-CH_3 \xrightarrow{(H+)} C_6H_5-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{CH}}}}$

78 t benzen ..... 120 t cumen

X ..... 4,8 t

$X = 3{,}12$ t benzen (pentru un randament de 100%).

Pentru un randament global de 80%:

$$3{,}12 \cdot \frac{100}{80} = 3{,}9 \text{ t benzen}$$

42 t propenă ..... 120 t cumen

X ..... 4,8 t

$X = 1{,}68$ t propenă (pentru un randament de 100%)

$$1{,}68 \cdot \frac{100}{80} = 2{,}1 \text{ t propenă (pentru un randament de 80\%).}$$

5°. a) $Zn + 2\ HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$

Reacția decurge în condiții obișnuite, fără încălzire, atît cu HCl în soluție diluată cît și cu HCl în soluție concentrată.

$$Cu + 2\ H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + 2\ H_2O.$$

Reacţia are loc numai cu acid sulfuric concentrat prin încălzire.

$$Cl_2 + H_2O \rightleftarrows HCl + HClO.$$

Prin dizolvarea clorului în apă o parte din clor reacţionează cu apa conform acestei reacţii de disproporţionare. Soluţia numită şi „apă de clor" conţine deci un amestec de acid clorhidric şi acid hipocloros.

b) $CH_3-C\equiv CH + Na \rightarrow [CH_3-C\equiv C]^-Na^+ + 1/2\ H_2.$

Hidrogenul legat de un carbon participant la o triplă legătură este „mobil" avînd un slab caracter acid şi alchinele ce posedă un astfel de hidrogen formează cu sodiul metalic compuşi ionici de tipul sărurilor.

$$CH_3-C\equiv CH + H_2O \xrightarrow{Hg^{2+},\ H_2SO_4} \left[CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\overset{|}{C}}=CH_2\right] \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-CH_3.$$

(acetonă)

Este o reacţie de tip *Kucerov*, adiţia apei la tripla legătură în prezenţa sărurilor de mercur, cînd se formează intermediar un enol instabil ce se izomerizează în cetona respectivă.

Dacă se foloseşte 2-butina, aceasta neavînd un hidrogen activ (legat la un carbon cu triplă legătură) nu va reacţiona cu sodiul metalic.

Adiţia apei la 2-butină este posibilă şi are loc după un mecanism similar cu cel precedent, conducînd în final la butanonă:

$$CH_3-C\equiv C-CH_3 + H_2O \xrightarrow{Hg^{2+},\ H_2SO_4} \left[CH_3-CH=\underset{\displaystyle OH}{\overset{|}{C}}-CH_3\right] \rightarrow CH_3-CH_2-\underset{\displaystyle O}{\overset{\|}{C}}-CH_3$$

XXVII.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a (Vezi şi problema XXIV.2°).

2°. a) Gazul de apă este un amestec de CO şi H_2 provenit din reacţia vaporilor de apă cu cărbune incandescent:

$$C + H_2O \xrightarrow{t^\circ} CO + H_2.$$

Masa moleculară medie a unui amestec este suma pentru toţi componenţii, a produselor dintre fracţia molară a unui component şi masa sa moleculară:

$$\overline{M} = \sum_i X_i \cdot M_i = X_{CO} \cdot M_{CO} + X_{H_2} \cdot M_{H_2}.$$

Pentru amestecul dat, considerat echimolecular, fracţia molară a fiecărui component este 0,5. Deci:

$$\overline{M} = 0{,}5 \cdot 28 + 0{,}5 \cdot 2 = 15.$$

Observaţie: Problema se mai poate rezolva şi pe alte căi. Aşa, de exemplu, se poate considera un amestec format din un mol de CO şi un mol de H_2. Acest amestec va avea deci volumul 44,8 l (c.n.) şi masa $28 + 2 = 30$ g. Masa moleculară medie este masa care corespunde unui volum de 22,4 l (c.n.) şi se obţine evident, tot valoarea 15, găsită anterior.

Densitatea medie este:

$$\bar{\rho} = \frac{\overline{M}}{22{,}4} = \frac{15}{22{,}4} = 0{,}67\ g/l = 0{,}67\ kg/m^3$$

b) Se calculează cantitatea de carbon pur din probă, pornind de la ecuația reacției.

Cei 35,84 l gaz de apă conțin 17,92 l de CO și tot 17,92 l H_2. Deci:

12 g C ..... 22,4 l CO
X g C ..... 17,92 l CO

$X = 9{,}6$ g.

Prin urmare proba de cărbune conține 9,6 g carbon pur.

Conținutul procentual (în procente de masă) de carbon este:

12 g cărbune ..... 9,6 g C
100 g cărbune ..... Y g C

$Y = 80\%$.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. a și b) Formula moleculară poate coincide cu formula brută sau poate fi un multiplu al formulei brute. În cazul hidrocarburii A formula moleculară este $(C_4H_5)_n$, unde n nu poate fi egal cu 1 pentru că hidrocarbura conține un nucleu benzenic și deci numărul atomilor de C din moleculă este mai mare de 6.

Pentru $n = 2$, formula moleculară a hidrocarburii A este C_8H_{10}.

Avînd în vedere ecuația reacției de alchilare:

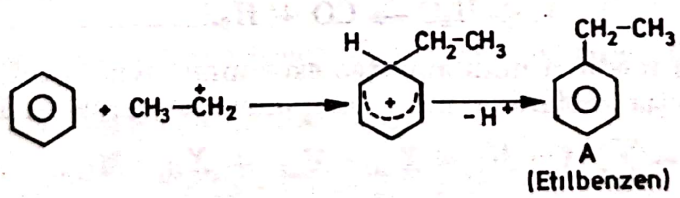
$$C_6H_6 + R{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5{-}\underset{\displaystyle R}{\underset{|}{C}}H{-}CH_3,$$

înseamnă că alchena are 2 atomi de C și nu poate fi decît etena ($R = H$).

Pentru $n = 3$, formula moleculară a hidrocarburii A ar trebui să fie $C_{12}H_{15}$, iar cea a alchenei C_6H_9, ceea ce este imposibil.

Pentru valori și mai mari ale lui n se obtin pentru A formule moleculare care nu respectă formula generală a alchenelor (C_nH_{2n}).

c) $CH_2{=}CH_2 + H^+ \rightarrow CH_3 - \overset{+}{C}H_2$



d) 1 kmol C_6H_6 ..... 106 kg $C_6H_5{-}CH_2{-}CH_3$
X ..... 5300 kg

$X = 50$ kmoli $C_6H_6 = 3900$ kg C_6H_6

1 kmol C_6H_6 ..... 1 kmol C_2H_4
50 kmoli C_6H_6 X

$X = 50$ kmoli etenă $= 1120$ m³.

XXVIII.1°. Subiectul va fi tratat conform manualelor de liceu pentru clasa a IX-a.

2°. a) Masa plăcuței crește deoarece metalul *Me* are masă atomică mai mică decît cuprul și are loc o reacție redox de oxidare a metalului *Me* (care cedează 2

Scanned with OKEN Scanner

electroni trecînd în ioni pozitivi Me^{2+}) care se dizolvă și de reducere a ionilor Cu^{2+} care se depun pe plăcuță sub formă de cupru metalic:

$$Me - 2\ e^- \rightarrow Me^{2+}$$

$$Cu^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Cu$$

sau:

$$Me + Cu^{2+} \rightarrow Me^{2+} + Cu.$$

Deci metalul *Me* are un potențial standard de reducere mai negativ decît cuprul, adică se oxidează mai ușor decît acesta fiind un reducător mai puternic și poate deplasa cuprul din soluțiile sărurilor sale. Metalul *Me* este situat înaintea cuprului în seria activității metalelor a lui *Volta-Beketov*.

b) Concentrația molară a soluției de $CuSO_4$ scade cu 0,2 mol/l deci s-au depus 0,2 moli de cupru și s-au dizolvat în același timp 0,2 moli de metal *Me*. Notînd cu *A* masa atomică a metalului *Me* și avînd în vedere că creșterea masei plăcuței reprezintă diferența dintre masa cuprului depus și masa metalului dizolvat avem:

$$0{,}2 \times 63{,}5 - 0{,}2 \times A = 1{,}5$$

de unde se obține $A = 56$.

3°. Subiectul se va trata conform manualelor școlare, după următoarea schemă:

a) Surse naturale: petrolul și gudroanele de la distilarea cărbunilor de pămînt.

b) Prin sinteză: reformare catalitică; trimerizarea acetilenei (pentru benzen); alchilarea benzenului (pentru toluen).

4°. a)

$$\underset{A}{C_nH_{2n}} + Br_2 \rightarrow \underset{B}{C_nH_{2n}Br_2}$$

1 mol compus *B* va avea masa $(12\ n + 2\ n + 160)$g.

Deci:

$$\begin{array}{r} (14\ n + 160)\text{g} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2n\ \text{g H} \\ 100\ \text{g} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4{,}35\ \text{g} \\ \hline n = 5 \end{array}$$

Formula moleculară a substanței *A* va fi C_5H_{10}

b) $H_2C{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH_3$; 1-pentenă (I)

$CH_3{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_3$ 2-pentenă (*cis* + *trans*) (II)

$H_2C{=}C(CH_3){-}CH_2{-}CH_3$; 2-metil-1-butenă (III)

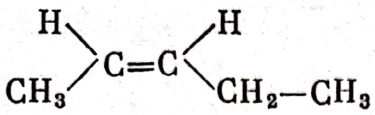
$CH_3{-}C(CH_3){=}CH{-}CH_3$ 2-metil-2-butenă (IV)

$CH_3{-}CH(CH_3){-}CH{=}CH_2$ 3-metil-1-butenă (V)

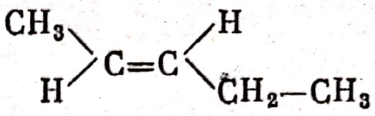
Compusul I este izomer de poziție cu II.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul 2-pentenei avem doi izomeri geometrici



cis-2-pentena



trans-2-pentena

Compușii III, IV și V sînt izomeri de poziție.

Alchenele I și, respectiv, II sînt fiecare în parte izomeri de catenă cu III, IV și V.

c) $CH_3-CH=CH-CH_2-CH_3 + 4[O] \rightarrow \underset{\text{acid acetic}}{CH_3-COOH} + \underset{\text{acid propionic}}{CH_3-CH_2-COOH}$

5°. a) Prin încălzire la cca 1000°C are loc descompunerea calcarului:

$$CaCO_{3(s)} \rightleftarrows CaO_{(s)} + CO_{2(g)}.$$

Reacția este reversibilă dar prin îndepărtarea CO_2 din sistem se obține CaO (varul). Prin tratare cu apă (stingerea varului) se obține hidroxidul de calciu:

$$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2.$$

Această reacție este puternic exotermă.

b) Acidul azotic se obține industrial prin oxidarea catalitică a amoniacului, proces în care rezultă oxizi de azot care apoi sînt absorbiți în apă. Principala reacție de oxidare a amoniacului este:

$$4\ NH_3 + 5\ O_2 \rightarrow 4\ NO + 6\ H_2O.$$

Reacția este catalizată de un aliaj de platină cu 3—5% rodiu.

Urmează oxidarea oxidului de azot la dioxid:

$$2\ NO + O_2 \rightleftarrows 2\ NO_2.$$

Reacția avînd loc cu contracție de volum va fi favorizată de creșterea presiunii. La temperaturi joase dioxidul de azot dimerizează:

$$2\ NO_2 \rightleftarrows N_2O_4.$$

Amestecul de gaze nitroase ce conține NO_2, N_2O_4 și NO este supus absorbției în apă. Reacțiile principale ce au loc sînt:

$$3\ NO_2 + H_2O \rightarrow 2\ HNO_3 + NO$$

$$N_2O_4 + H_2O \rightarrow HNO_3 + HNO_2$$

$$3HNO_2 \xrightarrow{\text{la cald}} HNO_3 + 2\ NO + H_2O.$$

Oxidul de azot este reintrodus în proces. Procesele de absorbție sînt favorizate de temperatură scăzută și presiune ridicată.

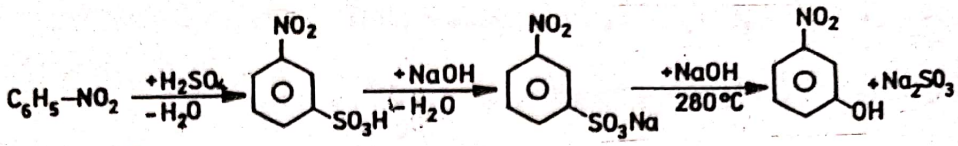
c) Se introduce mai întîi gruparea nitro:

$$C_6H_6 + HNO_3 \xrightarrow{H_2SO_4} C_6H_5-NO_2 + H_2O$$

reacție de substituție electrofilă. Gruparea NO_2 prin efect electromer atrăgător de electroni orientează substituția electrofilă ulterioară în poziție *meta*.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru introducerea grupării -OH se poate utiliza una din metodele de obținere a fenolilor, de exemplu topirea alcalină:



d) Se elimină mai întîi acidul clorhidric prin tratare cu KOH în soluție alcoolică concentrată iar apoi la alchena obținută se adiționează HCl:

$$CH_3-CH_2-CH_2-Cl \xrightarrow[-HCl]{+KOH,\ sol.\ alcool.} CH_3-CH=CH_2 \xrightarrow{+HCl} CH_3-\underset{\displaystyle Cl}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

Adiția acidului clorhidric (adiție electrofilă) se face conform regulii lui *Markovnicov* și rezultă deci 2-clorpropanul.

XXIX. 1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Conform programei și manualelor școlare.

4°. Ecuația reacției dintre α-alanină și acid azotos este următoarea:

$$CH_3-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-COOH + HONO \rightarrow CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-COOH + N_2 + H_2O$$

89 g α-alanină ..... 22,4 l N_2

178 g X

$X = 44{,}82$ l N_2 (dacă $\eta = 100\%$).

— dacă $\eta = 78{,}1\%$:

$$44{,}82 \frac{78{,}1}{100} = 35 \text{ l } N_2.$$

XXX. 1°. Se va trata subiectul conform programei școlare și a manualelor, avînd în vedere următorul plan:

a) Noțiuni sumare privind starea aromatică și, legat de aceasta, comportarea hidrocarburilor aromatice față de diverși agenți oxidanți.

b) Reacții de oxidare ce afectează nucleul aromatic (oxidarea benzenului, naftalinei și antracenului).

c) Reacții de oxidare la catena laterală (oxidarea toluenului, xilenilor și a izopropilbenzenului).

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. O cale simplă de transformare a propanalului în propanonă este reprezentată de următoarea succesiune de reacții:

$$\underset{\text{propanal}}{CH_3-CH_2-CHO} + H_2 \xrightarrow{Ni} \underset{\text{1-propanol}}{CH_3-CH_2-CH_2OH} \xrightarrow[-H_2O]{(H_2SO_4)} \underset{\text{propenă}}{CH_3-CH=CH_2}$$

$$\xrightarrow{+H_2SO_4} CH_3-\underset{\displaystyle \underset{\text{sulfat acid de izopropil}}{OSO_3H}}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2SO_4]{+H_2O} CH_3-\underset{\displaystyle \underset{\text{2-propanol}}{OH}}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow[-H_2O]{[O]} CH_3-\underset{\displaystyle \underset{\text{propanonă (acetonă)}}{O}}{\underset{\|}{C}}-CH_3$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. $CH_2-O-CO-(CH_2)_{14}-CH_3$; $CH-O-CO-(CH_2)_{14}-CH_3$; $CH_2-O-CO-(CH_2)_{14}-CH_3$ $\xrightarrow{+3\,H_2O}$ CH_2OH ; $CHOH$; CH_2OH (glicerină) $+ 3CH_3-(CH_2)_{14}-COOH$ (acid palmitic)

806 g gliceridă ..... 92 g glicerină
X g „ ..... 920 g „

$X = 8060$ g gliceridă (dacă $\eta = 100\%$).

Randamentul reacției fiind de 80%, cantitatea de gliceridă necesară este:

$$8060 \frac{100}{80} = 10\,075 \text{ g gliceridă.}$$

XXXI.1°. Conform programei și manualelor școlare.

2°. Conform programei și manualelor școlare.

3°. Formulele și denumirile aminelor cu formula moleculară $C_4H_{11}N$ sînt următoarele:

a) — amine primare:

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-NH_2$ — 1-butilamina (*n*-butilamina)

$CH_3-\overset{*}{C}H(NH_2)-CH_2-CH_3$ — 2-butilamina

$CH_3-CH(CH_3)-CH_2-NH_2$ — 2-metil-1-propilamina

$CH_3-C(CH_3)_2-NH_2$ — 2-metil-2-propilamina (*t*-butilamina)

b) amine secundare:

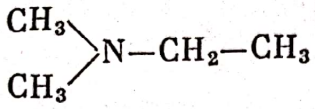
$CH_3-CH_2-CH_2-NH-CH_3$ — metilpropilamina

$CH_3-CH(CH_3)-NH-CH_3$ — metilizopropilamina

$(CH_3-CH_2)_2NH$ — dietilamina

c) amine terțiare:

dimetiletilamina



Pot reacționa cu clorura de benzoil aminele primare și secundare (pct. a și b)
Prezintă enantiomeri 2-butilamina.

4°. $C_6H_{12}O_6 \xrightarrow[\text{alcoolică}]{\text{fermentație}} 2\ C_2H_5OH + 2\ CO_2$

glucoză

180 g glucoză ..... 2 moli alcool etilic
X ..... 10 moli

$X = 900$ g glucoză.

180 g glucoză ..... $2 \cdot 22{,}4$ l CO_2
900 g X

$X = 224$ l CO_2.

XXXII.1°. Subiectul se tratează conform manualului de liceu pentru clasa a IX-a, urmărindu-se următoarele probleme: Natura legăturii ionice sau electrovalente. Substanțele ionice nu sînt formate din molecule ci din ioni așezați într-o anumită ordine în rețeaua cristalină. Tăria legăturii ionice și dependența acesteia de diferența dintre caracterul chimic al elementelor. Starea de agregare a substanțelor ionice. Variația punctului (temperaturii) de topire a substanțelor ionice în funcție de diferența dintre caracterul chimic al elementelor și funcție de sarcina ionilor. Comportarea substanțelor ionice la lovire. Solubilitatea acestora în diferiți solvenți. Conductibilitatea electrică a substanțelor ionice în topitură și în soluții și explicarea acesteia.

2°. a)

1. $CuSO_4 + H_2S \rightarrow CuS + H_2SO_4$.
2. $BaCl_2 + K_2CrO_4 \rightarrow BaCrO_4 + 2\ KCl$.
3. $AgNO_3 + NaOH \rightarrow AgOH + NaNO_3$.

AgOH este instabil și se descompune imediat: $2\ AgOH \rightleftarrows Ag_2O + H_2O$.

4. $AgNO_3 + HCl \rightarrow AgCl + HNO_3$.
5. $H_2SO_4 + 2\ NaOH \rightarrow Na_2SO_4 + 2\ H_2O$.
6. $CaCl_2 + H_2C_2O_4 \rightarrow CaC_2O_4 + 2\ HCl$.
7. $Pb(NO_3)_2 + H_2SO_4 \rightarrow PbSO_4 + 2\ HNO_3$.
8. $H_2 + I_2 \rightleftarrows 2\ HI$.
9. $AlCl_3 + 3\ NaOH \rightarrow Al(OH)_3 + 3\ NaCl$.

În exces de NaOH: $Al(OH)_3 + NaOH \rightarrow Na[Al(OH)_4]$.

Se mai pot forma, de asemenea, $Na_2[Al(OH)_5]$ și $Na_3[Al(OH)_6]$.

b) 1. Sulfura de cupru (II) și acid sulfuric.

2. Cromat de bariu și clorură de potasiu.

3. În prima etapă rezultă hidroxid de argint și azotat de sodiu dar hidroxidul de argint se descompune imediat în oxid de argint și apă (reacția fiind reversibilă).

Scanned with OKEN Scanner

4. Clorură de argint și acid azotic.
5. Sulfat de sodiu și apă (reacție de neutralizare).
6. Oxalat de calciu și acid clorhidric.
7. Sulfat de plumb și acid azotic.
8. Prin încălzire se obține acid iodhidric, reacția fiind reversibilă.
9. În prima treaptă, hidroxid de aluminiu și clorură de sodiu. Hidroxidul de aluminiu (insolubil) reacționează cu un exces de NaOH și se dizolvă formînd tetrahidroxialuminat de sodiu iar în exces mai mare de NaOH se pot forma și pentahidroxialuminatul de disodiu și chiar hexahidroxialuminatul de trisodiu.

c) Sînt greu solubile sau practic insolubile următoarele substanțe:

CuS — sulfură de cupru (II).

$BaCrO_4$ — cromat de bariu.

Ag_2O — oxid de argint (I).

AgCl — clorură de argint.

CaC_2O_4 — oxalat de calciu.

$PbSO_4$ — sulfat de plumb.

$Al(OH)_3$ — hidroxid de aluminiu.

3°. Deducerea expresiei constantei de echilibru K_c (legea acțiunii maselor) se poate face pornind de la considerente cinetice și anume de la faptul că la echilibru viteza reacției directe devine egală cu cea a reacției inverse (starea de echilibru dinamic).

Fie reacția chimică generală: $aA + bB \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} cC + dD$.

Viteza reacției 1 (reacția directă) este: $v_1 = k_1[A]^{n_A} \cdot [B]^{n_B}$ iar viteza reacției 2 (reacției inverse): $v_2 = k_2[C]^{n_C} \cdot [D]^{n_D}$ unde k_1 și k_2 sînt constantele de viteză respective iar n_A, n_B, n_C și n_D, ordinele parțiale de reacție în raport cu componenții respectivi. Vom considera numai cazul reacțiilor simple cînd ordinele parțiale de reacție coincid cu coeficienții stoechiometrici respectivi. În acest caz, pentru sistemul în echilibru, cînd reacția directă și cea inversă sînt reacții simple, avem: $v_1 = k_1[A]^a \cdot [B]^b$ și $v_2 = k_2[C]^c \cdot [D]^d$. La echilibru $v_1 = v_2$ și deci $k_1[A]^a \cdot [B]^b = k_2[C]^c \cdot [D]^d$. Rezultă:

$$\frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b} = k_1/k_2 = K_c$$

unde K_c este constanta de echilibru a sistemului, exprimată prin concentrațiile componenților. Ea reprezintă raportul constantelor de viteză ale reacției directe și celei opuse. Deci valoarea ei va fi determinată la o temperatură dată. În cazul sistemelor gazoase compoziția sistemului se poate exprima și prin presiunile parțiale ale componenților. În acest caz constanta de echilibru K_p va avea expresia: $K_p = \frac{P_C^c \cdot P_D^d}{P_A^a \cdot P_B^b}$ unde P_C și P_D sînt presiunile parțiale ale produșilor de reacție iar P_A și P_B cele ale reactanților. Relația dintre K_c și K_p pentru sistemele gazoase în echilibru se poate ușor stabili pornind de la ecuația de stare a gazelor perfecte (considerînd sistemul gazos ca un gaz perfect): $pV = n\,RT$. Avînd în vedere că raportul n/V reprezintă numărul de moli din unitatea de volum, adică tocmai concentrația componentului respectiv, se poate scrie:

$P_A = \frac{n_A}{V} \cdot RT = [A] \cdot RT$ unde prin $[A]$ s-a notat concentrația la echilibru a componentului A. Analog avem: $P_B = [B] \cdot RT$; $P_C = [C] \cdot RT$ și $P_D = [D] \cdot RT$.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind aceste presiuni parțiale în expresia lui K_p se obține:

$$K_p = \frac{[C]^c \cdot [D]^d}{[A]^a \cdot [B]^b} \cdot \frac{(RT)^{c+d}}{(RT)^{a+b}} = K_c \cdot (RT)^{\Delta n}$$

unde $\Delta n = (c + d) - (a + b)$ reprezintă variația numărului total de moli din sistem, adică diferența dintre numărul de moli rezultați din reacția directă și numărul de moli intrați în această reacție. Se vede ușor că în reacțiile care au loc fără variația numărului de moli ($\Delta n = 0$) cele două constante K_p și K_c sînt egale.

4°. Pentru rezolvare vezi problema XXVII.2°.

Răspuns: a) Masa moleculară medie $\overline{M} = 15$;

Densitatea medie $\overline{\rho} = 0{,}67$ g/l $= 0{,}67$ kg/m^3;

Densitatea în raport cu aerul $d_{aer} = \frac{\overline{M}}{28{,}9} = 0{,}519$.

b) Conținutul în carbon al probei: 80%.

Scanned with OKEN Scanner

C. PROBLEME PROPUSE

ENUNȚURI

1. CHIMIE ANORGANICĂ

1°. Un anumit element chimic X, din perioada a III-a, formează ioni negativi monovalenți X^- care au structura electronică a argonului ($Z_{Ar} = 18$). În stare liberă acest element chimic există sub formă de gaz având moleculele diatomice X_2.

a) Scrieți structura electronică a atomilor neutri X, identificați elementul și precizați poziția acestuia în sistemul periodic.

Descrieți pe scurt tipul de legătură chimică existentă în molecula X_2.

b) Știind că elementul X are numai doi izotopi naturali având masele atomice rotunjite 35 și, respectiv, 37 și că cel cu masa atomică 35 se găsește într-un procent de 75% în amestecul natural, să se calculeze masa atomică relativă a elementului X.

c) Într-un cilindru de oțel având volumul de 50 l se găsește gazul X_2 comprimat la 49,2 atm și la temperatura de 27°C. O parte din gazul din cilindru se folosește într-o experiență chimică la sfîrșitul căreia presiunea din cilindru devine 24,6 atm, temperatura rămînînd neschimbată. Ce cantitate de gaz X_2, în g și în l (c.n.), s-a utilizat în experiența respectivă?

d) Presupunînd că gazul X_2 din experiența de la punctul precedent a reacționat cu hidrogenul, fiind pus în contact cu 200 g de hidrogen, la sfîrșitul reacției (presupusă totală) se obține un amestec de gaze. Se cere: compoziția acestui amestec în procente de masă și de volum; masa moleculară medie a amestecului; densitatea sa în condiții normale; densitatea sa în raport cu aerul.

2°. Prin dizolvarea în apă a unei cantități de sulfat de crom cristalizat, $Cr_2(SO_4)_3 \cdot 18H_2O$, se obțin 80 g de soluție care fiind supusă electrolizei, necesită pentru depunerea întregii cantități de crom la catod, un curent de 2,5 A timp de 24 min. Știind că randamentul de utilizare a curentului electric este $\eta = 0{,}804$, să se determine: a) concentrația procentuală a soluției inițiale înainte de a fi supusă electrolizei (în procente de masă); b) cantitatea de apă în care a fost dizolvat cristalohidratul sulfatului de crom.

Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; Cr — 52.

3°. Se studiază echilibrul:

$$CH_{4(g)} \rightleftarrows C_{(s)} + 2\ H_{2(g)}$$

la temperatura de 637°C.

A. Într-o primă experiență, la această temperatură, se lucrează la o presiune constantă de 1 atm. În acest caz: a) Dacă se pleacă de la metan pur, la echilibru se obține următoarea compoziție a fazei gazoase, în procente de volum: CH_4 : 25%; H_2 : 75%. Să se calculeze valoarea constantei de echilibru, K_p, la

temperatura menţionată. b) Dacă în aceleaşi condiţii s-ar pleca de la un amestec de hidrogen pur şi carbon, care ar fi compoziţia fazei gazoase la atingerea echilibrului?

B. Se repetă experienţa, la aceeaşi temperatură de 637°C, lucrîndu-se însă într-un recipient cu volumul constant de 1 l. În acest recipient se introduc 0,05 moli de metan. Calculaţi în acest caz, masele de carbon, hidrogen şi metan existente în recipient la atingerea echilibrului, precum şi presiunea totală de echilibru.

Mase atomice: H — 1; C — 12.

4°. În 150 g de apă pură se dizolvă atîta piatră vînătă ($CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$) cît este necesară pentru a se obţine o soluţie saturată la 50°C.

Să se calculeze: a) cantitatea (în g) de piatră vînătă ce trebuie dizolvată în cele 150 g de apă pentru a se obţine soluţia saturată la 50°C; b) cantitatea de cristalohidrat $CuSO_4 \cdot 5H_2O$, care se va depune dacă se răceşte soluţia obţinută anterior de la 50°C la 0°C. Solubilitatea sulfatului de cupru, raportată la sare anhidră, este la 50°C de 25,1 g la 100 g apă şi la 0°C de 12,9 g la 100 g apă; c) concentraţia procentuală, molară, molală şi titrul soluţiei de sulfat de cupru saturată la 50°C, dacă densitatea ei la această temperatură este 1,20 g/cm^2.

Mase atomice: H — 1; O — 16; N — 14; S — 32; Cu — 64.

5°. La tratarea a 14,6 g dintr-un aliaj de Zn şi Al cu soluţie de acid sulfuric în exces, se degajă 12,11 l de gaz măsurat la 850 mmHg şi la 27°C. Se cere: a) compoziţia aliajului de zinc şi aluminiu în procente de masă şi în procente de moli; b) volumul soluţiei de acid sulfuric 1 *N* care s-a folosit dacă excesul de acid este 50% faţă de cantitatea teoretic necesară pentru dizolvarea completă a aliajului; c) cantitatea de sulfat de aluminiu cristalizat (cristalizează cu 18 molecule de apă), în g, care s-ar putea obţine din aliajul considerat.

Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; Al — 27; Zn — 65.

6°. Prin dizolvarea în apă a unei cantităţi de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ s-au obţinut 100 g de soluţie de sulfat de cupru. Se face electroliza acestei soluţii cu electrozi de platină. Pentru depunerea totală a cuprului din soluţie se foloseşte un curent de 3,35 A timp de 60 de min. Ştiind că randamentul de curent este 80% se cere: a) să se scrie ecuaţiile reacţiilor ce au loc la electrozi şi precizarea produşilor ce se obţin prin electroliză (atît la electrozi cît şi în soluţie); b) cantitatea de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ care a fost dizolvată în apă pentru obţinerea celor 100 g de soluţie de sulfat de cupru precum şi cantitatea de apă utilizată; c) volumul gazului degajat la unul din electrozi (la care?) dacă este măsurat la 2 atm şi 27°C; d) concentraţia normală a soluţiei obţinute la terminarea electrolizei dacă se presupune că volumul acesteia nu se modifică în cursul electrolizei iar soluţia iniţială (înainte de electroliză) avea densitatea 1,25 g/cm^3.

Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; Cu — 64.

7°. Se consideră reacţia de conversie a metanului cu vapori de apă:

$$CH_{4(g)} + H_2O_{(g)} \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} CO_{(g)} + 3H_{2(g)}.$$

Se cunosc entalpiile standard de formare H_f^0: pentru CH_4: — 74,8 kJ/mol; pentru H_2O (vapori): —241,6 kJ/mol; pentru CO: — 110,4 kJ/mol. Se cunosc de asemenea entropiile standard S°, pentru CH_4: 186,0 J/mol · K; pentru H_2O (vapori): 188,52 J/mol · K; pentru CO: 197,7 J/mol · K iar pentru H_2: 130,5 J/mol · K. a) să se arate care reacţie, 1 sau 2, este spontană la temperatura la 200°C; b) care este temperatura minimă la care reacţia directă (reacţia 1) devine spontană); c) să se verifice că la 800°C reacţia 1 este spontană.

Se consideră că variaţiile de entalpie ΔH şi de entropie ΔS nu depind de temperatură.

Scanned with OKEN Scanner

8°. Se studiază reacţia:

$$2\ NO_{(g)} + Cl_{2(g)} \rightarrow 2\ NOCl_{(g)}$$

la o anumită temperatură. În acest scop, într-un vas de 2 l se introduc 12 g de NO şi 14,2 g de Cl_2. Se cere: a) să se scrie expresia vitezei de reacţie dacă se ştie că dublîndu-se cantitatea de NO, păstrînd aceeaşi cantitate de Cl_2, viteza reacţiei creşte de două ori, şi de asemenea, la dublarea cantităţii de Cl_2, păstrînd aceeaşi cantitate de NO, viteza reacţiei creşte tot de două ori; b) să se precizeze dacă reacţia este simplă sau complexă şi să se argumenteze răspunsul; c) să se calculeze viteza iniţială a reacţiei dacă se ştie că la temperatura respectivă, constanta de viteză are valoarea $k = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/mol · s.

Mase atomice: N — 14; O — 16; Cl — 35,5.

9°. Se iau 2,44 g de acid benzoic şi se dizolvă în apă, volumul soluţiei fiind adus la 2 l. Se determină pH-ul acestei soluţii şi se găseşte că el este egal cu 3. Se cere: a) să se calculeze constanta de aciditate a acidului benzoic; b) ce volum de soluţie de NaOH 0,1 N ar fi necesar pentru a neutraliza complet cei 2 l de soluţie de acid benzoic preparată iniţial; c) se iau 10 ml din soluţia de acid benzoic preparată iniţial şi se introduc într-un balon cotat de 1000 cm³ aducîndu-se la semn (completîndu-se pînă la volumul de 1000 cm³) cu apă distilată. Care va fi pH-ul soluţiei astfel obţinute?

Mase atomice: H — 1; C — 12; O — 16; Na — 23.

10°. Se amestecă 1 l de soluţie $Pb(NO_3)_2$ de concentraţie $2 \cdot 10^{-4}$ mol/l cu 3 l de soluţie de Na_2SO_4 de concentraţie de asemenea $2 \cdot 10^{-4}$ mol/l. Să se arate dacă se va forma sau nu precipitatul de sulfat de plumb, justificînd prin calcul răspunsul dat. Se cunoaşte produsul de solubilitate al sulfatului de plumb:

$$P_s = 2 \cdot 10^{-8}\ (\text{mol/l})^2.$$

11°. O soluţie apoasă conţine $1 \cdot 10^{-2}$ mol/l dintr-o bază B şi $1 \cdot 10^{-1}$ mol/l din acidul A conjugat bazei B. Se măsoară pH-ul acestei soluţii găsindu-se valoarea $p\text{H} = 5$.

A. La 1 l din această soluţie se adaugă o cantitate mică de soluţie concentrată de NaOH aducîndu-se pH-ul soluţiei la valoarea $p\text{H} = 7$. Presupunînd că prin aceasta volumul iniţial al soluţiei nu se modifică (rămîne tot 1 l) să se determine: a) raportul concentraţiilor $[B]/[A]$ în soluţia obţinută ce are $p\text{H} = 7$; b) valorile fiecăreia dintre concentraţiile $[A]$ şi $[B]$ în aceeaşi soluţie de $p\text{H} = 7$.

B. Un alt volum tot de 1 l de soluţie iniţială se amestecă cu 1 l de soluţie diluată de NaOH astfel încît după amestecare soluţia cu volumul de 2 l are tot $p\text{H} = 7$. Să se determine: a) raportul concentraţiilor $\frac{[B]}{[A]}$ în soluţia obţinută (care are volumul 2 l); b) valorile fiecăreia din concentraţiile $[A]$ şi $[B]$ în această soluţie finală (cu volumul de 2 l).

12°. La temperatură ridicată, sulfatul de mangan se disociază conform reacţiei:

$$3\ MnSO_{4(s)} \rightleftarrows Mn_3O_{4(s)} + 2\ SO_{3(g)} + SO_{2(g)}$$

şi:

$$2\ SO_{3(g)} \rightleftarrows 2\ SO_{2(g)} + O_{2(g)}$$

Într-un recipient vidat se introduce un exces de $MnSO_4$ şi se încălzeşte sistemul pînă la temperatura de 1300 K. La atingerea echilibrului presiunea totală din sistem este 783 mmHg iar presiunea parţială a SO_2 este 555 mmHg. Se cere: a) să se determine gradul de disociere α al SO_3; b) să se calculeze presiunile parţiale ale SO_3 şi O_2; c) să se calculeze constantele de echilibru K_{p_1} şi K_{p_2} pentru cele două echilibre.

Scanned with OKEN Scanner

13°. Volume egale de cîte 10 cm^3 din soluţii 0,01 molare de acid acetic şi acid hipocloros sînt amestecate şi diluate pînă la un volum total de 100 cm^3. Constanta de disociere a acidului acetic este $K_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ iar a acidului hipocloros $K_2 = 3{,}6 \cdot 10^{-8}$.

Se cere: a) *p*H-ul soluţiei diluate care conţine acid acetic şi acid hipocloros; b) gradul de disociere al fiecăruia din acizii din soluţia diluată; c) gradul de disociere al acidului hipocloros în cazul în care soluţia diluată nu ar conţine acid acetic.

14°. Un cilindru de oţel avînd volumul de 30 l conţine un gaz la presiunea de 8 atm şi temperatura de 19°C. a) dacă se scot 6 moli de gaz din cilindru şi se răceşte apoi cilindrul la 11°C, care va fi presiunea gazului rămas în cilindru? b) să se identifice gazul din cilindru ştiind că densitatea sa în condiţii normale este 0,0893 kg/m^3; c) cei 6 moli de gaz scoşi din cilindru se introduc într-un alt vas cu volumul constant în care se găsesc deja 1016 g de iod şi se încălzeşte apoi vasul la 700 K pînă la stabilirea echilibrului. Care va fi compoziţia de echilibru a amestecului gazos în procente de volum dacă, la temperatura respectivă, valoarea constantei de echilibru K_p a reacţiei ce are loc este $K_p = 60$.

Mase atomice: H — 1; I — 127.

15°. Să se calculeze căldura de formare şi căldura de ardere a etenei pe baza următoarelor reacţii termochimice:

1. $C_2H_{4(g)} + H_{2(g)} \rightarrow C_2H_{6(g)}$; $\Delta H_1 = -136{,}8$ kJ;
2. $C_2H_{6(g)} + 7/2\ O_{2(g)} \rightarrow 2\ CO_{2(g)} + 3\ H_2O_{(lq)}$; $\Delta H_2 = -1\,558{,}3$ kJ;
3. $C_{(s)} + O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)}$; $\Delta H_3 = -393{,}1$ kJ;
4. $H_{2(g)} + 1/2\ O_{2(g)} \rightarrow H_2O_{lq}$; $\Delta H_4 = -285{,}6$ kJ.

16°. Constanta de echilibru K_c a reacţiei:

$$PCl_{5(g)} \rightleftarrows PCl_{3(g)} + Cl_{2(g)}$$

la 250°C este $1{,}7 \cdot 10^{-2}$ mol/l.

a) să se calculeze cantitatea de PCl_3 şi de Cl_2 (în g) care se formează din 417 g de PCl_5 ce se introduc într-un vas cu volumul de 10 l şi apoi se încălzesc la 250°C pînă la stabilirea echilibrului; b) care va fi valoarea constantei de echilibru K_p a acestei reacţii la temperatura respectivă de 250°C?

Mase atomice: P — 31; Cl — 35,5.

17°. Aldehida formică reacţionează cu NaOH în soluţie apoasă formînd metanol şi formiat de sodiu conform reacţiei:

$$2\ CH_2O + NaOH \rightleftarrows CH_3OH + HCOONa.$$

a) În 2 l de soluţie, la echilibru, se găsesc 6,4 g metanol, 6,8 g formiat de sodiu, 8 g NaOH şi 3,0 g aldehidă formică. Pe baza acestor date calculaţi constanta de echilibru a reacţiei; b) ce cantitate de NaOH (în g) trebuie pusă să reacţioneze cu 60 g aldehidă formică pentru ca la stabilirea echilibrului, în aceeaşi cantitate de soluţie ca la punctul a) să se obţină 19,2 g de metanol?

Mase atomice: H — 1; O — 16; C — 12; Na — 23.

18°. O cantitate de 24,8 g dintr-un aliaj de Cu, Zn şi Al se tratează cu o soluţie de HCl de concentraţie 18,25 % (procente de masă) într-un exces de 50% faţă de cantitatea teoretic necesară, degajîndu-se 12,64 l de gaz măsuraţi la 27°C şi 740 mmHg. După ce degajarea de gaz încetează rămîne un reziduu nedizolvat care se filtrează şi apoi se tratează cu o soluţie concentrată de acid sulfuric prin încălzire, pînă la dizolvarea completă a reziduului. Soluţia astfel obţinută se supune electrolizei cu electrozi inerţi. Folosindu-se un curent de 2 A cu un randament de

Scanned with OKEN Scanner

80% se constată că masa catodului nu mai creşte (electroliza este totală) după 3 ore şi 21 minute.

Se cere: a) să se scrie ecuaţiile tuturor reacţiilor chimice care au loc; b) compoziţia aliajului în procente de masă şi în procente de moli; c) volumul soluţiei de acid clorhidric ce a fost utilizat dacă densitatea acesteia este 1,091 g/cm^3; d) volumul soluţiei de NaOH de concentraţie 0,5 *N* (normală) care ar fi necesar pentru a neutraliza complet excesul de acid clorhidric.

Mase atomice: H — 1; O — 16; Na — 23; Al — 27; S — 32; Cl — 35,5; Cu — 64; Zn — 65.

19°. Prin acţiunea acidului sulfuric asupra a 400 kg aliaj de Al şi Mg rezultă 17,5 kmoli de hidrogen. La oxidarea aceleiaşi cantităţi de aliaj se formează 12,5 kmoli amestec de Al_2O_3 şi MgO. Se cere: a) cantitatea de aluminiu şi magneziu din aliaj; b) procentele (de masă) de aluminiu, magneziu şi impurităţi din aliaj; c) volumul soluţiei 2,5 *M* (molare) de acid sulfuric care dizolvă complet cele două metale din aliaj; d) volumul de aer (în condiţii normale) care se consumă la oxidarea aliajului, considerînd că aerul conţine 20% oxigen în volume; e) raportul dintre masele oxizilor rezultaţi la oxidarea aliajului.

Notă: Impurităţile din aliaj nu reacţionează cu acidul sulfuric şi nu se oxidează în condiţiile problemei.

Mase atomice: H — 1; O — 16; Mg — 24; Al — 27; S — 32.

20°. Se dizolvă 20 g oxid de cupru (II) într-o cantitate de acid sulfuric cald de concentraţie 20% (procente de masă). Ştiind că această cantitate este exact cea necesară pentru a transforma oxidul în sulfat de cupru, să se calculeze cîte grame de cristalohidrat $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ se depun (se separă) dacă se răceşte soluţia pînă la temperatura de 20°C şi la această temperatură 100 g de apă dizolvă 20,9 g de sulfat de cupru anhidru?

Mase atomice: H — 1; O — 16; S — 32; Cu — 64.

21°. Se dă următorul şir de reacţii redox:

A. $KI + H_2O_2 + H_2SO_4 \rightarrow I_2 + K_2SO_4 + H_2O$

B. $K_4[Fe(CN)_6] + H_2O_2 + H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + K_3[Fe(CN)_6] + H_2O$

C. $KMnO_4 + H_2SO_4 + H_2O_2 \rightarrow K_2SO_4 + MnSO_4 + H_2O + O_2$

D. $I_2 + H_2O_2 \rightarrow HIO_3 + H_2O$

E. $KClO + H_2O_2 \rightarrow KCl + H_2O + O_2$

Se cere: a) să se arate în care din aceste reacţii apa oxigenată are acţiune oxidantă şi în care acţiune reducătoare; b) să se stabilească coeficienţii ecuaţiilor reacţiilor menţionate prin metoda redox; c) ce volum de soluţie de $KMnO_4$ 0,1 *N* (normal) este necesar pentru a degaja 4,48 l de O_2 (în condiţii normale) în reacţia (C)?

22°. Două plăcuţe metalice confecţionate din acelaşi metal şi avînd aceeaşi masă se introduc una într-o soluţie de sulfat de cupru, iar cealaltă într-o soluţie de azotat de argint avînd acelaşi volum ca şi soluţia de sulfat de cupru. După un anumit timp cele două plăcuţe se scot din soluţiile respective şi se cîntăresc. Se constată că masa plăcuţei care a fost introdusă în soluţia de sulfat de cupru a crescut cu 0,4% iar masa celei care a fost introdusă în soluţia de azotat de argint a crescut cu 8% faţă de masa lor iniţială. Scăderea concentraţiei molare a soluţiei de azotat de argint este dublă faţă de scăderea concentraţiei molare a soluţiei de sulfat de cupru. Se cere: a) să se explice fenomenele care au avut loc şi să se scrie ecuaţiile chimice ale proceselor respective; b) să se determine masa atomică şi echivalentul metalului din care au fost confecţionate plăcuţele ştiind că acesta este divalent.

Mase atomice: Cu — 64; Ag — 108.

Scanned with OKEN Scanner

23°. Studiindu-se reacţia de echilibru:

$$PCl_{5(g)} \rightleftarrows PCl_{3(g)} + Cl_{2(g)}$$

s-a găsit că la o presiune totală de o atmosferă şi la temperatura de 250°C, la echilibru se găsesc în sistem 0,3 moli de PCl_5, 0,7 moli de PCl_3 şi 0,2 moli de Cl_2. Se cere: a) să se calculeze valoarea constantelor de echilibru K_p, K_c şi K_X; b) care va fi compoziţia sistemului la echilibru dacă se introduce în sistem un mol de gaz inert, menţinînd presiunea totală neschimbată, adică o atmosferă? Se menţine de asemenea temperatura de 250°C neschimbată.

2. CHIMIE ORGANICĂ

24°. Un acid dicarboxilic saturat *A* cu catenă normală are masa moleculară 146. Prin policondensare cu o diamină alifatică *B* cu aceeaşi catenă de atomi de carbon în moleculă ca şi acidul, se formează un compus macromolecular important. Se cer: a) formulele acidului, aminei şi a polimerului; b) cantităţile de acid şi de amină necesare obţinerii a 2,26 t de polimer, randamentul reacţiei fiind de 80%;

c) o schemă de transformare a acidului *A* în diamină *B*.

25°. La hidrogenarea a 5,4 g alchină *A* în prezenţă de nichel se consumă 2,46 l H_2 măsurat la presiunea de 2 atm şi temperatura de 27°C. Ştiind că prin tratarea aceleiaşi cantităţi de hidrocarbură *A* cu o soluţie de clorură diamino Cu(I) se obţine *a* g precipitat, să se determine formula moleculară a hidrocarburii *A*, să se scrie formulele de structură ale tuturor izomerilor posibili şi să se calculeze cantitatea *a* de precipitat rezultat.

26°. Prin arderea completă a 6 g substanţă *A* a cărei densitate (în stare de vapori) în raport cu aerul este de 2,07 se obţin 13,2 g dioxid de carbon şi 7,2 g apă.

Ştiind că substanţa *A* nu reacţionează cu sodiu metalic, se cere: a) să se determine formula structurală şi denumirea substanţei *A*; b) formulele şi denumirile izomerilor posibili ai substanţei *A*.

27°. Să se calculeze cantitatea de soluţie de hidroxid de calciu, de concentraţie 2 molar, necesară neutralizării acidului rezultat prin oxidarea a 400 g de benzen, ştiind că randamentul reacţiei de oxidare este de 78%.

28°. Scrieţi formulele tuturor produşilor rezultaţi în urma reacţiilor de condensare aldolică şi crotonică la care participă următorii compuşi carbonilici: butanonă şi propanal.

Arătaţi care dintre aceşti produşi prezintă izomerie optică şi care izomerie geometrică.

29°. Se supun 1000 m^3 *n*-butan (măsuraţi în condiţii normale) unui proces de dehidrogenare-cracare. Amestecul de gaze obţinut conţine: 15% butene, 10% etenă, 20% propenă şi 10% *n*-butan (în procente de volum). Se cere: a) ecuaţiile reacţiilor ce au loc; b) volumul amestecului gazos rezultat, măsurat la 273°C şi presiunea de 2 atm; c) volumele de 1-butenă şi 2-butenă obţinute (în condiţii normale) ştiind că se găsesc într-un raport molar de 1 : 2; d) conversia utilă (în raport cu propena), conversia totală şi randamentul.

30°. Patru substanţe izomere *A*, *B*, *C*, *D* cu formulă moleculară C_4H_7N conduc prin hidrogenare la maxim, la un compus unic *E*.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine formulele structurale ale celor cinci compuşi.

31°. Prin tratarea a 1,8 g substanţă *A* (cu masă moleculară 180) cu reactiv *Tollens* se depun 2,16 g Ag. Aceeaşi cantitate de substanţă *A*, tratată cu anhidridă acetică (în exces), conduce la 3,9 g produs *B*.

Ştiind că substanţa *A* este des întîlnită în natură, se cere: a) determinarea formulei moleculare şi structurale a substanţei *A*; b) scrierea ecuaţiilor chimice ale transformărilor care au loc; c) determinarea numărului de izomeri optici ai substanţei *A*.

32°. Se dă schema de reacţie (fig. Ch.C.1.).

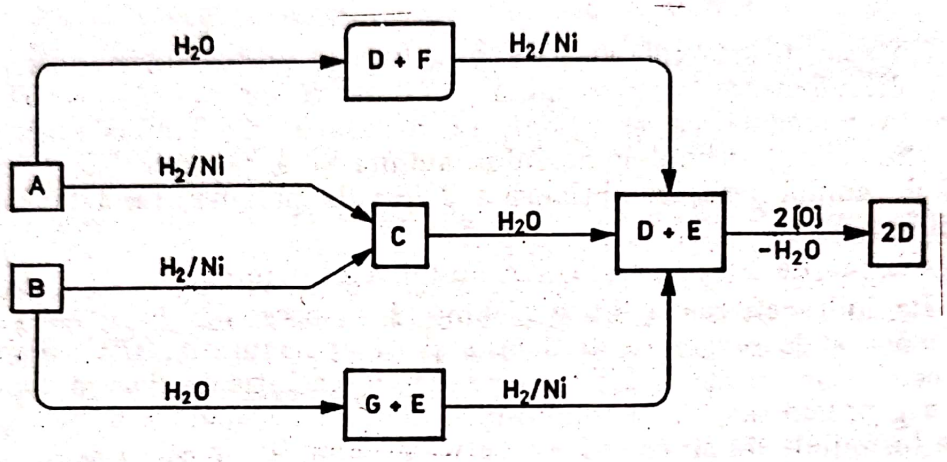


Fig. Ch.C.1

Ştiind că substanţele *A* şi *B* sînt izomeri cu formula moleculară $C_6H_{10}O_2$, se cere: a) formulele şi denumirile substanţelor *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*; b) să se scrie ecuaţiile reacţiilor chimice ce au loc.

33°. Esterul dietilic al unui acid dicarboxilic conţine 43,83% oxigen. Se cere: a) formula moleculară; b) o schemă de reacţii prin care folosind ca materie primă metanul (şi reactivi anorganici), se poate obţine diesterul.

34°. Să se scrie formulele şi să se denumească toate tripeptidele ce pot rezulta în urma reacţiei dintre glicocol şi α-alanină.

35°. Prin polietoxilarea integrală a 470 kg fenol se obţin 2670 kg hidroxipolieter (produs unitar).

Să se calculeze: a) formula moleculară a hidroxipolieterului; b) raportul molar fenol: oxid de etenă ştiind că s-a folosit un exces de 20% de oxid de etenă faţă de cantitatea necesară.

36°. Folosind 1500 m^3 acetilenă de puritate 74,66% (în volume) şi reactivi anorganici necesari, să se scrie ecuaţiile reacţiilor prin care se poate obţine *N*, *N*-di (β-hidroxietil) anilina şi să se calculeze cantitatea de *N*, *N*-di (β-hidroxietil) anilină obţinută considerînd un randament global al reacţiilor de 40%.

Scanned with OKEN Scanner

37°. Identificaţi substanţele din schema următoare, ştiind că *C*, *D*, *H* sînt substanţe anorganice, iar *I* este un acid organic monocarboxilic care conţine 53,33% O.

$$A \rightarrow B + C$$
$$B + D \rightarrow E$$
$$E + C \rightarrow F$$
$$F \rightarrow G + D$$
$$E + H \rightarrow I$$
$$B + C \rightarrow G$$
$$I + F \rightarrow J + D.$$

Scrieţi ecuaţiile reacţiilor şi precizaţi catalizatorii necesari.

38°. Se oxidează catalitic 448 m^3 metan (măsuraţi la 0°C şi 1 atm) la aldehida formică.

Prin condensarea fenolului cu aldehida formică în mediu bazic, la rece, se formează alcooli hidroxibenzilici. Se cere: a) ecuaţiile reacţiilor ce au loc; b) cantitatea de formol de concentraţie 40% ce se poate prepara cu aldehida formică obţinută, presupunînd că randamentul reacţiei de oxidare este de 75%; c) cantităţile de alcooli *o*- şi *p*-hidroxibenzilici obţinuţi ştiind că în produsul de reacţie se găsesc într-un raport molar de 3 : 2; d) ecuaţiile reacţiilor alcoolului *o*-hidroxibenzilic cu acidul acetic şi cu clorura de benzoil.

39°. Să se scrie ecuaţiile reacţiilor prin care se poate obţine acroleină, folosind ca materie primă *n*-butanul.

Calculaţi volumul de butan necesar fabricării a 10 kmoli acroleină, ştiind că randamentul global al reacţiilor este de 50%.

40°. Un copolimer butadienă-stiren conţine 81% butadienă şi 19% stiren. Se cer: a) raportul molar butadienă-stiren ce alcătuiesc copolimerul; b) cantităţile de monomeri necesare pentru a prepara 10 t de polimer, considerînd că fiecare monomer este de puritate 90%; c) o schemă de reacţii prin care, folosind ca materie primă *n*-butan se pot prepara cei doi monomeri.

41°. Scrieţi ecuaţiile reacţiilor de obţinere a acetonei plecînd de la următorii compuşi: a) propan; b) propină; c) 1-propanol.

42°. Prin nitrarea a 820 kg fenol cu acid azotic diluat (20%) se obţine un amestec care conţine (după îndepărtarea acidului azotic în exces şi a apei) 41,7% ortonitrofenol, 13,9% paranitrofenol şi fenol nereacţionat. Se cere: a) cantităţile de *o*- şi *p*-nitrofenol obţinute; b) conversia utilă, conversia totală şi randamentul reacţiei de nitrare; c) cantitatea de soluţie de acid azotic necesară, ştiind că s-a folosit un exces de 20% faţă de cantitatea calculată teoretic; d) concentraţia procentuală a soluţiei de acid azotic, rezultată în urma reacţiei de nitrare.

43°. Se supun fermentaţiei alcoolice 100 kg soluţie de glucoză de concentraţie 9%.

Gazul rezultat este absorbit într-o soluţie de $Ca(OH)_2$ de concentraţie 37%, iar alcoolul obţinut după separare şi purificare mai conţine 8% apă (ce se poate îndepărta prin tratare cu oxid de calciu). Se cere: a) ecuaţiile reacţiilor ce au loc;

Scanned with OKEN Scanner

b) cantitatea de alcool rezultată și cantitatea de soluție de hidroxid de calciu necesară absorbției totale a gazului degajat; c) numărul de moli de CaO necesari pentru îndepărtarea totală a apei din alcool.

44°. Se hidrogenează catalitic 179,2 l amestec de etan-etenă (măsurat în condiții normale).

Știind că după consumarea hidrogenului necesar hidrogenării etenei din amestec, presiunea din cilindrul de oțel, al cărui volum este de 60 l, în care se află hidrogenul, scade de la 10 atm la 7,94 atm, temperatura de 27°C rămînînd constantă, se cere: a) volumul de hidrogen necesar reacției (măsurat în condiții normale); b) raportul molar etan-etenă din amestecul inițial; c) volumul de etan rezultat în urma hidrogenării amestecului; d) cantitatea de etanol 95% ce se poate obține din etena din amestec, randamentul reacției fiind de 95%; e) formulele și denumirile compușilor ce se pot obține prin clorurarea etanului.

45°. Se clorurează fotochimic 212 kg *p*-xilen.

Știind că se obțin doi izomeri cloruraţi și că volumul de gaz degajat este de 134,4 m^3, se cere: a) ecuațiile reacțiilor ce au loc și formulele produșilor rezultați; b) ecuațiile reacțiilor de hidroliză (în mediu bazic) a produșilor rezultați la punctul a); c) formulele tuturor izomerilor posibili ai produșilor de la punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

REZOLVĂRI

1°. Elementul X este un halogen şi are structura electronică următoare: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$. Acesta este clorul, situat în perioada a III-a şi grupa a VII-a ale tabelului periodic. Legătura chimică din molecula Cl_2 este o legătură covalentă nepolară, legătură de tip sigma, formată prin acoperirea a doi orbitali $3p$ monoelectronici (cîte unul de la fiecare atom de clor) avînd axele una în prelungirea celeilalte.

b) $A_{Cl} = 0{,}75 \cdot 35 + 0{,}25 \cdot 37 = 35{,}5$.

c) Iniţial în cilindru se găsesc: $n_0 = \frac{pV}{RT} = \frac{49{,}2 \cdot 50}{300 \cdot 0{,}082} = 100$ moli Cl_2. După ce se consumă o parte din clor în cilindru mai rămîn:

$$n_1 = \frac{24{,}6 \cdot 50}{300 \cdot 0{,}082} = 50 \text{ moli } Cl_2.$$

Deci s-au consumat 50 de moli de clor, adică:

$$50 \cdot 71 = 3550 \text{ g} = 50 \cdot 22{,}4 = 1120 \text{ l } Cl_2 \text{ (c.n.)}$$

d) Reacţia cu hidrogenul este:

$$H_2 + Cl_2 \rightarrow 2\ HCl.$$

Conform acestei reacţii, dacă au reacţionat 50 moli Cl_2, au reacţionat tot 50 moli H_2 şi s-au format 100 moli HCl. Deci amestecul de gaze rezultat conţine 100 moli HCl şi 50 moli H_2 care n-au reacţionat (200 g H_2 = 100 moli din care reacţionează 50).

Compoziţia amestecului în procente de volum va fi aceeaşi ca în procente de moli, adică:

$$\frac{50 \cdot 100}{150} = 33{,}33\%\ H_2 \text{ şi } \frac{100 \cdot 100}{150} = 66{,}67\ \%\ HCl.$$

Scanned with OKEN Scanner

Masa totală a amestecului: $100 \cdot 36{,}5 + 50 \cdot 2 = 3750$ g amestec. Compoziţia în procente de masă:

$$\frac{3\,650}{3\,750} \cdot 100 = 97{,}33\%\ \text{HCl} \quad \text{şi} \quad \frac{100}{3\,750} \cdot 100 = 2{,}67\%\ \text{H}_2.$$

Masa moleculară medie: se poate calcula din fracţiile molare.

$$X_{HCl} = 100/150 = 2/3 \text{ şi } X_{H_2} = 50/150 = 1/3$$

$$\text{Deci } \overline{M} = X_{HCl} \cdot M_{HCl} + X_{H_2} \cdot M_{H_2} = \frac{2}{3} \cdot 36{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 25.$$

Densitatea amestecului de gaze:

$$\bar{\rho} = \frac{\overline{M}}{22{,}4} = 1{,}116 \text{ g/l} = 1{,}116 \text{ kg/m}^3.$$

Densitatea în raport cu aerul: $d_{aer} = \dfrac{\overline{M}}{28{,}9} = 0{,}865.$

2°. a) Se calculează cromul depus prin electroliză. Echivalentul cromului este 52/3. Deci:

$$\begin{array}{l} 52/3 \text{ g Cr} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 96\,500 \text{ C} \\ \underline{X \text{ g Cr} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2{,}5 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 0{,}804 \text{ C}} \end{array}$$

$$X = 0{,}52 \text{ g Cr}.$$

Sulfatul de crom în care se găseşte această cantitate de crom este:

$$M_{Cr_2(SO_4)_3} = 392.$$

$$\begin{array}{l} 392 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \cdot 52 \text{ g Cr} \\ \underline{Y \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}52 \text{ g Cr}} \end{array}$$

$$Y = 1{,}96 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3.$$

Concentraţia procentuală a soluţiei iniţiale a fost deci:

$$\begin{array}{l} 80 \text{ g soluţie} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}96 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 \\ \underline{100 \text{ g soluţie} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Z \text{ g } Cr_2(SO_4)_3} \end{array}$$

$$Z = 2{,}45\%.$$

b) Cristalohidratul are masa moleculară: $392 + 18 \cdot 18 = 716$.

Deci cele 1,96 g sulfat de crom anhidru sînt conţinute în:

$$\begin{array}{l} 716 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 18\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots 392 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 \\ \underline{X \text{ g } Cr_2(SO_4)_3 \cdot 18\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots 1{,}96 \text{ g } Cr_2(SO_4)_3} \end{array}$$

$$X = 3{,}58 \text{ g cristalohidrat } Cr_2(SO_4)_3 \cdot 18\ H_2O.$$

Apa necesară preparării celor 80 g soluţie este:

$$80 - 3{,}58 = 76{,}42 \text{ g apă}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3°. A. a) Presiunile parţiale sînt: $P_{CH_4} = \frac{25}{100} \cdot 1 = 0{,}25$ atm;

$$P_{H_2} = \frac{75}{100} \cdot 1 = 0{,}75 \text{ atm},$$

deoarece procentele de volum, pentru sisteme gazoase, corespund cu procentele de moli şi deci fracţiile molare ale metanului şi hidrogenului sînt respectiv 0,25 şi 0,75, iar presiunea totală este 1 atm.

$$K_p = \frac{P_{H_2}^2}{P_{CH_4}} = 2{,}25 \text{ atm}.$$

b) La echilibru presiunile parţiale trebuie să verifice şi în acest caz ecuaţiile:

$$P_{CH_4} + P_{H_2} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{P_{H_2}^2}{P_{CH_4}} = K_p = 2{,}25$$

deci aceleaşi egalităţi ca la punctul a) şi ca atare sistemul va avea aceeaşi compoziţie de echilibru: 25% CH_4 şi 75% H_2.

B. Reacţia are loc acum la volum constant şi deci este util să calculăm constanta de echilibru K_c

$$K_c = \frac{K_p}{(RT)^{\Delta n}} = \frac{K_p}{RT} = \frac{2{,}25}{0{,}082 \cdot 910} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$$

căci variaţia numărului de moli (numai pentru componentele gazoase!) este $\Delta n = 1$.

Notînd cu X numărul de moli de metan transformat, la echilibru vom avea $(5 \cdot 10^{-2} - X)$ moli CH_4 şi $2X$ moli H_2.

$$K_c = \frac{[H_2]^2}{[CH_4]} = \frac{4X^2}{(5 \cdot 10^{-2} - X)} = 3 \cdot 10^{-2}.$$

Rezolvînd această ecuaţie de gradul doi în X şi luînd în considerare numai soluţia pozitivă se găseşte $X = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ moli de metan transformat.

Rezultă că la echilibru în sistem se găsesc:

$$5 \cdot 10^{-2} - 1{,}6 \cdot 10^{-2} = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ moli} = 0{,}544 \text{ g } CH_4;$$

$$2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-2} = 3{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ moli} = 0{,}064 \text{ g } H_2;$$

şi $1{,}6 \cdot 10^{-2}$ moli $= 0{,}192$ g C.

Numărul total de moli de gaz este: $3{,}4 \cdot 10^{-2} + 3{,}2 \cdot 10^{-2} = 6{,}6 \cdot 10^{-2}$.

Presiunea totală din sistem va fi deci:

$$P = \frac{n}{V} \cdot RT = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-2}}{1} \cdot 0{,}082 \cdot 910 = 4{,}92 \text{ atm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4°. a) Fie X numărul de grame de piatră vînătă necesară. Masa moleculară a acesteia este $160 + 90 = 250$. Aceasta conține:

$$\begin{array}{l} 250 \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 160 \text{ g } CuSO_4 \\ X \text{ g } CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m \text{ g } CuSO_4 \end{array}$$

$$m = \frac{160\,X}{250} \text{ g } CuSO_4$$

și analog se obține $m_1 = \frac{90}{250}\,X$ g H_2O.

Apa din sistem va fi deci: $\left(150 + \frac{9\,X}{25}\right)$ g.

Punînd condiția că soluția este saturată la 50°C avem:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ g } H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 25{,}1 \text{ g } CuSO_4 \\ \left(150 + \frac{9}{25} \cdot X\right) \text{ g } H_2O \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{16}{25}\,X \text{ g } CuSO_4 \end{array}$$

Rezolvînd această ecuație în raport cu X se obține $X = 68{,}5$ g $CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$.

b) Fie Y cantitatea de $CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$ care se depune. Ea va conține: $\frac{16}{25}\,Y$ g $CuSO_4$ și, respectiv $\frac{9}{25}\,Y$ g H_2O. Înainte de răcire (deci la 50°C) sistemul conține $\left(150 + \frac{9}{25} \cdot 68{,}5\right) = 174{,}66$ g H_2O și $\frac{16}{25} \cdot 68{,}5 = 43{,}84$ g $CuSO_4$. După răcire în soluție mai rămîn:

$$\left(174{,}66 - \frac{9}{25}\,Y\right) \text{ g } H_2O \text{ și } \left(43{,}84 - \frac{16}{25}\,Y\right) \text{ g } CuSO_4.$$

Punînd condiția că soluția este saturată la 0°C, avem:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ g apă} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 12{,}9 \text{ g } CuSO_4 \\ \left(174{,}66 - \frac{9}{25}\,Y\right) \text{ g apă} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \left(43{,}84 - \frac{16}{25}\,Y\right] \text{ g } CuSO_4 \end{array}$$

Rezolvînd ecuația în raport cu Y se găsește $Y = 35{,}9$ g $CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$ care se depune la răcirea soluției pînă la 0°C.

c) Total soluție la 50°C: $150 + 68{,}5 = 218{,}5$ g.

Concentrația procentuală (procente de masă):

$$\begin{array}{l} 218{,}5 \text{ g sol} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 43{,}84 \text{ g } CuSO_4 \\ 100 \text{ g sol} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ X \end{array}$$

$$X = 20{,}06\%.$$

Volumul soluției: $V = m/\rho = \frac{218{,}5}{1{,}20} = 182{,}08$ cm³.

Scanned with OKEN Scanner

Concentrația molară: 182,08 cm³ sol ..... $\frac{43,84}{160}$ moli $CuSO_4$

1000 cm³ sol ..... M

$M = 1,505$ mol/l.

Concentrația molală: 174,66 g apă ..... $\frac{43,84}{160}$ moli $CuSO_4$

1000 g apă ..... m

$m = 1,569$ molal.

Titrul: $T = 43,84/182,08 = 0,2408$ g $CuSO_4/cm^3$ soluție.

5°. Fie X și Y masa în grame de zinc și respectiv aluminiu din proba de aliaj.

a) Ecuațiile reacțiilor chimice ce au loc:

$$Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2$$

$$2\,Al + 3\,H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3\,H_2.$$

Volumul total de hidrogen degajat, în condiții normale va fi:

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \text{ de unde } V_0 = \frac{850 \cdot 12,11 \cdot 273}{300 \cdot 760} = 12,33 \text{ l (c.n.).}$$

Se exprimă cantitatea de hidrogen rezultată din cele două reacții în funcție de X și, respectiv Y:

65 g Zn ..... 22,4 l H_2

X g Zn ..... v_1 l H_2

$v_1 = 0,3446\ X$ l H_2

$2 \cdot 27$ g Al ..... $3 \cdot 22,4$ l H_2

Y g Al ..... v_2 l H_2

$v_2 = 1,2444$ l H_2.

Se alcătuiește următorul sistem:

$$\begin{cases} X + Y = 14,6 \\ 0,3446\ X + 1,2444\ Y = 12,33 \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obține: $X = 6,5$ g Zn și $Y = 8,1$ g Al.

Compoziția aliajului în procente de masa:

$$\frac{6,5}{14,6} \cdot 100 = 44,52\%\ Zn \text{ și } \frac{8,1}{14,6} \cdot 100 = 55,48\%\ Al.$$

Aliajul conține $\frac{6,5}{65} = 0,1$ moli Zn și $\frac{8,1}{27} = 0,3$ moli Al.

Compoziția în procente de moli:

$$\frac{0,1}{0,4} \cdot 100 = 25\%\ Zn \text{ și } \frac{0,3}{0,4} \cdot 100 = 75\%\ Al.$$

b) Se calculează acidul sulfuric teoretic necesar.

În reacția cu zincul: 65 g Zn ..... 98 g H_2SO_4

6,5 g Zn ..... X g H_2SO_4

$X = 9,8$ g H_2SO_4.

Scanned with OKEN Scanner

În reacția cu aluminiul: $2 \cdot 27$ g Al .....$3 \cdot 98$ g H_2SO_4
8,1 g Al .....Y g H_2SO_4

$Y = 44{,}1$ g H_2SO_4.

Deci pentru dizolvarea aliajului este necesar teoretic 53,9 g H_2SO_4.

Excesul de acid: $\frac{50}{100} \cdot 53{,}9 = 26{,}95$ g. Deci s-a folosit 80,85 g H_2SO_4.

Volumul soluției 1 N care conține acest acid este:

1000 cm^3 sol .....49 g (1 echivalent) H_2SO_4
V cm^3 sol .....80,85 g H_2SO_4

$V = 1650$ cm^3 soluție 1 N H_2SO_4 folosită.

c) Masa moleculară a cristalohidratului de sulfat de aluminiu este 666.

$2 \cdot 27$ g Al.....666 g $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18\ H_2O$
8,1 g Al X

$X = 99{,}9$ g $Al_2(SO_4)_3 \cdot 18\ H_2O$.

6°. În soluție există următoarele specii Cu^{2+}; SO_4^{2-}; H_3O^+; HO^-.

a) Reacțiile de la electrozi:

La catod: $Cu^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Cu$

La anod: $HO^- - 1\ e^- \rightarrow HO$ (reacția primară)

$$\left.\begin{array}{l} HO + HO \rightarrow H_2O + O \\ O + O \rightarrow O_2 \end{array}\right\} \text{(reacții secundare)}$$

Rezultatul electrolizei este: depunere de cupru la catod, degajare de oxigen la anod și în soluție rămîn ionii H_3O^+ și SO_4^{2-} adică se acumulează acid sulfuric. Reacția globală poate fi scrisă astfel:

$$CuSO_4 + H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} Cu + 1/2\ O_2 + H_2SO_4.$$

b) Se calculează cantitatea de cupru depus la catod:
Echivalentul cuprului este $64/2 = 32$. Deci:

32 g Cu .....96 500 C
X g Cu .....$3{,}35 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0{,}8$ C

$X = 3{,}2$ g Cu $= 0{,}05$ moli Cu.

Rezultă că s-au dizolvat 0,05 moli $= 12{,}5$ g $CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$.
Apa utilizată: $100 - 12{,}5 = 87{,}5$ g apă.

c) Echivalentul oxigenului este $\frac{22{,}4}{4} = 5{,}6$ l (c.n.). Volumul oxigenului degajat la anod va fi:

5,6 l O_2.....96 500 C
X l O_2 ..... $3{,}35 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0{,}8$ C

$X = 0{,}56$ l O_2 (c.n.); $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V = \frac{p_0V_0T}{pT_0} = \frac{1 \cdot 0{,}56 \cdot 300}{2 \cdot 273} = 0{,}31$ l.

Scanned with OKEN Scanner

Observație: Oxigenul se poate calcula și din ecuația globală a procesului de electroliză utilizînd de exemplu, cantitatea de cupru depus la catod:

$$\begin{array}{l} 64\ g\ Cu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11{,}2\ l\ O_2 \\ 3{,}2\ g\ Cu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X\ l\ O_2 \end{array}$$

$$X = 0{,}56\ l\ O_2\ (c.n.).$$

d) Cantitatea de acid sulfuric obținută se calculează din ecuația globală a procesului de electroliză:

$$\begin{array}{l} 64\ g\ Cu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 98\ g\ H_2SO_4 \\ 3{,}2\ g\ Cu\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X\ g\ H_2SO_4 \end{array}$$

$$X = 4{,}9\ g\ H_2SO_4 = 0{,}1\ echivalenți.$$

Volumul soluției este: $V = m/\rho = 100/1{,}25 = 80\ cm^3$ soluție.

Se calculează concentrația normală a acestei soluții:

$$\begin{array}{l} 80\ cm^3\ soluție\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}1\ echivalenți\ H_2SO_4 \\ 1000\ cm^3\ soluție\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y \end{array}$$

$$Y = 1{,}25\ echivalenți\ gram/l\ soluție.$$

Deci soluția are normalitatea 1,25 N.

7°. Se calculează entalpia standard de reacție:

$$\Delta H^0 = \left(H^0_{f_{CO}} + 3H^0_{f_{H_2}}\right) - \left(H^0_{f_{CH_4}} + H^0_{f_{H_2O}}\right).$$

Hidrogenul fiind un element în starea sa stabilă în condiții standard, rezultă (prin convenție) $H^0_{f_{H_2}} = 0$. Înlocuind celelalte valori din problemă se obține $\Delta H^0 = 206$ kJ.

Variația de entalpie liberă în reacție este:

$$\Delta G^0 = \Delta H^0 - T\Delta S^0.$$

Valoarea lui ΔS^0 este:

$$\Delta S^0 = (S^0_{CO} + 3S^0_{H_2}) - (S^0_{CH_4} + S^0_{H_2O}) = 214{,}68\ J/mol \cdot K.$$

Pentru ΔG^0 se obține:

$$\Delta G^0 = 206 \cdot 10^3 - 214{,}68 \cdot 473 = 1{,}04 \cdot 10^5\ J > 0.$$

Cum ΔG^0 pentru reacția directă este pozitiv înseamnă că această reacție nu poate fi spontană în aceste condiții și deci este spontană reacția inversă (reacția 2).

b) Temperatura minimă la care reacția 1 devine spontană se află din condiția $\Delta G^0 = 0$ adică:

$$206 \cdot 10^3 - 214{,}68\ T = 0$$

de unde rezultă $T_{min} = 960\ K = 687°C$.

c) La $800°C = 1073\ K$ avem:

$$\Delta G^0 = 206 \cdot 10^3 - 214{,}68 \cdot 1073 = -2{,}4 \cdot 10^4\ J < 0$$

deci într-adevăr la această temperatură reacția directă (reacția 1) este spontană.

Scanned with OKEN Scanner

8°. a) Expresia vitezei de reacţie este:

$$v = k[NO]^m \cdot [Cl_2]^n$$

unde m şi n sînt ordinele parţiale de reacţie în raport cu NO şi respectiv Cl_2.

Notînd concentraţia lui NO cu C avem:

$$v = k[C]^m \cdot [Cl_2]^n.$$

Dublînd concentraţia lui NO rezultă:

$$2\,v = k(2C)^m \cdot [Cl_2]^n.$$

Făcînd raportul celor două relaţii se obţine:

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}\right]^m \text{ de unde rezultă } m = 1.$$

În mod analog se obţine şi $n = 1$. Deci expresia vitezei de reacţie este:

$$v = k[NO] \cdot [Cl_2].$$

b) Întrucît ordinele de reacţie (parţiale) nu coincid cu coeficienţii stoechiometrici reacţia nu poate fi simplă, deci este o reacţie complexă, ea avînd loc în mai multe etape.

c) Se calculează concentraţiile molare ale componenţilor:

$$12 \text{ g NO} = \frac{12}{30} = 0{,}4 \text{ moli NO}$$

$$14{,}2 \text{ g } Cl_2 = \frac{14{,}2}{71} = 0{,}2 \text{ moli } Cl_2.$$

Volumul vasului fiind 2 l rezultă valorile concentraţiilor:

$$[NO] = 0{,}2 \text{ mol/l}$$
$$[Cl_2] = 0{,}1 \text{ mol/l}.$$

Viteza iniţială a reacţiei va fi:

$$v = k[NO] \cdot [Cl_2] = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mol} \cdot \text{s}} \cdot 0{,}2 \frac{\text{mol}}{1} \cdot 0{,}1 \frac{\text{mol}}{1} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ mol/l} \cdot \text{s}.$$

9°. a) Reacţia de ionizare în soluţie apoasă a acidului benzoic este:

$$C_6H_5COOH + H_2O \rightleftarrows C_6H_5COO^- + H_3O^+.$$

Expresia constantei de aciditate va fi:

$$K_a = \frac{[C_6H_5COO^-] \cdot [H_3O^+]}{[C_6H_5COOH]}.$$

Făcînd aproximaţia că acidul benzoic este destul de slab pentru a putea neglija concentraţia moleculelor care se disociază în comparaţie cu cea a moleculelor nedi-

Scanned with OKEN Scanner

sociate, dar el este în acelaşi timp un acid mult mai tare decît apa ca acid şi deci se poate neglija concentraţia ionilor H_3O^+ proveniţi din ionizarea apei, se obţine:

$$K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C}$$

deoarece, conform reacţiei de ionizare $[H_3O^+] = [C_6H_5COO^-]$. C este concentraţia iniţială a acidului benzoic în soluţie (mol/l).

Masa moleculară a acidului benzoic este 122. Cantitatea de acid dizolvată este 2,44/122 = 0,02 moli în 2 l soluţie. Deci concentraţia molară a acidului benzoic este 0,01 mol/l.

Din $pH = 3$ rezultă $[H_3O^+] = 1 \cdot 10^{-3}$ mol/l. Înlocuind aceste valori în expresia constantei de aciditate se obţine $K_a = 1 \cdot 10^{-4}$.

b) Reacţia cu NaOH:

$$C_6H_5COOH + NaOH \rightarrow C_6H_5COO^-Na^+ + H_2O.$$

Rezultă că numărul de moli de NaOH necesari pentru neutralizare este egal cu numărul de moli de acid benzoic adică 0,02 moli.

Volumul soluţiei de NaOH 0,1 N va fi:

1 l soluţie ..... 0,1 moli NaOH
V l soluţie ..... 0,02 moli NaOH

$V = 0{,}2$ l $= 200$ cm^3 soluţie NaOH 0,1 N.

deoarece pentru NaOH 1 mol este egal cu un echivalent gram.

c) Soluţia de acid benzoic se diluează de 100 de ori şi ca atare concentraţia sa va deveni de tot atîtea ori mai mică, adică $C_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ mol/l.

Din relaţia $K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C_1}$ rezultă că în această soluţie diluată

$[H_3O^+] = \sqrt{K_a \cdot C_1} = \sqrt{1 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 1 \cdot 10^{-4}$ mol/l iar $pH = -\lg [H_3O^+] = 4$. Deci pH-ul soluţiei obţinute este 4.

10°. Volumul total al soluţiei după amestecare este 4 l. Deci concentraţia azotatului de plumb va deveni, după amestecare, $\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$ mol/l.

Concentraţia sulfatului de sodiu va deveni $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ mol/l.

Ambele săruri fiind complet ionizate în soluţie apoasă rezultă că şi concentraţiile $[Pb^{2+}] = 5 \cdot 10^{-5}$ şi $[SO_4^{2-}] = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ mol/l.

Precipitatul de sulfat de plumb se va forma numai dacă produsul concentraţiilor ionilor Pb^{2+} şi SO_4^{2-} va fi mai mare decît produsul de solubilitate al acestei sări. Deci:

$$[Pb^{2+}] \cdot [SO_4^{2-}] = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} = 7{,}5 \cdot 10^{-9} < P_s$$

şi ca atare la amestecarea celor două soluţii nu se va forma precipitat de sulfat de plumb.

Scanned with OKEN Scanner

11°. A. a) În soluția apoasă inițială are loc echilibrul:

$$A + H_2O \rightleftarrows B + H_3O^+.$$

Valoarea constantei de aciditate K_a va fi:

$$K_a = \frac{[B] \cdot [H_3O^+]}{[A]} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^{-1}} = 1 \cdot 10^{-6}.$$

Această valoare este constantă la o temperatură dată, fiind o caracteristică a cuplului acid-bază conjugată A/B. Deci cînd $pH = 7$, $[H_3O^+] = 1 \cdot 10^{-7}$ și raportul are valoarea:

$$\frac{[B]}{[A]} = \frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-7}} = 10.$$

Acest raport este independent de volumul final al soluției, el depinzînd numai de pH-ul acesteia.

b) În soluția inițială $[A] + [B] = 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-1} = 1{,}1 \cdot 10^{-1}$. Această cantitate rămîne constantă orice s-ar adăuga soluției inițiale (legea conservării materiei). Fie X numărul de moli de B și Y numărul de moli de A în soluție (soluția avînd $pH = 7$ și volumul de 1 l). Rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} X + Y = 1{,}1 \cdot 10^{-1} \\ \frac{X}{Y} = 10 \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem se obține: $X = 1 \cdot 10^{-1}$ și $Y = 1 \cdot 10^{-2}$.
Întrucît volumul total al soluției este de 1 l înseamnă că:

$$[A] = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l și } [B] = 1 \cdot 10^{-1} \text{ mol/l.}$$

B. a) Deoarece raportul concentrațiilor $\frac{[B]}{[A]}$ nu depinde de volumul soluției ci numai de pH, iar acesta este tot 7, înseamnă că acest raport va avea tot valoarea 10.

b) Notînd tot cu X și Y numărul de moli de B și, respectiv de A din soluție (aceasta avînd tot $pH = 7$ dar volumul total 2 l) vom avea: $X = 2[B]$ și $Y = 2[A]$ și deci $X + Y = 2([B]) + [A])$.

Evident că și de data aceasta: $\begin{cases} X + Y = 1{,}1 \cdot 10^{-1} \\ \frac{X}{Y} = 10. \end{cases}$

Avînd în vedere soluțiile precedente, $X = 1 \cdot 10^{-1}$ și $Y = 1 \cdot 10^{-2}$.
Rezultă: $[A] = Y/2 = 5 \cdot 10^{-3}$ mol/l și $[B] = X/2 = 5 \cdot 10^{-2}$ mol/l.

12°. a) Avem cazul a două echilibre simultane. Plecînd de la sulfat de mangan pur, în prima reacție rezultă un număr n de moli de SO_2 și evident $2n$ moli de SO_3. Dar cei $2n$ moli de SO_3 se vor disocia cu un grad de disociere α și vor forma $2n\alpha$ moli suplimentari de SO_2 rămînînd nedisociați un număr de $2n(1-\alpha)$ moli de SO_3.

Scanned with OKEN Scanner

Bilanțul numărului de moli pentru componenții gazoși din sistem este:

$2\ n(1-\alpha)$ moli de SO_3;
$n + 2\ n\alpha$ moli de SO_2
$n\alpha$ moli de O_2
Total: $n(3+\alpha)$ moli de gaz.

Dacă P este presiunea totală și P_{SO_2} presiunea parțială a SO_2, vom avea:

$$\frac{P_{SO_2}}{P} = \frac{\text{numărul de moli de } SO_2}{\text{numărul total de moli}} = \frac{n(1+2\alpha)}{n(3+\alpha)} = \frac{555}{783}.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu α se obține:

$$\alpha = 0{,}875.$$

b) $$P_{SO_3} = \frac{\text{numărul de moli de } SO_3}{\text{numărul total de moli}} \cdot P = \frac{2(1-\alpha)}{3+\alpha} \cdot P = 50{,}5 \text{ mmHg}.$$

$$P_{O_2} = \frac{\text{numărul de moli de } O_2}{\text{numărul total de moli}} \cdot P = \frac{\alpha}{3+\alpha} P = 178 \text{ mmHg}.$$

c) Constanta de echilibru K_{p_1} pentru primul echilibru va fi:

$$K_{p_1} = \frac{P^2_{SO_2} \cdot P_{SO_3}}{1} = 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ (mmHg)}^3.$$

Constanta de echilibru K_{p_2} pentru cel de al doilea echilibru va fi:

$$K_{p_2} = \frac{P^2_{SO_2} \cdot P_{O_2}}{P^2_{SO_3}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ mmHg}.$$

13°. Prin diluare, concentrațiile celor doi acizi scad de 10 ori:

$$c = c_1 = c_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}.$$

a) $$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$$
$$HClO + H_2O \rightleftarrows ClO^- + H_3O^+.$$

Concentrațiile de echilibru ale speciilor existente în sistem vor fi:

$[CH_3COOH] = c(1-\alpha_1)$; $[CH_3COO^-] = c\alpha_1$; $[HClO] = c(1-\alpha_2)$
$[ClO^-] = c\alpha_2$ iar $[H_3O^+] = c\alpha_1 + c\alpha_2 = c(\alpha_1 + \alpha_2)$

unde α_1 și α_2 sînt gradele de disociere ale acidului acetic și, respectiv, acidului hipocloros.

Constantele de ionizare ale celor doi acizi sînt:

$$K_1 = \frac{[CH_3COO^-]\cdot[H_3O^+]}{[CH_3COOH]} = \frac{c\cdot\alpha_1 \cdot c(\alpha_1+\alpha_2)}{c(1-\alpha_1)} = \frac{c\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}{1-\alpha_1} \approx c\ \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$K_2 = \frac{[ClO^-]\cdot[H_3O^+]}{[HClO]} = \frac{c\alpha_2 \cdot c(\alpha_1+\alpha_2)}{c\cdot(1-\alpha_2)} = \frac{c\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-\alpha_2} \approx c\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a făcut aproximația că ambii acizi sînt destul de slabi astfel încît să se poată neglija valorile lui α_1 și α_2 în comparație cu unitatea (adică să se poată neglija concentrația moleculelor ionizate în comparație cu cea a moleculelor neionizate, aceasta din urmă aproximîndu-se ca fiind egală cu concentrația totală a acizilor în soluțiile respective).

Rezultă:

$$K_1 + K_2 = c(\alpha_1 + \alpha_2)^2$$

$$c(K_1 + K_2) = c^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = [H_3O^+]^2$$

de unde $[H_3O^+] = \sqrt{c(K_1 + K_2)}$ și $pH = -\lg [H_3O^+] = 3{,}87$.

b) Din expresiile lui K_1 și K_2 de la punctul precedent se găsește:

$$\alpha_1 = \frac{K_1}{\sqrt{c(K_1 + K_2)}} = 0{,}134$$

$$\alpha_2 = \frac{K_2}{\sqrt{c(K_1 + K_2)}} = 0{,}275 \cdot 10^{-3}.$$

c) Cînd soluția conține numai HClO, există numai echilibrul de disociere al acestuia și dacă în acest caz gradul de disociere al său este α_2' atunci:

$$K_2 = \frac{c(\alpha_2')^2}{1 - \alpha_2'} \approx c(\alpha_2')^2 \text{ de unde } \alpha_2' = \sqrt{\frac{K_2}{c}} = 6{,}1 \cdot 10^{-3}.$$

Se observă că în prezența CH_3COOH gradul de disociere al HClO scade aproape de 22 de ori.

14°. a) Numărul inițial de moli de gaz din cilindru este:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{8 \cdot 30}{0{,}082 \cdot 292} = 10 \text{ moli gaz.}$$

Deci în cilindru mai rămîn 4 moli de gaz care se răcește la 11°C. Presiunea va deveni:

$$P = \frac{n\,RT}{V} = \frac{4 \cdot 0{,}082 \cdot 284}{30} = 3{,}1 \text{ atm.}$$

b) $\rho = \frac{M}{22{,}4}$ de unde $M = \rho \cdot 22{,}4 = 2$. Deci gazul este hidrogenul.

c) În vasul cu volumul constant se introduc 6 moli de hidrogen și $\frac{1016}{254} = 4$ moli I_2. Reacția ce are loc este:

$$H_2 + I_2 \rightleftarrows 2\,HI.$$

Notînd cu X numărul de moli de I_2 și H_2 care au reacționat la echilibru, rezultă evident $2X$ moli de HI și mai rămîn în vas $(6 - X)$ moli H_2 și $(4 - X)$ moli I_2. Deci concentrațiile de echilibru vor fi:

$$\frac{6 - X}{V} \text{ moli/l } H_2; \quad \frac{4 - X}{V} \text{ moli/l } I_2 \text{ și } \frac{2X}{V} \text{ moli/l HI,}$$

unde V reprezintă volumul vasului în litri.

Scanned with OKEN Scanner

Expresia constantei de echilibru K_c este:

$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2]\cdot[I_2]}.$$

Cum reacţia are loc fără variaţia numărului de moli, $K_c = K_p$. Deci:

$$60 = \frac{\left[\frac{2X}{V}\right]^2}{\left[\frac{6-X}{V}\right]\cdot\left[\frac{4-X}{V}\right]} = \frac{4X^2}{(6-X)\cdot(4-X)}.$$

Rezolvînd ecuaţia şi luînd numai soluţia convenabilă ca sens fizic ($X \leqslant 4$) se găseşte $X = 3{,}63$.

Rezultă că la echilibru în vas se găsesc:

2,37 moli H_2; 0,37 moli I_2 şi 7,26 moli HI, adică în total 10 moli amestec. Compoziţia în procente de volum va fi identică cu cea în procente de moli şi anume:

23,7% H_2; 3,7% I_2 şi 72,6% HI.

15°. Căldura de formare este variaţia de entalpie a sistemului în reacţia de sinteză a unui mol de substanţă din elementele componente, în starea lor cea mai stabilă în condiţii standard (la 298 K şi 1 atm). Deci căldura de formare a etenei va fi variaţia de entalpie în reacţia:

$$2\ C_{(s)} + 2\ H_{2(g)} \rightarrow C_2H_{4(g)}.$$

Această reacţie se poate obţine (pe baza legii lui *Hess*) din reacţiile date dacă acestea se înmulţesc cu nişte coeficienţi şi apoi se adună algebric. Fie a, b, c şi d coeficienţii cu care trebuie înmulţite ecuaţiile 1, 2, 3 şi, respectiv 4, pentru ca prin adunarea lor să rezulte ecuaţia de formare a etenei. Pentru găsirea acestor coeficienţi se alege un anumit component şi se identifică coeficientul său din ecuaţiile adunate cu coeficientul aceluiaşi component din ecuaţia de formare a etenei (care poate fi şi nul dacă componentul ales nu se găseşte în reacţia de formare a etenei). Pentru a nu greşi semnele se recomandă transcrierea tuturor ecuaţiilor cu toţi termenii în partea stîngă şi egalîndu-le cu zero:

A. $aC_2H_{4(g)} + aH_{2(g)} - aC_2H_{6(g)} = 0$

B. $bC_2H_{6(g)} + 7/2\ b\ O_2 - 2\ bCO_{2(g)} - 3\ b\ H_2O_{(l)} = 0$

C. $cC_{(s)} + cO_{2(g)} - cCO_{2(g)} = 0$

D. $dH_{2(g)} - 1/2\ dO_{2(g)} - dH_2O_{(l)} = 0$ şi $2\ C_{(s)} + 2H_{2(g)} - C_2H_{4(g)} = 0$.

Considerînd spre exemplu C_2H_4 pe care o găsim numai în ecuaţia (1) şi în ecuaţia de formare a etenei obţinem imediat: $a = -1$. În mod analog considerînd carbonul, rezultă $c = 2$. Dacă se ia hidrogenul care participă la reacţiile (1) şi (4) se găseşte: $a + d = 2$ de unde rezultă $d = 3$ (punînd valoarea $a = -1$). Pentru a-l determina pe b se poate lua C_2H_6 care participă numai la reacţiile (1) şi (2) şi vom avea: $-a + b = 0$ deoarece etanul nu participă la reacţia de formare a etenei. Rezultă imediat $b = a = -1$. Se obţin aşadar coeficienţii:

$$a = -1;\ b = -1;\ c = 2;\ d = 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Căldura de formare a etenei va fi:

$$\Delta H_f^0 = a \cdot \Delta H_1 + b \cdot \Delta H_2 + c \cdot \Delta H_3 + d \cdot \Delta H_4$$

Înlocuind valorile numerice rezultă: $\Delta H^0_{f_{C_2H_4}} = 52{,}1$ kJ/mol.

Căldura de ardere este variaţia de entalpie în reacţia de ardere a unui mol de substanţă pînă la produşii finali de ardere (în starea de oxidare maximă). Reacţia de ardere a etenei este:

$$C_2H_{4(g)} + 3\ O_{2(g)} \rightarrow 2\ CO_{2(g)} + 2\ H_2O_{(lq)}$$

sau: $C_2H_{4(g)} + 3\ O_{2(g)} - 2\ CO_{2(g)} - 2\ H_2O_{(lq)} = 0$.

Procedînd analog cu cazul precedent se obţin următorii coeficienţi:

$$k = 1;\ l = 1;\ m = 0;\ n = -1.$$

Căldura de ardere a etenei va fi:

$$\Delta H_{\text{ardere}} = k \cdot \Delta H_1 + l \cdot \Delta H_2 + m \cdot \Delta H_3 + n \cdot \Delta H_4.$$

Înlocuind din nou valorile numerice respective se obţine:

$$\Delta H_{\text{ardere}\,C_2H_4} = -1409{,}5\ \text{kJ}.$$

16°. a) Expresia constantei de echilibru K_c va fi: $K_c = \frac{[PCl_3]\cdot[Cl_2]}{[PCl_5]}$.

Fie X numărul de moli de PCl_5 care s-au descompus, la echilibru, şi deci s-au format X moli PCl_3 şi tot X moli Cl_2. Numărul iniţial de moli de PCl_5 este: $\frac{417}{208{,}5} = 2$ iar la echilibru mai rămîn $(2 - X)$ moli PCl_5. Concentraţiile de echilibru vor fi:

$\frac{X}{10} = 0{,}1\ X$ mol/l PCl_3; $\frac{X}{10} = 0{,}1\ X$ mol/l Cl_2 şi $\frac{2-X}{10} = (0{,}2 - 0{,}1\ X)$ mol/l PCl_5.

Deci:

$$1{,}7 \cdot 10^{-2} = \frac{(0{,}1\ X)^2}{0{,}2 - 0{,}1\ X} = \frac{0{,}1\ X^2}{2 - X}.$$

Rezolvînd ecuaţia în raport cu X şi luînd soluţia pozitivă (singura care corespunde ca sens fizic) se obţine: $X = 0{,}504$.

Rezultă că la echilibru în vas vor fi:

$0{,}504$ moli $PCl_3 = 0{,}504 \cdot 137{,}5 = 69{,}300$ g PCl_3;

$0{,}504$ moli $Cl_2 = 0{,}504 \cdot 71 = 35{,}784$ g Cl_2;

$2 - 0{,}504 = 1{,}496$ moli $PCl_5 = 1{,}496 \cdot 208{,}5 = 311{,}916$ g PCl_5.

b) Reacţia are loc cu variaţia numărului de moli, $\Delta n = 1$.

Prin urmare:

$$K_p = K_c(RT)^{\Delta n}$$

$$K_p = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}082 \cdot 523 = 0{,}729\ \text{atm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

17°. a) În sistem se găsesc la echilibru:

$\frac{6,4}{32} = 0,2$ moli metanol; $\frac{6,8}{68} = 0,1$ moli formiat de sodiu;

$\frac{8}{40} = 0,2$ moli hidroxid de sodiu; $\frac{3,0}{30} = 0,1$ moli formaldehidă.

Volumul soluției fiind 2 l, concentrațiile respective vor fi egale cu jumătate din numărul de moli. Deci:

$$K_c = \frac{[CH_3OH]\cdot[HCOONa]}{[NaOH]\cdot[CH_2O]^2} = \frac{0,1\cdot 0,05}{0,1\cdot(0,05)^2} = 20 \text{ l/mol.}$$

b) Fie X numărul de moli de NaOH care trebuie introduși în sistem.

Dacă s-au format la echilibru 19,2 g CH_3OH adică 0,6 moli metanol, conform ecuației reacției s-au format tot 0,6 moli formiat de sodiu, au reacționat de asemenea tot 0,6 moli NaOH și 1,2 moli CH_2O. Deci la echilibru sistemul conține:

$2 - 1,2 = 0,8$ moli CH_2O; $X - 0,6$ moli NaOH; 0,6 moli CH_3OH și 0,6 moli HCOONa. Folosind valoarea constantei de echilibru determinate la punctul precedent și având în vedere că volumul soluției este tot 2 l, rezultă:

$$20 = \frac{0,3\cdot 0,3}{\left(\frac{X-0,6}{2}\right)\cdot(0,4)^2}.$$

Rezolvînd ecuația în raport cu X se obține $X=0,65625$ moli NaOH, ceea ce corespunde la 26,25 g NaOH.

18°. a) Dintre metalele ce compun aliajul reacționează cu HCl numai Zn și Al:

$$Zn + 2\ HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2$$

$$Al + 3\ HCl \rightarrow AlCl_3 + 3/2\ H_2.$$

Gazul care se degajă este hidrogenul.

Reziduul nedizolvat este cuprul care se dizolvă în acid sulfuric concentrat la cald, cu degajare de dioxid de sulf:

$$Cu + 2\ H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + SO_2 + 2\ H_2O.$$

Se supune electrolizei soluția de sulfat de cupru. Reacții la electrozi:

La catod: $Cu^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Cu^0$

La anod: $HO^- - e^- \rightarrow HO^\cdot$ reacție primară;

$$\left.\begin{array}{l} HO^\cdot + HO^\cdot \rightarrow H_2O + O \\ O + O \rightarrow O_2 \end{array}\right\} \text{ reacții secundare.}$$

Reacția globală de electroliză:

$$CuSO_4 + H_2O \xrightarrow{\text{electroliză}} Cu + H_2SO_4 + 1/2\ O_2$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Se calculează volumul de hidrogen în condiţii normale:

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0V_0}{T_0};\ V_0 = \frac{740 \cdot 12{,}64 \cdot 273}{300 \cdot 760} = 11{,}2\ \text{l}\ H_2\ \text{(c.n.)}$$

Se calculează masa cuprului depus la electroliză:

32 g Cu (un echivalent) ..... 96 500 C
X g Cu ..... $2(3 \cdot 3600 + 21 \cdot 60) \cdot 0{,}80$ C

$$X = 6{,}4\ \text{g Cu.}$$

Fie X masa în g a zincului şi, respectiv Y masa în g a aluminiului din aliaj.
Deci $X + Y = 24{,}8 - 6{,}4 = 18{,}4$.
Se exprimă volumul hidrogenului ce se degajă din cele două reacţii:

65 g Zn ..... 22,4 l H_2 (c.n.)
X g Zn ..... V_1 l H_2

$$V_1 = \frac{22{,}4\,X}{65}\ \text{l}\ H_2$$

27 g Al ..... $3/2 \cdot 22{,}4$ l H_2 (c.n.)
Y g Al ..... V_2 l H_2

$$V_2 = \frac{33{,}6\,Y}{27}\ \text{l}\ H_2.$$

Se alcătuieşte sistemul de ecuaţii: $X + Y = 18{,}4$

$$\frac{22{,}4\,X}{65} + \frac{33{,}6\,Y}{27} = 11{,}2.$$

Rezolvînd sistemul se obţine: $X = 13{,}0$ g Zn şi $Y = 5{,}4$ g Al.
Deci aliajul conţine:

6,4 g = 0,1 moli Cu; 13,0 g = 0,2 moli Zn şi 5,4 g = 0,2 moli Al.

În total 0,5 moli. Compoziţia în procente de moli:

$$\frac{0{,}1}{0{,}5} \cdot 100 = 20\%\ \text{Cu};\ \frac{0{,}2}{0{,}5} \cdot 100 = 40\%\ \text{Zn şi}\ \frac{0{,}2}{0{,}5} \cdot 100 = 40\%\ \text{Al.}$$

Compoziţia în procente de masă:

$$\frac{6{,}4}{24{,}8} \cdot 100 = 25{,}81\%\ \text{Cu};\ \frac{13}{24{,}8} \cdot 100 = 52{,}42\%\ \text{Zn şi}\ \frac{5{,}4}{24{,}8} \cdot 100 = 21{,}77\%\ \text{Al.}$$

c) Se calculează acidul clorhidric consumat în cele două reacţii din hidrogenul degajat:

36,6 g HCl (un mol) ..... 11,2 l (0,5 moli) H_2
X g HCl ..... 11,2 l H_2

$$X = 36{,}5\ \text{g HCl teoretic necesar.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Excesul de HCl: $\frac{50}{100} \cdot 36{,}5 = 18{,}25$ g HCl.

Total HCl utilizat: $36{,}5 + 18{,}25 = 54{,}75$ g HCl.

Masa soluției de HCl:

100 g soluție ..... 18,25 g HCl
X g soluție ..... 54,75 g HCl

$X = 300$ g soluție HCl de concentrație 18,25%.

Volumul acestei soluții:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{300}{1{,}091} = 275 \text{ cm}^3.$$

d) Excesul de HCl este 18,25 g = 0,5 moli.

Reacția de neutralizare:

$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O.$$

Rezultă că sînt necesari tot 0,5 moli NaOH. Soluția de hidroxid de sodiu avînd concentrația 0,5 N, înseamnă că într-un litru de soluție se găsesc 0,5 echivalenți de NaOH ceea ce reprezintă și 0,5 moli NaOH. Deci pentru neutralizare este necesar 1 l de soluție sau 1000 cm³.

19°. a) Fie X și Y numărul de kmoli de aluminiu, respectiv de magneziu din aliaj. Reacțiile cu acidul sulfuric sînt:

$$2\,Al + 3\,H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + 3\,H_2$$

$$Mg + H_2SO_4 \rightarrow MgSO_4 + H_2.$$

Reacțiile de oxidare:

$$2\,Al + 3/2\,O_2 \rightarrow Al_2O_3 \text{ și } Mg + 1/2\,O_2 \rightarrow MgO.$$

Se exprimă hidrogenul degajat în cele două reacții:

2 kmoli Al ..... 3 kmoli H_2
X kmoli Al ..... n_1 kmoli H_2

$$n_1 = \frac{3X}{2} \text{ kmoli } H_2$$

1 kmol Mg ..... 1 kmol H_2
Y kmoli Mg ..... n_2 kmoli H_2

$$n_2 = Y \text{ kmoli } H_2$$

Se exprimă deasemenea numărul de kilomoli de oxizi formați:

2 kmoli Al ..... 1 kmol Al_2O_3
X kmoli Al ..... n_3 kmol Al_2O_3

$$n_3 = X/2 \text{ kmoli } Al_2O_3$$

1 kmol Mg ..... 1 kmol MgO
Y kmoli Mg ..... n_4 kmol MgO

$$n_4 = Y \text{ kmoli MgO.}$$

Luînd în considerație numărul total de kmoli de hidrogen și de oxizi formați se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{3X}{2} + Y = 17{,}5 \\ X/2 + Y = 12{,}5 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul rezultă: $X = 5$ kmoli Al și $Y = 10$ kmoli Mg.

Deci aliajul conține: $5 \cdot 27 = 135$ kg Al și $10 \cdot 24 = 240$ kg Mg.

b) Impuritățile din aliaj se obțin prin diferență: $400 - (135 + 240) = 25$ kg impurități. Sau: $\frac{135}{400} \cdot 100 = 33{,}75\%$ Al; $\frac{240}{400} \cdot 100 = 60{,}00\%$ Mg și $\frac{25}{400} \cdot 100 = 6{,}25\%$ impurități.

c) Se calculează acidul sulfuric necesar dizolvării Al și Mg:

2 kmoli Al .....3 kmoli H_2SO_4

5 kmoli Al .....X kmoli H_2SO_4

$X = 7{,}5$ kmoli H_2SO_4 necesar dizolvării aluminiului.

Analog se obține 10 kmoli de H_2SO_4 necesar dizolvării magneziului.

În total sînt necesari 17,5 kmoli H_2SO_4. Soluția fiind 2,5 M avem:

1 l soluție .....2,5 moli H_2SO_4

V l soluție .....$17{,}5 \cdot 10^3$ moli H_2SO_4

$V = 7 \cdot 10^3$ l $= 7$ m^3.

d) Conform reacțiilor de oxidare pentru 2 kmoli de aluminiu sînt necesari 3/2 kmoli O_2 deci la 5 kmoli Al vor fi necesari 3,75 kmoli O_2 iar pentru cei 10 kmoli Mg vor fi necesari 5 kmoli O_2 adică în total 8,75 kmoli. Volumul de oxigen necesar: $V = 8{,}75 \cdot 22{,}4 = 196$ m^3 O_2 sau $5 \cdot 196 = 980$ m^3 aer.

e) La oxidare rezultă 5/2 kmoli = 255 kg Al_2O_3 și 10 kmoli = 400 kg MgO, deci raportul oxid de aluminiu/oxid de magneziu = 0,6375.

20°. Se calculează acidul sulfuric necesar dizolvării oxidului de cupru:

$$CuO + H_2SO_4 \rightarrow CuSO_4 + H_2O$$

80 g CuO .....98 g H_2SO_4

20 g CuO .....X g H_2SO_4

$X = 24{,}5$ g H_2SO_4 pur.

Soluția de acid sulfuric necesară: $24{,}5 \frac{100}{20} = 122{,}5$ g soluție 20%.

După dizolvarea oxidului soluția conține:

Sulfat de cupru: $\frac{160 \cdot 20}{80} = 40$ g $CuSO_4$;

Apă: $122{,}5 - 24{,}5 = 98$ g apă din soluția de acid sulfuric;

$18 \frac{20}{80} = 4{,}5$ g apă rezultată din reacție;

Total apă: 102,5 g.

Scanned with OKEN Scanner

Fie X numărul de grame de $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ care se depune. Se exprimă în funcţie de X cantitatea de $CuSO_4$ şi de apă care s-au separat:

$$\begin{array}{l} 250\ g\ CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 160\ g\ CuSO_4 \\ X\ g\ CuSO_4 \cdot 5\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m_1\ g\ CuSO_4 \end{array}$$

$$m_1 = \frac{16X}{25}\ g\ CuSO_4.$$

Analog se obţine $m_2 = \frac{9X}{25}\ g\ H_2O$.

După răcire în soluţie mai rămîn: $\left(40 - \frac{16X}{25}\right) g\ CuSO_4$ şi $\left(102{,}5 - \frac{9X}{25}\right) g\ H_2O$.

Punînd condiţia de soluţie saturată la 20°C avem:

$$\begin{array}{l} \left(102{,}5 - \frac{9X}{25}\right) g\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(40 - \frac{16X}{25}\right) g\ CuSO_4 \\ 100\ g\ H_2O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 20{,}9\ g\ CuSO_4 \end{array}$$

Din această proporţie rezultă o ecuaţie în X care se rezolvă şi se obţine:

$$X = 32{,}89\ g\ CuSO_4 \cdot 5\ H_2O$$

care se depune prin răcirea soluţiei la 20°C.

21°. a) Apa oxigenată poate acţiona ca oxidant cînd se transformă în apă şi oxigenul trece de la starea de oxidare (—1) la starea de oxidare (—2), deci se reduce, dar şi ca reducător cînd se degajă oxigen, acesta trecînd de la starea de oxidare (—1) la starea de oxidare zero, deci se oxidează.

Avînd în vedere aceste considerente apa oxigenată acţionează ca oxidant în reacţiile (1), (2) şi (4) iar ca reducător în reacţiile (3) şi (5).

b) Reacţia (1): $2\ I^- - 2\ e^- \rightarrow I_2$ | x 1
$H_2O_2 + 2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow 2\ H_2O$ | x 1

Rezultă:

$$2\ KI + H_2O_2 + H_2SO_4 \rightarrow I_2 + K_2SO_4 + 2\ H_2O$$

Reacţia (B):

$[Fe(CN)_6^{4-} - 1\ e^- \rightarrow [Fe(CN)_6]^{3-}$ | x 2
$H_2O_2 + 2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow 2\ H_2O$ | x 1

Rezultă:

$$2\ K_4[Fe(CN)_6] + H_2O_2 + H_2SO_4 \rightarrow K_2SO_4 + 2\ K_3[Fe(CN)_6] + 2\ H_2O.$$

Reacţia (C):

$MnO_4^- + 8\ H^+ + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4\ H_2O$ | x 2
$H_2O_2 - 2\ e^- \rightarrow O_2 + 2\ H^+$ | x 5

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă:

$$2\ KMnO_4 + 5\ H_2O_2 + 3\ H_2SO_4 \rightarrow 2\ MnSO_4 + K_2SO_4 + 8\ H_2O + 5\ O_2$$

Reacţia (D):

$$\begin{array}{l|l} I_2 + 6\ H_2O - 10\ e^- \rightarrow 2\ IO_3^- + 12\ H^+ & \times 1 \\ H_2O_2 + 2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow 2\ H_2O & \times 5 \end{array}$$

Rezultă:

$$I_2 + 5\ H_2O_2 \rightarrow 2\ HIO_3 + 4\ H_2O$$

Reacţia (E):

$$\begin{array}{l|l} ClO^- + 2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow Cl^- + H_2O & \times 1 \\ H_2O_2 - 2\ e^- \rightarrow 2\ H^+ + O_2 & \times 1 \end{array}$$

Rezultă:

$$KClO + H_2O_2 \rightarrow KCl + H_2O + O_2.$$

c) Din ecuaţia reacţiei (3) se calculează cantitatea (în moli) de $KMnO_4$ necesară:

$$\begin{array}{l} 2 \text{ moli } KMnO_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5 \cdot 22{,}4 \text{ l } O_2 \text{ (c.n.)} \\ X \text{ moli } KMnO_4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4{,}48 \text{ l } O_2 \text{ (c.n.)} \end{array}$$

$$X = 0{,}08 \text{ moli.}$$

Echivalentul în reacţiile redox este molul împărţit la variaţia numărului de oxidare care în cazul $KMnO_4$ este 5. Deci 1 echivalent $KMnO_4$ este egal cu 0,2 moli. Soluţia fiind 0,1 normală înseamnă că 1 l de soluţie va conţine 0,02 moli şi cei 0,08 moli se vor găsi în 4 l de soluţie 0,1 normală de permanganat de potasiu.

22°. a) Creşterea masei plăcuţelor se explică prin depunerea pe suprafaţa lor a cuprului şi, respectiv argintului, metalul plăcuţelor avînd masa atomică mai mică decît cuprul. Metalul are un potenţial de reducere mai negativ decît cuprul şi argintul, adică este un reducător mai puternic decît acestea, avînd tendinţa de a ceda electroni şi a trece în ioni pozitivi. El este situat înaintea cuprului şi argintului în seria activităţii metalelor a lui *Volta* şi *Beketov*. Ca atare atomii metalului cedează doi electroni şi trec în ionii Me^{2+}, aceştia trecînd în soluţie, iar ionii de cupru şi de argint acceptă cei doi electroni şi se depun pe plăcuţele respective sub formă de metale:

$$\begin{array}{l} Me - 2\ e^- \rightarrow Me^{2+} \\ Cu^{2+} + 2\ e^- \rightarrow Cu^\circ \end{array} \quad \text{sau:} \quad Me^\circ + Cu^{2+} \rightarrow Me^{2+} + Cu^\circ$$

şi respectiv:

$$\begin{array}{l} Me - 2\ e^- \rightarrow Me^{2+} \\ 2\ Ag^+ + 2\ e^- \rightarrow 2\ Ag^\circ \end{array} \quad \text{sau:} \quad Me^\circ + 2\ Ag^+ \rightarrow Me^{2+} + 2\ Ag^\circ$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie m_0 masa inițială a celor două plăcuțe, A masa atomică a metalului și n numărul de moli de cupru care s-au depus pe plăcuță, respectiv $2n$ numărul de moli de argint depuși pe cealaltă plăcuță.

Dacă m_1 este masa plăcuței din sulfatul de cupru și m_2 masa plăcuței din azotatul de argint, la sfîrșitul experienței se poate scrie:

$$m_1 = m_0 - nA + n \cdot 64 = m_0 + n(64 - A)$$

$$m_2 = m_0 - nA + 2\ n \cdot 108 = m_0 + n(216 - A)$$

Creșterea masei pentru cele două plăcuțe este:

$$m_1 - m_0 = n(64 - A) = \frac{0,4}{100} \cdot m_0$$

$$m_2 - m_0 = n(216 - A) = \frac{8}{100} \cdot m_0.$$

Făcînd raportul acestor două relații se obține:

$$\frac{64 - A}{216 - A} = \frac{0,4}{8}$$

de unde rezultă:

$$A = 56.$$

Deci metalul din care au fost confecționate cele două plăcuțe este ferul. Echivalentul său în aceste procese redox este

$$E_{Fe} = \frac{56}{2} = 28.$$

23°. a) Expresia constantei de echilibru K_p este:

$$K_p = \frac{P_{PCl_3} \cdot P_{Cl_2}}{P_{PCl_5}}.$$

Presiunile parțiale sînt: $P_i = X_i \cdot P$.

Cum presiunea totală este 1 atm iar numărul total de moli este 1,2 rezultă:

$$P_{PCl_5} = \frac{0,7}{1,2} \text{ atm};\ P_{Cl_2} = \frac{0,2}{1,2} \text{ atm și } P_{PCl_3} = \frac{0,3}{1,2} \text{ atm.}$$

Introducînd aceste valori ale presiunilor parțiale în expresia constantei de echilibru se obține $K_p = 0,39$ atm.

Reacția are loc cu variația numărului de moli ($\Delta n = 1$) deci:

$$K_c = K_p(RT)^{-\Delta n} = \frac{0,39}{0,082 \cdot 523} = 9,09 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Constanta de echilibru exprimată prin fracţii molare, K_X, va fi:

$$K_X = K_p \cdot P^{-\Delta n} = 0{,}39 \text{ atm} \cdot \frac{1}{1 \text{ atm}} = 0{,}39.$$

b) Introducînd 1 mol de gaz inert numărul total de moli din sistem se modifică deci se vor modifica şi presiunile parţiale şi echilibrul se va deplasa. Fie X' numărul de moli de PCl_5 care se vor disocia în noua stare de echilibru. Deci vom avea:

$(0{,}3 - X)$moli PCl_5; $(0{,}7 + X)$ moli PCl_3; $(0{,}2 + X)$ moli Cl_2 şi 1 mol gaz inert, adică în total $(2{,}2 + X)$ moli.

Noile presiuni parţiale vor fi:

$$P_{PCl_5} = \frac{(0{,}7 + X)}{(2{,}2 + X)} \text{ atm}; \; P_{Cl_2} = \frac{(0{,}2 + X)}{(2{,}2 + X)} \text{ atm şi } P_{PCl_5} = \frac{(0{,}3 - X)}{(2{,}2 + X)} \text{ atm.}$$

Valoarea constantei de echilibru K_p rămînînd neschimbată (temperatura nu se modifică) vom avea:

$$0{,}39 = \frac{(0{,}7 + X) \cdot (0{,}2 + X)}{(0{,}3 - X) \cdot (2{,}2 + X)}.$$

Rezolvînd ecuaţia în raport cu X se găseşte valoarea $X = 0{,}07$ moli. (Cealaltă soluţie a ecuaţiei de gradul II nu are sens fizic).

Deci compoziţia sistemului în noua stare de echilibru va fi:

0,23 mol PCl_5; 0,77 moli PCl_3; 0,27 moli Cl_2 şi 1 mol gaz inert.

24°. a) Formula generală a unui acid dicarboxilic saturat cu catenă normală este:

$$HOOC-(CH_2)_n-COOH.$$

Scăzînd din masa moleculară masa celor două grupe carboxil, se află uşor numărul de grupe metilen:

$$146 - 90 = 56$$

$$n = 56 : 14 = 4.$$

Deci formula acidului este: $HOOC-(CH_2)_4-COOH$ (acid adipic).

Diamina cu acelaşi număr de atomi de carbon ca şi acidul adipic şi care prin policondensare dă un polimer important este hexametilendiamina

$$H_2N-(CH_2)_6-NH_2.$$

Ecuaţia reacţiei de policondensare este:

$$n\,HOOC-(CH_2)_4-COOH +$$

$$+ n\,H_2N-(CH_2)_6-NH_2 \xrightarrow[-2\,n\,H_2O]{} [CO-(CH_2)_4-CONH-(CH_2)_6-NH]_n$$

Nylon-66

b) 146 t acid adipic .....226 t polimer
X „ „ „ .....2,26 t

$X = 1{,}46$ t acid adipic ($\eta = 100\%$).

$1{,}46 \cdot \frac{100}{80} = 1{,}825$ t acid adipic (pentru $\eta = 80\%$).

116 t diamină .....226 t polimer
X „ „ .....2,26 t

$X = 1{,}16$ t hexametilendiamină (pentru $\eta = 100\%$)

$$1{,}16 \text{ t} \cdot \frac{100}{80} = 1{,}45 \text{ t (pentru } \eta = 80\%).$$

c) $HOOC-(CH_2)_4-COOH + 2\ NH_3 \rightarrow NH_4OOC-(CH_2)_4-COONH_4 \rightarrow$

$$\xrightarrow[-2H_2O]{} H_2NOC-(CH_2)_4-CONH_2 \xrightarrow[-2H_2O]{8[H]} H_2N-(CH_2)_6-NH_2$$

25°. $\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$

$$\frac{1 \cdot V_0}{273} = \frac{2 \cdot 2{,}46}{273 + 27}; \quad V_0 = 4{,}48 \text{ l } H_2 \text{ (în c.n.).}$$

Deoarece hidrocarbura A reacționează cu o soluție de clorură diamino Cu (I) înseamnă că este o alchină de forma $R-C\equiv CH$.

$$R-C\equiv CH + 2H_2 \rightarrow R-CH_2-CH_3$$

5,4 g A .....4,48 l H_2
X g .....2.2,24 l

$X = 54$ g deci $M_A = 54$

$C_nH_{2n-2} = 54$;	$n = 4$
$CH_3-CH_2-C\equiv CH$	1-butină (A)
$CH_3-C\equiv C-CH_3$	2-butină
$CH_2=CH-CH=CH_2$	1,3-butadienă
$CH_2=C=CH-CH_3$	1,2-butadienă

$$CH_3-CH_2-C\equiv CH + [Cu(NH_3)_2]Cl \rightarrow CH_3-CH_2-C\equiv CCu + NH_3 + NH_4Cl$$

54 g 1-butină .....117 g precipitat
5,4 g „ X

$X = 11{,}7$ g.

26°. a) 44 g CO_2 .....12 g C
13,2 g „ X

$X = 3{,}6$ g C.

18 g H_2O .....2 g H
7,2 g „ .....X g

$X = 0{,}8$ g H.

$6 \text{ g} - (3{,}6 + 0{,}8)\text{g} = 1{,}6$ g O.

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea formulei brute:

$$C : \frac{3,6}{12} = 0,3 \rightarrow \frac{0,3}{0,1} = 3$$

$$H : \frac{0,8}{1} = 0,8 \rightarrow \frac{0,8}{0,1} = 8$$

$$O : \frac{1,6}{16} = 0,1 \rightarrow \frac{0,1}{0,1} = 1$$

Formula brută C_3H_8O.

Masa moleculară a substanţei A; $M = 2,07 \cdot 29 = 60$

$$(C_3H_8O)_n = 60;\ n = 1.$$

Formula moleculară: C_3H_8O corespunde unui alcool sau eter. Cum substanţa A nu reacţionează cu sodiu metalic înseamnă că A este un eter:

$CH_3—O—CH_2—CH_3$ (metiletileter)

b) $CH_3—CH_2—CH_2—OH$ (1-propanol)

$CH_3—\underset{\underset{OH}{|}}{CH}—CH_3$ (2-propanol)

27°. $C_6H_6 + 9/2\ O_2 \xrightarrow{V_2O_5} \begin{matrix} CH—COOH \\ \| \\ CH—COOH \end{matrix} + 2\ CO_2 + H_2O$

78 g benzen .....1 mol acid maleic
400 g „ X

$X = \frac{400}{78}$ moli acid maleic (cu $\eta = 100\%$).

$\frac{400}{78} \cdot \frac{78}{100} = 4$ moli acid maleic (cu $\eta = 78\%$).

$$\begin{matrix} CH—COOH \\ \| \\ CH—COOH \end{matrix} + Ca(OH)_2 \rightarrow \begin{matrix} CH—COO^- \\ \| \\ CH—COO^- \end{matrix} Ca^{2+} + 2\ H_2O$$

1 mol acid maleic .....1 mol $Ca(OH)_2$
4 moli „ „ X

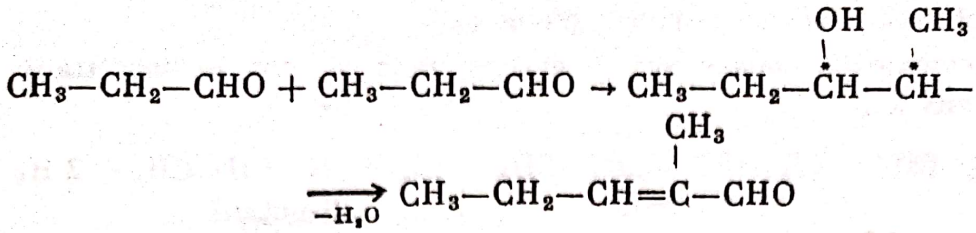
$X = 4$ moli $Ca(OH)_2$

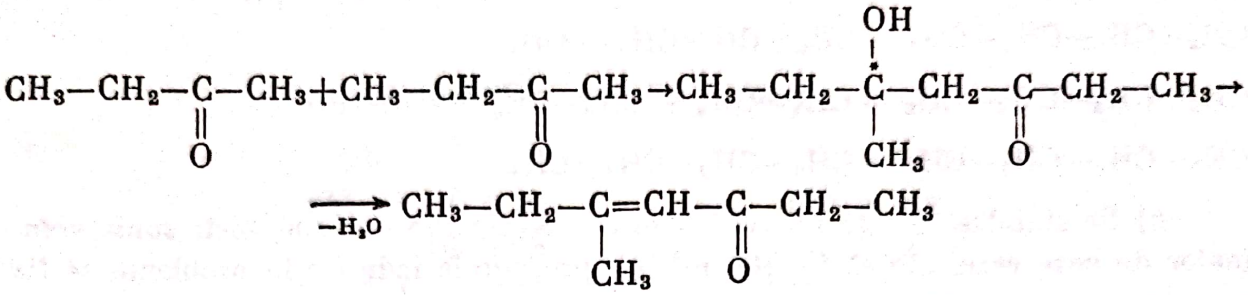
1 l soluţie .....2 moli $Ca(OH)_2$
X l „ .....4 moli

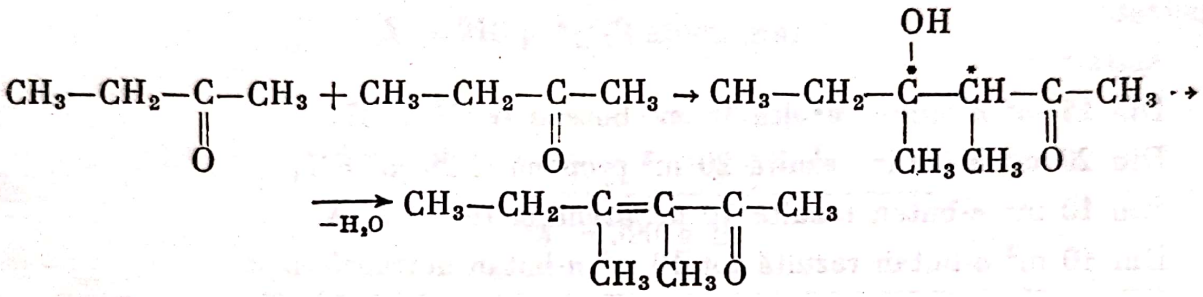
$X = 2$ l soluţie $Ca(OH)_2$

Scanned with OKEN Scanner

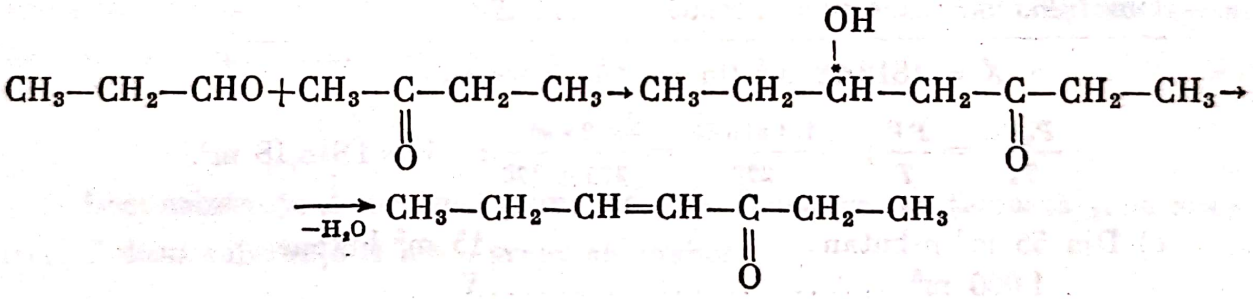
28°. a) Produși de condensare dintre aceleași specii moleculare:

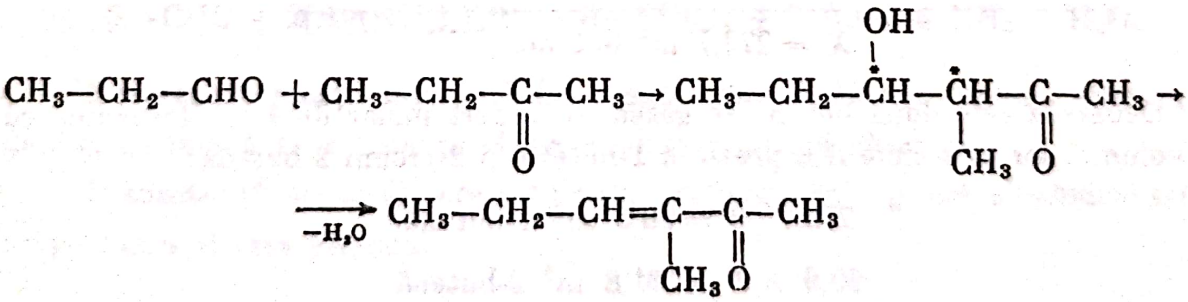


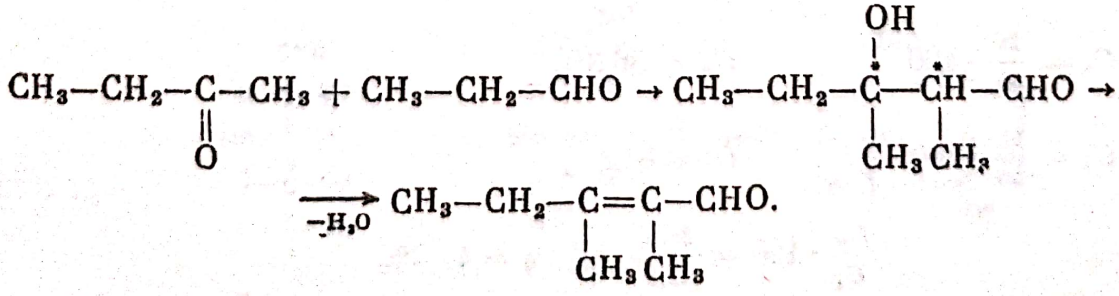




b) Produși de condensare dintre specii moleculare diferite:







Toţi produşii de condensare aldolică prezintă izomerie optică şi toţi produşii de condensare crotonică prezintă izomerie geometrică.

29°. a) Din compoziţia amestecului de gaze rezultat se pot deduce transformările ce au avut loc:

$$2\,CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \rightarrow \underset{\text{1-butenă}}{CH_2=CH-CH_2-CH_3} + \underset{\text{2-butenă}}{CH_3-CH=CH-CH_3} + 2\,H_2$$

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_2=CH-CH_3 + CH_4$$

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_2=CH_2 + CH_3-CH_3$$

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_3-CH_2-CH_2-CH_3.$$

b) Se stabilesc în aşa fel coeficienţii ecuaţiilor de mai sus, încît suma volumelor de gaze rezultate să fie 100 m^3, iar procentele indicate în problemă să fie respectate.

Astfel:

Din 15 m^3 *n*-butan rezultă 15 m^3 butene şi 15 m^3 H_2

Din 20 m^3 *n*-butan rezultă 20 m^3 propenă şi 20 m^3 CH_4

Din 10 m^3 *n*-butan rezultă 10 m^3 etenă şi 10 m^3 etan

Din 10 m^3 *n*-butan rezultă tot 10 m^3 *n*-butan netransformat

---

Din 55 m^3 *n*-butan rezultă 100 m^3 amestec de gaze

Din 1 000 m^3 X

$X = 1818{,}18$ m^3 (în condiţii normale).

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}; \quad \frac{1 \cdot 1818{,}18}{273} = \frac{2 \cdot V}{273+273}; \quad V = 1818{,}18 \text{ m}^3.$$

c) Din 55 m^3 *n*-butan ..... 15 m^3 butene

1 000 m^3 X

$X = 272{,}7$ m^3 butene.

Deoarece cele două butene se găsesc în raport molar de 1 : 2, înseamnă că din volumul lor, o treime îl reprezintă 1-butena şi 2 treimi 2-butena:

$$272{,}7 : 3 = 90{,}9 \text{ m}^3 \text{ 1-butenă}$$

$$90{,}9 \times 2 = 181{,}8 \text{ m}^3 \text{ 2-butenă}$$

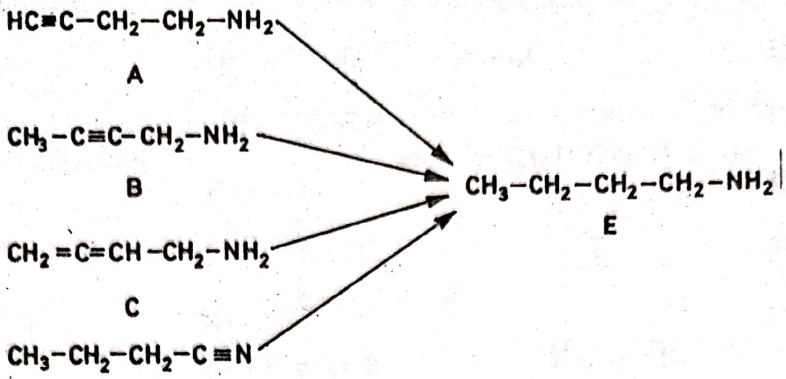
d) $C_u = \frac{20}{55} \cdot 100 \qquad C_u = 36{,}3\%$

$C_t = \frac{45}{55} \cdot 100 \qquad C_t = 81{,}8\%$

$$\frac{C_u}{C_t} \cdot 100 = \frac{36{,}3}{81{,}8} \qquad \eta = 44{,}3\%$$

Scanned with OKEN Scanner

30°.



31°. a) 1,8 g *A* .....2,16 g Ag
180 g *A* .....*X*

$X = 216$ g Ag (2 atomi gram)

1,8 g *A* .....3,9 g *B*
180 g *A* .....*X*

$X = 390$ g B.

$390 - 180 = 210$ g (reprezintă creşterea masei moleculare a substanţei *A* în urma reacţiei de acetilare). În reacţia de acetilare a unui polialcool creşterea masei este de 42 pentru fiecare grupă hidroxil.

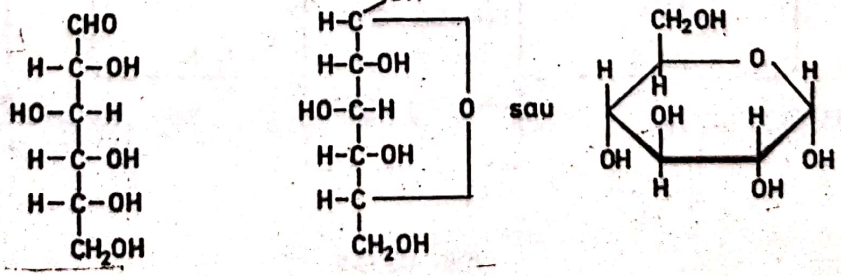
$$210 : 42 = 5.$$

Deci substanţa *A* are cinci grupe hidroxil. Deoarece reacţionează şi cu reactivul *Tollens* substanţa *A* are o grupă aldehidică:

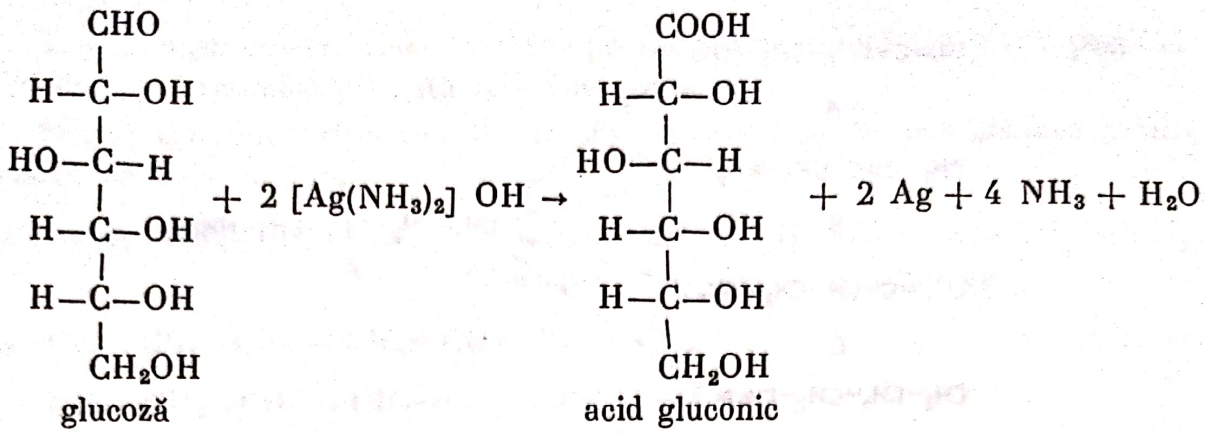
$$R{-}CHO + 2[Ag(NH_3)_2]OH \rightarrow R{-}COOH + 2\ Ag + 4\ NH_3 + H_2O.$$

Deoarece în reacţia unui mol din *A* cu reactiv *Tollens* se depun 2 atomi gram de Ag, înseamnă că substanţa *A* are o singură grupă aldehidică.

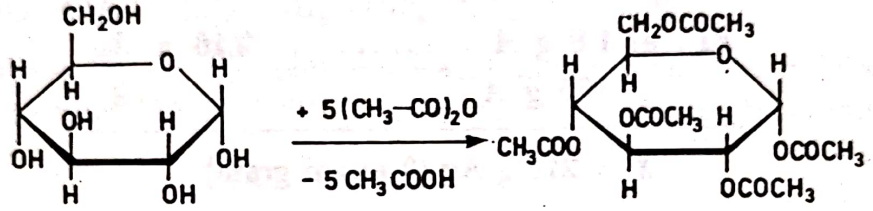
O substanţă naturală care conţine în molecula sa o grupă aldehidică şi cinci grupe hidroxil este glucoza:



b)



glucoză — acid gluconic



α-glucoză — α-pentaacetilglucoză

c) Glucoza are 4 atomi de C asimetrici cînd are structură aciclică și deci 16 izomeri optici și 5 atomi de C asimetrici cînd are structură ciclică și deci 32 de izomeri optici.

32°. Conform fig. Ch.C.2.

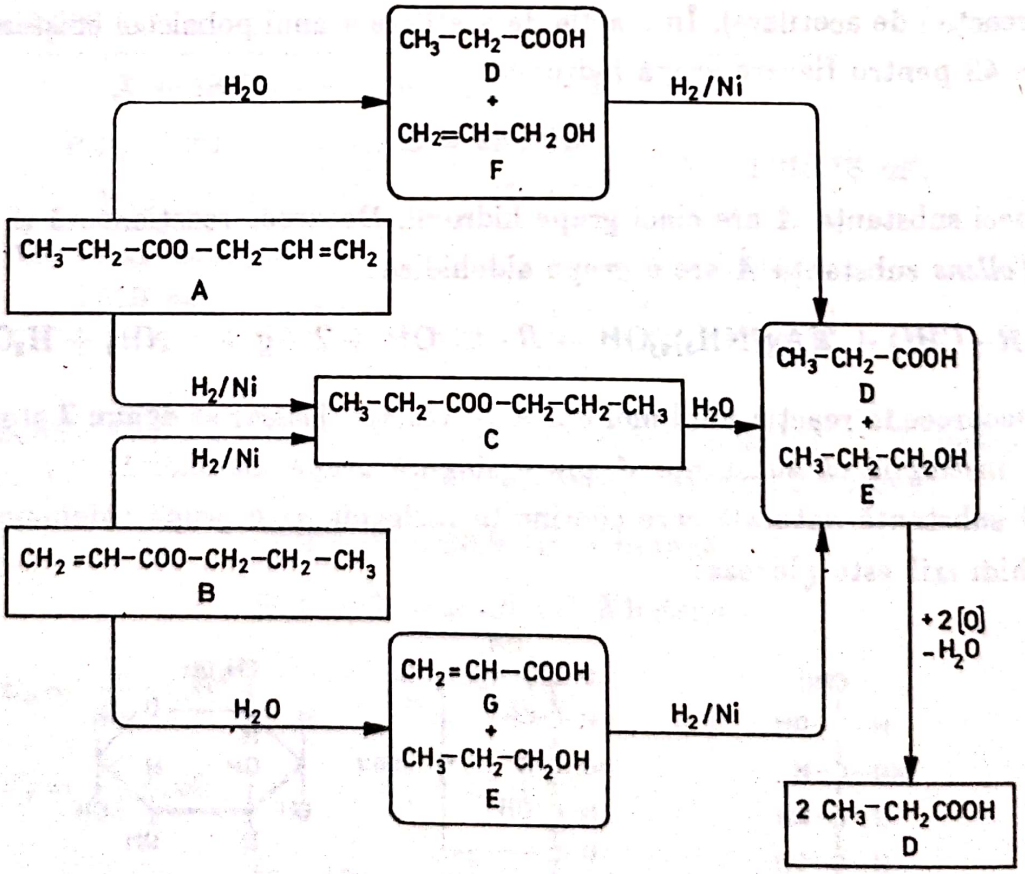


Fig. Ch.C.2

Scanned with OKEN Scanner

33°. a) Formula generală a esterului dietilic va fi:

$$C_2H_5OCO-R-COOC_2H_5.$$

Ţinînd cont că acest ester are patru atomi de oxigen în moleculă, îi putem calcula masa moleculară:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ g ester} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 43{,}83 \text{ g O} \\ M \text{ g (1 mol)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 64 \text{ g O} \end{array}$$

$$M = 146 \text{ g.}$$

$$M_R = 146 - 2 \cdot 73 \qquad M_R = 0.$$

Deci formula moleculară a esterului va fi:

$$\begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array}$$

Oxalat de dietil

b) $2\,CH_4 \xrightarrow{t^\circ} CH{\equiv}CH + 3\,H_2$

$$CH{\equiv}CH + 4[O] \rightarrow \begin{array}{l} COOH \\ | \\ COOH \end{array}$$

acid oxalic

$$CH{\equiv}CH + H_2O \xrightarrow[H_2SO_4]{HgSO_4} \underset{\text{etanal}}{CH_3-CHO} \xrightarrow{+H_2} \underset{\text{etanol}}{CH_3-CH_2-OH}$$

$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ COOH \end{array} + 2\,C_2H_5OH \rightarrow \begin{array}{l} COOC_2H_5 \\ | \\ COOC_2H_5 \end{array} + 2\,H_2O$$

34°. $H_2N-CH_2-CO-NH-CH_2-CO-NH-CH_2-COOH$

glicilglicilglicină

$$CH_3-\underset{\displaystyle NH_2}{\underset{|}{CH}}-CO-NH-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CO-NH-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-COOH$$

alanilalanilalanină

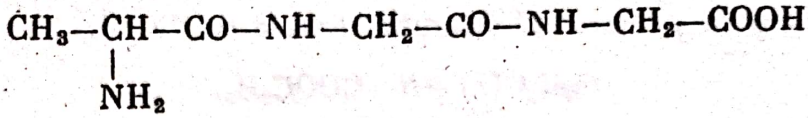
$$H_2N-CH_2-CO-NH-CH_2-CO-NH-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-COOH$$

glicilglicilalanină

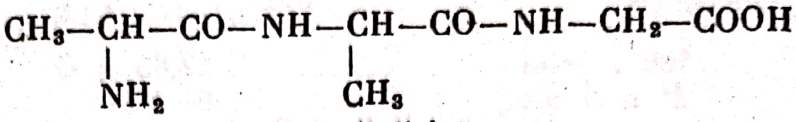
$$H_2N-CH_2-CO-NH-\underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{CH}}-CO-NH-CH_2-COOH$$

glicilalanilglicină

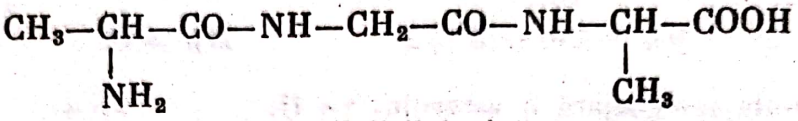
Scanned with OKEN Scanner



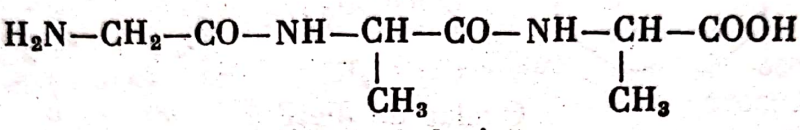
alanilglicilglicină



alanilalanilglicină

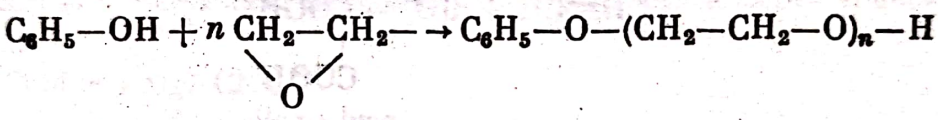


alanilglicilalanină



glicilalanilalanină

35°. a) Ecuația reacției de polietoxilare a fenolului este:



470 kg fenol ..... 2670 kg hidroxipolieter
94 kg (1 kmol) X

$X = 534$ kg (1 kmol).

Deci masa moleculară a hidroxipolieterului este 534 și se poate calcula gradul de polietoxilare:

$$94 + 44\,n = 534.$$

$$n = 10.$$

Formula moleculară a hidroxipolieterului va fi:

$$C_6H_5-O-(CH_2-CH_2-O)_{10}-H.$$

b) Cantitatea totală de oxid de etenă utilizată va fi:

$$(2670 - 470) + \frac{20}{100}(2670 - 470) = 2640 \text{ kg}$$

$2640 : 44 = 60$ kmoli oxid de etenă

$470 : 94 = 5$ kmoli fenol

Raportul molar va fi deci $5 : 60 = 1 : 12$.

Scanned with OKEN Scanner

36°. $3\ C_2H_2 \rightarrow C_6H_6$

$$C_2H_2 + H_2 \xrightarrow[\text{(Pd otrăvit cu săruri de Pb)}]{} CH_2=CH_2$$

$$CH_2=CH_2 + 1/2\ O_2 \xrightarrow[(Ag)]{} CH_2-CH_2 \quad (\text{O})$$

$$C_6H_6 + HNO_3 \xrightarrow[-H_2O]{H_2SO_4} C_6H_5-NO_2$$

$$C_6H_5-NO_2 \xrightarrow[-2\ H_2O]{6[H]} C_6H_5-NH_2$$

$$C_6H_5-NH_2 + 2\ CH_2-CH_2 \rightarrow C_6H_5-N(CH_2-CH_2-OH)_2 \quad (\text{O})$$

$100\ m^3$ ..... $74{,}66\ m^3\ C_2H_2$ pură
$1500\ m^3$ X

$X = 1120\ m^3$.

Din acetilenă 3 părți sînt utilizate pentru a prepara benzen și 2 părți oxid de etenă ($1120 : 5 = 224\ m^3$).

$3 \cdot 22{,}4\ m^3$ ..... 78 kg benzen
$672\ m^3$ X

$X = 780$ kg benzen.

78 kg benzen ..... 181 kg *N*, *N*-di (β-hidroxietil)-anilină
780 kg X

$X = 1810$ (cu $\eta = 100\%$)

$1810 \frac{40}{100} = 724$ kg (cu $\eta = 40\%$).

37°. Se calculează masa moleculară a acidului I:

100 g acid ..... 53,33 g O
M ..... 32 g

$M = 60$ g

$R-COOH$; $M_R = 15$.

Deci acidul I este acidul acetic.

$$2\ CH_4 \xrightarrow{t^\circ} CH \equiv CH + 3\ H_2$$

$$CH \equiv CH + H_2O \xrightarrow[HgSO_4]{H_2SO_4} CH_3-CHO$$

$$CH_3-CHO + H_2 \xrightarrow[(Ni)]{} CH_3-CH_2-OH$$

$$CH_3-CH_2OH \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_2=CH_2 + H_2O$$

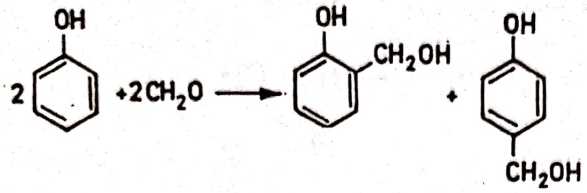
$$CH_3-CHO + 1/2\ O_2 \rightarrow CH_3COOH$$

$$CH \equiv CH + H_2 \xrightarrow[\text{(Pd otrăvit cu săruri de Pb)}]{} CH_2=CH_2$$

$$CH_3COOH + CH_3-CH_2-OH \underset{(acizi)}{\rightleftarrows} CH_3-COO-C_2H_5 + H_2O.$$

Scanned with OKEN Scanner

38°. a) $CH_4 + O_2 \xrightarrow[\text{(oxizi de azot)}]{t^\circ} CH_2O + H_2O$



b) 22,4 m^3 CH_4 .....30 kg CH_2O
448 m^3 X

$X = 600$ kg CH_2O (cu $\eta = 100\%$)

$600 \frac{75}{100} = 450$ kg CH_2O (cu $\eta = 75\%$)

100 kg soluție .....40 kg CH_2O
X kg .....450 kg

$X = 1125$ kg sol CH_2O 40%.

c) $2 \cdot 30$ kg CH_2O .....$2 \cdot 124$ kg alcooli hidroxibenzilici
450 kg .....X kg

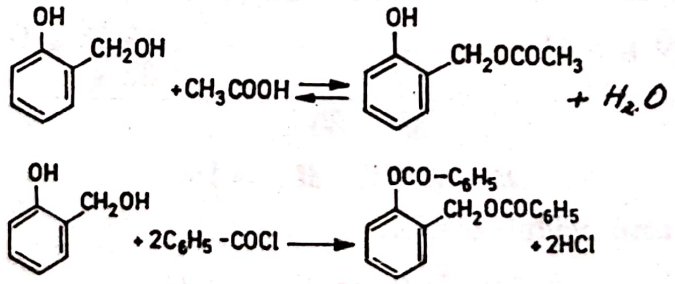
$X = 1860$ kg amestec de alcooli hidroxibenzilici.

Cei doi alcooli hidroxibenzilici aflîndu-se într-un raport molar de 3 : 2 înseamnă că 1860 : 5 = 372 kg reprezintă o parte.

$2 \cdot 372 = 744$ alcool *p*-hidroxibenzilic

$3 \cdot 372 = 1116$ kg alcool *o*-hidroxibenzilic

d)



39°. a) $CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \xrightarrow{\text{cracare}} \begin{cases} CH_3-CH_3 + CH_2=CH_2 \\ CH_3-CH=CH_2 + CH_4 \end{cases}$

$CH_3-CH=CH_2 + Cl_2 \xrightarrow[500^\circ C]{} CH_2=CH-CH_2Cl + HCl$
propenă — clorură de alil

$CH_2=CH-CH_2Cl + H_2O \rightarrow CH_2=CH-CH_2OH + HCl$
alcool alilic

$CH_2=CH-CH_2OH \xrightarrow[-H_2]{} CH_2=CH-CHO.$
acroleină

b) 22,4 m^3 .....1 kmol acroleină
X m^3 .....10 kmoli

$X = 224$ m^3 *n*-butan (cu $\eta = 100\%$)

$224 \frac{100}{50} = 448$ m^3 (cu $\eta = 50\%$).

40°. a) Se calculează numărul de moli dintr-o sută de grame de polimer:

$$n_1 = \frac{81}{54} = 1{,}5 \text{ moli butadienă}$$

$$n_2 = \frac{19}{104} = 0{,}18 \text{ moli stiren}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1{,}5}{0{,}18} = 8{,}33.$$

b) 100 kg polimer .....81 kg butadienă
10 000 kg X

$X = 8\,100$ kg butadienă (100%)

100 kg polimer .....19 kg stiren
10 000 kg .....X kg

$X = 1900$ kg stiren (100%).

Ținînd cont de puritate:

$$8\,100 \frac{100}{90} = 9\,000 \text{ kg butadienă (90\%)}$$

$$1\,900 \frac{100}{90} = 2\,111 \text{ kg stiren (90\%)}.$$

c) $CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_3=CH-CH=CH_2 + 2\,H_2$

$$CH_3-CH_2-CH_2-CH_3 \xrightarrow{t^\circ} \begin{cases} CH_2=CH_2 + CH_3-CH_3 \\ CH_4 + CH_2=CH-CH_3 \end{cases}$$

$2\,CH_4 \xrightarrow{t^\circ} CH{\equiv}CH + 3\,H_2$

$3\,CH{\equiv}CH \rightarrow C_6H_6$

$C_6H_6 + CH_2=CH_2 \xrightarrow{AlCl_3} C_6H_5-CH_2-CH_3$

$C_6H_5-CH_2-CH_3 \rightarrow C_6H_5-CH=CH_2 + H_2$.

41°. a) $CH_3-CH_2-CH_3 \rightarrow CH_2=CH-CH_3 + H_2$

$$CH_2=CH-CH_3 + H_2O \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3$$

$$CH_3-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-CH_3 \xrightarrow{[O]} CH_3-\underset{\displaystyle O}{\underset{\|}{C}}-CH_3 + H_2O$$

Scanned with OKEN Scanner

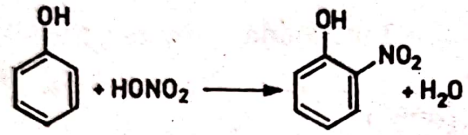
b) $CH_3-C\equiv CH + H_2O \xrightarrow[(HgSO_4)]{(H_2SO_4)} CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$

c) $CH_3-CH_2-CH_2OH \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_3-CH=CH_2 + H_2O$

$CH_3-CH=CH_2 + H_2O \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3$

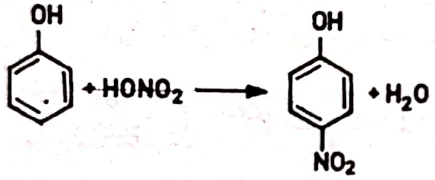
$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3 \xrightarrow{[O]} CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3 + H_2O.$

42°. a) 94 139

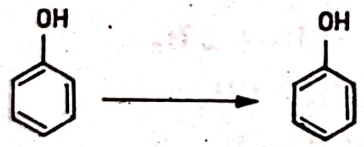


x_1 41,7

94 139



x_2 13,9



x_3 44,4

Se calculează cantitatea de fenol necesară obţinerii a 100 kg amestec de nitrofenoli şi fenol nereacţionat:

$$x_1 = 28{,}2 \text{ kg}$$
$$x_2 = 9{,}4 \text{ kg}$$
$$x_3 = 44{,}4 \text{ kg}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 82 \text{ kg fenol.}$$

Deci:

82 kg fenol .....41,7 kg *o*-nitrofenol
820 kg fenol X

$X = 417$ kg *o*-nitrofenol

82 kg fenol .....13,9 kg *p*-nitrofenol
820 kg fenol X

$X = 139$ kg *p*-nitrofenol

Scanned with OKEN Scanner

b) Se calculează numărul de kmoli fenol intrat în reacție $\frac{820}{94} = 8{,}72$.

Se calculează numărul de kmoli fenol transformat în orto-nitrofenol.

82 kg ..... 28,2 kg
820 kg X

$X = 282$ kg.

Nr. kmoli $= \frac{282}{94} = 3$ (fenol transformat în *o*-nitrofenol)

$$C_u = \frac{3}{8{,}72} \cdot 100$$

$$C_u = 34{,}40\%$$

Se calculează nr. kmoli fenol transformat în *p*-nitrofenol:

82 kg ..... 9,4 kg
820 kg X

$X = 94$ kg.

Nr. kmoli $= \frac{94}{94} = 1$ (fenol transformat în *p*-nitrofenol).

Nr. total kmoli fenol transformat $= 4$.

$$C_t = \frac{4}{8{,}72} \cdot 100$$

$$C_t = 45{,}87\%$$

$$\eta = \frac{C_u}{C_t} \cdot 100; \quad \eta = \frac{34{,}40}{45{,}87} \cdot 100; \quad \eta \approx 75\%.$$

c) 1 kmol fenol ..... 63 kg HNO_3
4 kmoli fenol X

$X = 252$ kg HNO_3.

Se calculează cantitatea de HNO_3 luată în exces:

$$252 \cdot \frac{20}{100} = 50{,}4 \text{ kg}.$$

Total: $252 + 50{,}4 = 302{,}4$ kg HNO_3.
Se calculează soluția de HNO_3 20%.

100 kg sol ..... 20 kg HNO_3
X ..... 302,4 kg

$X = 1512$ kg soluție HNO_3 20%.

d) Din reacție rezultă $4 \cdot 18$ kg apă (72 kg).
Se calculează cantitatea de soluție de acid azotic rezultată în urma reacției:

$1\,512 - 252 + 72 = 1\,332$ kg
1 332 kg sol ..... 50,4 kg HNO_3 nereacționat
100 kg X

$X = 3{,}78\%$.

Scanned with OKEN Scanner

43°. a) $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2\ CO_2$

$CO_2 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

$CaO + H_2O \rightarrow Ca(OH)_2$.

b) Se calculează glucoza pură:

100 kg .....9 kg glucoză pură

100 kg X

$X = 9$ kg glucoză pură

180 g glucoză .....$2 \cdot 46$ g etanol

9 000 g X

$X = 4\,600$ g etanol pur

100 g .....92 g etanol pur .....8 g H_2O

X .....4 600 g .....Y

$X = 5\,000$ g alcool; $Y = 400$ g H_2O.

c) 180 g glucoză .....$2 \cdot 22{,}4$ l CO_2

9 000 g X

$X = 2\,240$ l CO_2

22,4 l CO_2 .....74 g $Ca(OH)_2$

2 240 l X

$X = 7\,400$ g $Ca(OH)_2$ pur

100 g sol .....37 g $Ca(OH)_2$

X g .....7 400 g

$X = 20\,000$ g sol. $Ca(OH)_2$ 37%.

d) 18 g H_2O .....1 mol CaO

400 g X

$X = 22{,}2$ moli CaO.

44°. a) Se află volumul H_2 (măsurat la 0°C şi 1 atm) aflat iniţial în cilindrul de oţel:

$$\frac{P_0V_0'}{T_0} = \frac{P'V}{T} \qquad V_0' = \frac{P'VT_0}{P_0T} = \frac{60 \cdot 10 \cdot 273}{1 \cdot 300} \qquad V_0' = 546 \text{ l.}$$

Se calculează apoi volumul H_2 (măsurat la 0°C şi 1 atm) rămas în cilindru, după reacţie:

$$V_0'' = \frac{P'' \cdot V \cdot T}{P_0 \cdot T} = \frac{7{,}94 \cdot 60 \cdot 273}{1 \cdot 300} = 433{,}524 \text{ l.}$$

Scanned with OKEN Scanner

Volumul de H_2 utilizat în reacția de hidrogenare va fi:

$$V_0 = 546 - 433{,}524 \cong 112 \text{ l.}$$

b) $CH_2=CH_2 + H_2 \xrightarrow{\text{catalizator}} CH_3-CH_3$

22,4 l etenă ..... 22,4 l H_2

X ..... 112 l H_2

$X = 112$ l etenă.

În amestecul inițial au fost deci 112 l etenă și 67,2 l etan.
Raportul molar etan: etenă

$$\frac{67{,}2}{22{,}4} : \frac{112}{22{,}4} = 3 : 5.$$

c) 22,4 l etenă ..... 22,4 l etan

112 l etenă X

$X = 112$ l etan

$67{,}2 + 112 = 179{,}2$ l etan.

d) $CH_2 = CH_2 + H_2O \xrightarrow{(H_2SO_4)} CH_3-CH_2OH$

22,4 l etenă ..... 46 g etanol

112 l X

$X = 230$ g etanol (cu $\eta = 100\%$)

$230 \cdot \frac{95}{100}$ g etanol (cu $\eta = 95\%$)

100 g etanol (95%) ..... 95 g etanol pur

X g ..... $230 \frac{95}{100}$ g

$X = 230$ g etanol (95%).

e) $CH_3 - CH_2Cl$; cloretan — $CH_3 - CHCl_2$; 1,1-dicloretan — $CH_3 - CCl_3$ 1,1,1,-tricloretan

$CH_2Cl - CH_2Cl$; 1,2-dicloretan — $CH_2Cl - CHCl_2$; 1,1,2-tricloretan — $CH_2Cl - CCl_3$ 1,1,1,2-tetracloretan

$CHCl_2 - CHCl_2$; 1,1,2,2-tetracloretan — $CHCl_2 - CCl_3$; pentacloretan — $CCl_3 - CCl_3$ hexacloretan

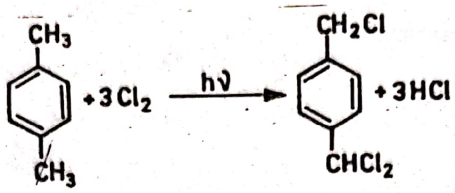
45°. a) Se calculează numărul de kmoli de *p*-xilen și de acid clorhidric degajat.

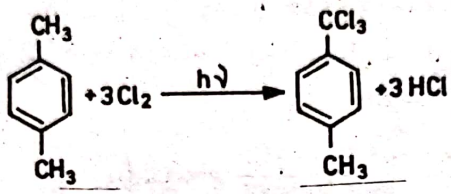
$212 : 106 = 2$ kmoli *p*-xilen

$134{,}4 : 22{,}4 = 6$ kmoli HCl.

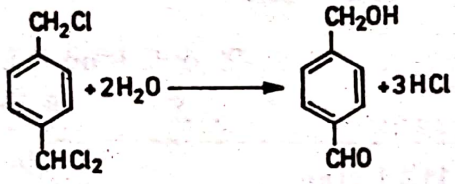
Scanned with OKEN Scanner

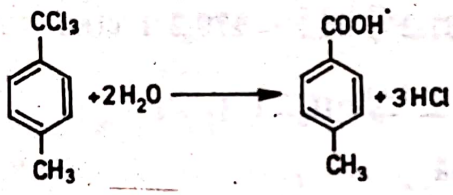
Deci la clorurarea unui kmol de *p*-xilen se degajă 3 kmoli HCl, ceea ce înseamnă că în reacţia de clorurare fotochimică s-au substituit 3 atomi de hidrogen din catenele laterale.



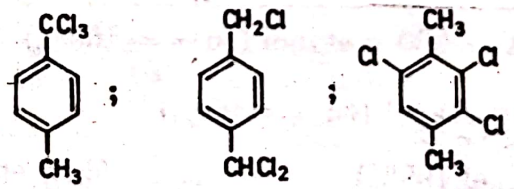


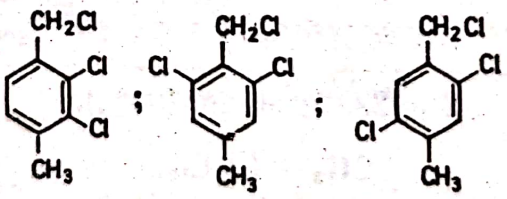
b)

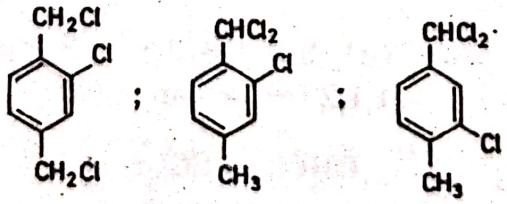


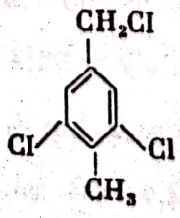


c)









Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

MATEMATICĂ

A. **BREVIAR**

1. Algebră 8
2. Geometrie 17
3. Analiză matematică 35

B. **PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR** 46

ENUNŢURI
1980

1. Învăţămîntul tehnic 46
   - α. Profilul electric 46
     - a. Algebră şi elemente de analiză matematică 46
     - b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 46
   - β. Profilul mecanic 47
     - a. Algebră şi elemente de analiză matematică 47
     - b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 47
   - γ. Profilul chimie şi metalurgie 48
     - a. Algebră şi elemente de analiză matematică 48
     - b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie (numai pentru profilul metalurgie) 48
2. Învăţămîntul universitar (matematică) 49
   - a. Algebră 49
   - b. Elemente de analiză matematică 49
   - c. Geometrie plană, geometrie în spaţiu, geometrie analitică şi trigonometrie 50
3. Învăţămîntul economic 50

ENUNŢURI
1981

1. Învăţămîntul tehnic 51
   - α. Profilul electric 51
     - a. Algebră şi elemente de analiză matematică 51
     - b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 51

β. Profilul mecanic 51
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 51
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 52
γ. Profilul chimie şi metalurgie 52
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 52
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie (numai pentru profilul metalurgie) 53
2. Învăţământul universitar (matematică) 53
a. Algebră 53
b. Elemente de analiză matematică 54
c. Geometrie plană, geometrie în spaţiu, geometrie analitică şi trigonometrie .. 54
3. Învăţământul economic 55

ENUNŢURI

1982

1. Învăţământul tehnic 55
α. Profilul electric 55
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 55
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 56
β. Profilul mecanic 56
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 56
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 57
γ. Profilul chimie şi metalurgie 57
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 57
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie (numai pentru profilul metalurgie) 58
2. Învăţământul universitar (matematică) 58
a. Algebră 58
b. Elemente de analiză matematică 59
c. Geometrie plană, geometrie în spaţiu, geometrie analitică şi trigonometrie 59
3. Învăţământul economic 59

ENUNŢURI

1983

1. Învăţământul tehnic 60
α. Profilul electric 60
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 60
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 61
β. Profilul mecanic 61
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 61
b. Geometrie plană, geometrie în spaţiu şi trigonometrie 62
γ. Profilul chimie şi metalurgie 62
a. Algebră şi elemente de analiză matematică 62

Scanned with OKEN Scanner

b. Geometrie plană, geometrie în spațiu și trigonometrie (numai pentru profilul metalurgie) 63
2. Învățământul universitar (matematică) 63
a. Algebră 63
b. Elemente de analiză matematică 64
c. Geometrie plană, geometrie în spațiu, geometrie analitică și trigonometrie.... 64
3. Învățământul economic 65
Rezolvări 66

C. **PROBLEME PROPUSE**

ENUNȚURI

1. Algebră 140
2. Geometrie 143
3. Analiză matematică 147
Rezolvări 150

FIZICĂ

A. **BREVIAR**

1. Mecanică 172
2. Fizică moleculară și căldură. Termodinamică 180
3. Electricitate 182
4. Optică 188
5. Fizică atomică și nucleară 196

B. **PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR**

ENUNȚURI

1980

1. Învățământul tehnic 201
α. Profilurile electric, mecanic și metalurgic 201
β. Profilul chimie 203
2. Învățământul universitar (fizică) 203
3. Învățământul medico-farmaceutic 205
4. Învățământul economic 206

ENUNȚURI

1981

1. Învățământul tehnic 207
α. Profilurile electric, mecanic și metalurgic 207
β. Profilul chimie 209
2. Învățământul universitar (fizică) 210
3. Învățământul medico-farmaceutic 212
4. Învățământul economic 213

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI
1982

1. Învățământul tehnic 214
   α. Profilurile electric, mecanic și metalurgic 214
   β. Profilul chimie 216
2. Învățământul universitar (fizică) 217
3. Învățământul medico-farmaceutic 218
4. Învățământul economic 219

ENUNȚURI
1983

1. Învățământul tehnic 220
   α. Profilurile electric, mecanic și metalurgic 220
   β. Profilul chimie 223
2. Învățământul universitar (fizică) 224
3. Învățământul medico-farmaceutic 225
4. Învățământul economic 226

Rezolvări 227

C. **PROBLEME PROPUSE**

ENUNȚURI

1. Mecanică 321
2. Fizică moleculară și căldură. Termodinamică 324
3. Electricitate 327
4. Optică 329
5. Fizică atomică și nucleară 330

Rezolvări 332

CHIMIE

A. **BREVIAR** 364

B. **PROBLEME DATE LA CONCURSURILE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL SUPERIOR**

ENUNȚURI
1980

1. Învățământul tehnic și universitar 376
   α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică 376
   β. Profilul mecano-chimic 377
   γ. Profilul chimie alimentară 377
2. Învățământul medico-farmaceutic și universitar (biologie) 377

Scanned with OKEN Scanner

ENUNŢURI

1981

1. Învăţământul tehnic şi universitar 378
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică..... 378
β. Profilul mecano-chimic 379
γ. Profilul chimie alimentară 380
2. Învăţământul medico-farmaceutic şi universitar (biologie) 380

ENUNŢURI

1982

1. Învăţământul tehnic şi universitar 381
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie-fizică..... 381
β. Profilul mecano-chimic 382
γ. Profilul chimie alimentară 383
2. Învăţământul medico-farmaceutic şi universitar (biologic) 383

ENUNŢURI

1983

1. Învăţământul tehnic şi universitar 384
α. Profilurile chimie, biochimie, chimie fizică..... 384
β. Profilul mecano-chimic 385
γ. Profilul chimie alimentară 385
2. Învăţământul medico-farmaceutic şi universitar (biologie) 386
Rezolvări 387
C. **PROBLEME PROPUSE** 444

ENUNŢURI

1. Chimie anorganică 444
2. Chimie organică 449
Rezolvări..... 453

Scanned with OKEN Scanner

Redactori :
Ion MIHAI — matematică
Dinu-Ioanițiu NECHITA — fizică
Carmen ZGĂVÂRDICI — chimie

Tehnoredactor : Constantin IORDACHE

Coli de tipar : 31
Bun de tipar : 19.04.1984

Comanda nr. 40 127
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.

Scanned with OKEN Scanner